# НЕЛИНЕЙНАЯ СХЕМА КОМПРОМИССОВ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

**Альберт Воронин, Юрий Зиатдинов**

***Аннотация.*** *Определение многокритериального решения по своей природе компромиссно и принципиально основано на использовании субъективной информации. Возможность решения проблемы основана на гипотезе существования некоторой функции полезности. Традиционный подход линеаризации функции полезности обладает многими недостатками. Предлагается концепция нелинейной схемы компромиссов.*

***Ключевые слова****: многокритериальные задачи, ситуация принятия решения, адаптация, модель функции полезности, нелинейная схема компромиссов.*

***ACM Classification Keywords****: H.1 Models and Principles – H.1.1 – Systems and Information Theory; H.4.2 – Types of Systems.*

## Содержание проблемы

Всякое сужение области эффективных решений, а тем более выбор единственного из них принципиально требует привлечения дополнительной субъективной информации от лица, принимающего решение (ЛПР), или группы людей (экспертов), которые участвуют в решении многокритериальной задачи. Причина в том, что эффективные точки несравнимы между собой формально. Возможность решения проблемы основана на гипотезе существования некоторой *функции полезности*, возникающей в сознании ЛПР при решении конкретной многокритериальной задачи. Дополнительная информация заключается в ответе на вопрос: *сколькими единицами выигрыша по одному критерию можно, по мнению ЛПР, компенсировать неизбежный проигрыш единицы по другому* (*другим*) *в заданной ситуации*? На основании этой дополнительной информации формулируется конкретная схема компромиссов для данной многокритериальной задачи и в итоге находится искомое решение.

Таким образом, определение многокритериального решения по своей природе компромиссно и принципиально основано на использовании субъективной информации. Получив эту информацию и выбрав схему компромиссов, можно перейти от общего векторного выражения к скалярной свертке частных критериев, что является основой для построения конструктивного аппарата решения многокритериальных задач. Если используется способ скалярной свертки, то математически модель решения задачи векторной оптимизации для минимизируемых критериев представляется в виде

$$x^* = \arg\min_{x\in X} Y\left[y(x)\right],$$

или

$$x^* = \arg\min_{x\in X} Y\left[y_0(x)\right],$$

если вектор критериев $y(x)$ пронормирован вектором ограничений $A$:

$$y_0(x) = \left\{y_k(x)/A_k\right\}_{k=1}^{s} = \left\{y_{0k}(x)\right\}_{k=1}^{s}. \qquad (1)$$

Здесь $x$ – вектор аргументов оптимизации; $X$ – допустимая область решений; $Y(y)$ – скалярная свертка вектора частных критериев, имеющая смысл целевой функции. Ее вид является отражением функции полезности ЛПР и зависит от выбранной схемы компромиссов. По сути, практически все подходы к определению скалярной свертки сводятся к построению той или иной *модели* функции полезности ЛПР.

В большинстве случаев при решении многокритериальных задач ограничиваются линеаризованной моделью. Такой подход, обладая несомненным преимуществом простоты, характеризуется рядом недостатков, присущих методу линеаризации вообще. Так, линейная модель приводит к правильным результатам лишь в малых окрестностях рабочей точки, положение которой зависит от ситуации принятия многокритериального решения. Любое изменение ситуации приводит к необходимости перерасчета весовых коэффициентов модели. В серьезных многокритериальных задачах целесообразно строить *нелинейную* модель функции полезности ЛПР.

## Содержательный анализ функции полезности ЛПР

Введем понятие *напряженности ситуации* как меры близости относительных частных критериев к своему предельному значению (единице):

$$\rho_k = 1 - y_{0k}\,,\ \rho_k \in [0;1],\ k \in [1,s].$$

Если многокритериальное решение принимается в напряженной ситуации, то это значит, что в заданных условиях один или несколько частных критериев в результате решения могут оказаться в опасной близости к своим предельным значениям ( $\rho_k \approx 0$ ). И если один из них достигнет предела (или выйдет за него), то это событие не компенсируется возможным малым уровнем остальных критериев (обычно не допускается нарушение любого из ограничений).

В этой ситуации необходимо всемерно препятствовать опасному возрастанию наиболее неблагополучного (т.е. наиболее близкого к своему пределу) частного критерия, не очень считаясь с поведением в это время остальных. Поэтому в достаточно напряженных ситуациях (при малых значениях $\rho_k$) ЛПР, если и допускает ухудшение максимального (наиболее важного в данных условиях) частного критерия на единицу, то только компенсируя это большим количеством единиц улучшения остальных критериев. А в очень напряженной ситуации (первый полярный случай: $\rho_k$=0) ЛПР вообще оставляет в поле зрения только этот один, наиболее неблагополучный частный критерий, не обращая внимания на остальные. Следовательно, адекватным выражением схемы компромиссов в случае напряженной ситуации является минимаксная модель (эгалитарный принцип)

$$x^* = \arg\min_{x\in X}\max_{k\in[1,s]} y_{0k}(x)\,,\ \text{т.е.}\ Y[y_0(x)] = \max_{k\in[1,s]} y_{0k}(x)\,.$$

В менее напряженных ситуациях необходимо возвращаться к одновременному удовлетворению и других критериев, учитывая противоречивое единство всех интересов и целей системы. При этом ЛПР варьирует свою оценку выигрыша по одним критериям и проигрыша по другим в зависимости от ситуации. В промежуточных случаях выбираются схемы компромиссов, дающие различные степени частичного выравнивания частных критериев. С уменьшением напряженности ситуации предпочтения по отдельным критериям выравниваются.

И, наконец, во втором полярном случае ($\rho_k \approx 1$) ситуация настолько спокойная, что частные критерии малы и не возникает никакой угрозы нарушения ограничений. ЛПР здесь считает, что единица ухудшения любого из частных критериев вполне компенсируется равнозначной единицей улучшения любого из остальных. Этому случаю соответствует экономичная схема компромиссов, обеспечивающая минимальные для заданных условий суммарные потери по частным нормированным критериям. Такая схема выражается моделью интегральной оптимальности (утилитарный принцип)

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} y_{0k}(x) \text{, т.е. } Y[y_0(x)] = \sum_{k=1}^{s} y_{0k}(x).$$

## Нелинейная схема компромиссов

С точки зрения формализации целесообразно задачу выбора схемы компромиссов заменить эквивалентной задачей синтеза некоторой *единой* скалярной свертки частных критериев, которая в различных ситуациях выражала бы разные принципы оптимальности. Требования к синтезируемой функции $Y(y_0)$:

– она должна быть гладкой и монотонной;
– в напряженных ситуациях она должна выражать принцип минимакса;
– в спокойных условиях – принцип интегральной оптимальности;
– в промежуточных случаях должна приводить к парето-оптимальным решениям, дающим различные меры частичного удовлетворения критериев.

Иными словами, такая универсальная свертка должна быть выражением схемы компромиссов, *адаптирующейся* к ситуации. Для этого необходимо, чтобы в выражение для скалярной свертки в явном виде входили характеристики напряженности ситуации $\rho$.

Из возможных функций, отвечающих перечисленным требованиям, выберем простейшую:

$$Y(\alpha, y_0) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \left[1 - y_{0k}(x)\right]^{-1};\ \alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1, \tag{2}$$

где $\alpha_k$=const – формальные параметры, определенные на симплексе и имеющие двоякий физический смысл. С одной стороны – это весовые коэффициенты, выражающие *предпочтения* ЛПР по отдельным критериям. С другой – это коэффициенты регрессии *содержательной регрессионной модели функции полезности ЛПР*, построенной на основе концепции нелинейной схемы компромиссов.

Весовые коэффициенты рассчитываются по формуле

$$\alpha_k = \frac{f_k}{\sum_{j=1}^{s} f_j}, k \in [1, s], \tag{3}$$

где $f_k$ – оценка важности (приоритетности) *к*-го критерия, данная экспертом по *шкале баллов*.

Таким образом, нелинейной схеме компромиссов соответствует модель векторной оптимизации, в явном виде зависящая от характеристик напряженности ситуации $\rho$:

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \left[1 - y_{0k}(x)\right]^{-1}.$$

В отличие от линейной модели, определенной в малой окрестности рабочей точки, нелинейная модель функции полезности ЛПР определена на всей допустимой области решений X и не требует перерасчета коэффициентов $\alpha$k при изменениях ситуации.

## Нормализация скалярной свертки

При многокритериальном оценивании альтернатив часто возникает необходимость получения не только аналитической, но и *качественной* оценки. Для этого следует выражение скалярной свертки $Y(\alpha, y_0)$

нормировать и полученное значение $Y_0$ соотнести с градациями обращенной нормированной фундаментальной шкалы:

| Категория качества | Интервалы обращенной нормированной фундаментальной шкалы оценок $y_0$, $Y_0$ |
|---|---|
| Неприемлемое | 1,0 – 0,7 |
| Низкое | 0,7 – 0,5 |
| Удовлетворительное | 0,5 – 0,4 |
| Хорошее | 0,4 – 0,2 |
| Высокое | 0,2 – 0,0 |

Конструкция нелинейной схемы компромиссов позволяет нормировать скалярную свертку не к максимальному (обычно неизвестному), а к *минимальному* значению. Положив в выражении для нелинейной скалярной свертки (2) идеальные (нулевые) значения минимизируемых критериев $y_{0k}\left(x\right)=0$ и учитывая нормировку весовых коэффициентов *α*, получим $Y_{0\min}=1$ и формула нормированной минимизируемой скалярной свертки имеет вид

$$Y_0 = 1 - \frac{1}{Y} \tag{4}$$

## Модельный пример

Покажем здесь возможности нелинейной схемы компромиссов в задаче *многокритериального анализа*, а именно, оценки качества по нескольким критериям глиссадного спуска при посадке самолета.

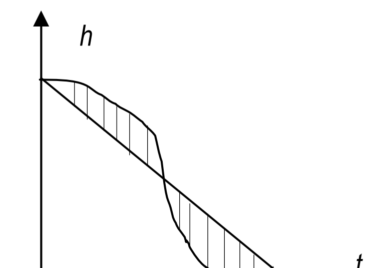


Рис.1

На рис.1 в координатах (*h*–*t*) схематически представлено изменение высоты самолета в процессе глиссадного спуска. Предполагается, что в момент времени *t*=*T* высота *h*=0.

Аналогичным образом может быть представлено изменение положение самолета *b* относительно центральной линии взлетно-посадочной полосы (ВПП) в боковой плоскости в процессе глиссадного спуска.

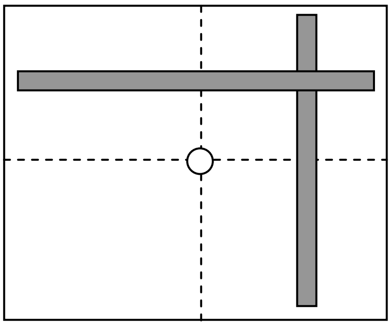

Рис.2

В процессе глиссадного спуска летчик управляет самолетом с помощью директорного прибора, схематически изображенного на рис.2. Положение планок, показанное на рисунке, означает, что самолет находится выше глиссады и правее осевой линии ВПП. Управление заключается в совмещении перекрестия планок с центральной точкой прибора.

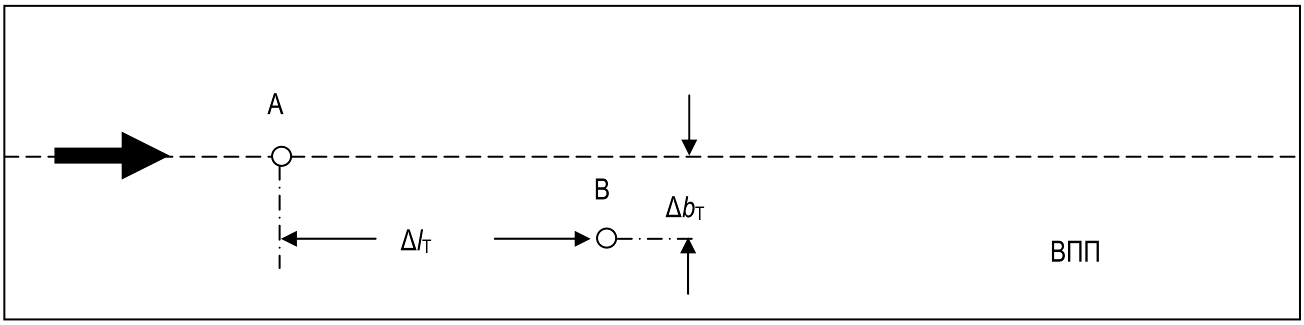


Рис.3

На рис.3 показано, что в момент времени t=T самолет коснулся ВПП в точке B, находящейся на расстоянии $\Delta l_T$ от расчетной точки A и на расстоянии $\Delta b_T$ от осевой линии ВПП.

Для оценки качества посадки самолета используются три *терминальных* ($t=T$) критерия качества:

$y_1 = |\Delta l_T| < A_1$ – модуль отклонения от расчетной точки касания в продольной плоскости;

$y_2 = |\Delta b_T| < A_2$ – модуль отклонения точки касания от продольной оси ВПП в боковой плоскости;

$y_3 = V_h^{(T)} < A_3$ – вертикальная скорость в терминальной точке, а также два *интегральных* критерия:

$y_4 = \frac{1}{T}\int_0^T |\Delta h|\, dt < A_4$ – среднее отклонение от глиссады в вертикальной плоскости;

$y_5 = \frac{1}{T}\int_0^T |\Delta b|\, dt < A_5$ – среднее отклонение от глиссады в горизонтальной плоскости.

Кроме этих критериев качество процесса посадки характеризуют еще $y_6$ – отклонение от посадочной скорости в терминальной точке; $y_7$ – курсовой угол в терминальной точке; $y_8$ – угол крена в терминальной точке; $y_9$ – угол тангажа в терминальной точке; $y_{10}$ – средний расход рулей на глиссаде (интегральный критерий) и т.д. Будем считать, что последние критерии при всех посадках удовлетворяются.

Для расчета интегральных критериев воспользуемся приемом приближенного интегрирования.

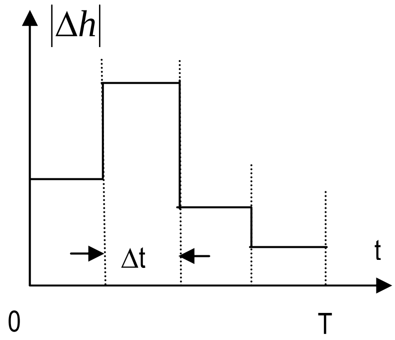


Рис.4

Прием иллюстрируется графиком рис.4. Интервал времени спуска по глиссаде [0,T] разбивается на N подинтервалов $\Delta$t, в течение каждого из которых величина $|\Delta h|_i, i \in [1, N]$ измеряется и полагается постоянной. Тогда в формуле для интегрального критерия мы можем перейти от интеграла к суммированию:

$$y_4 = \frac{1}{T}\int_0^T |\Delta h|\,dt \approx \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N} |\Delta h_i|\,\Delta t_i$$

Если все подинтервалы одинаковы, т.е. $\forall i\ \Delta t_i = \Delta t$ , то $T = N\Delta t$ и

$$y_4 \approx \frac{\Delta t}{N\Delta t}\sum_{i=1}^{N} |\Delta h_i| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\Delta h_i| \qquad (5)$$

Аналогичным образом рассчитывается и критерий $y_5$ .

Теперь методом нелинейной схемы компромиссов оценим качество двух посадок самолета при различных числовых значениях частных критериев.

## Посадка 1

Сначала рассчитаем значения интегральных критериев при N=4 и числовых данных, представленных таблицей

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert\Delta h\rvert$, м | 10 | 12 | 15 | 5 |
| $\lvert\Delta b\rvert$, м | 5 | 10 | 8 | 6 |

По формуле (5) получим: $y_4$=10,5 м и $y_5$=7,25 м.

Зададим для посадки 1 следующие числовые данные:

| | *По формулам (1) и (3) рассчитаем* |
|---|---|
| *$y_1$=6 м; $A_1$=15 м; $f_1$=8.* | *$y_{01}$=0,4; $\alpha_1$=0,25;* |
| *$y_2$=3 м; $A_2$=10 м; $f_2$=7.* | *$y_{02}$=0,3; $\alpha_2$=0,22;* |
| *$y_3$=0,2 м/сек; $A_3$=1 м/сек; $f_3$=9.* | *$y_{03}$=0,2; $\alpha_3$=0,28;* |
| *$y_4$=10,5 м; $A_4$=30 м; $f_4$=5.* | *$y_{04}$=0,35; $\alpha_4$=0,16;* |
| *$y_5$=7,25 м; $A_5$=20 м; $f_5$=3.* | *$y_{05}$=0,36; $\alpha_5$=0,09.* |

Рассчитаем скалярную свертку критериев по нелинейной схеме компромиссов (формула (2):

$$Y = 0,25\frac{1}{1-0,4} + 0,22\frac{1}{1-0,3} + 0,28\frac{1}{1-0,2} + 0.16\frac{1}{1-0,35} + 0,09\frac{1}{1-0,36} = 1,47$$

Нормировка по формуле (4) дает $Y_0 = 1 - \frac{1}{1,47} = 0,32$.

Сопоставление этого значения с качественными градациями обращенной нормированной фундаментальной шкалы позволяет сделать вывод, что данную посадку можно оценить как *хорошую*.

## Посадка 2

Рассчитаем интегральные критерии по числовым данным таблицы

| *i* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert\Delta h\rvert$ | 12 | 15 | 16 | 10 |
| $\lvert\Delta b\rvert$ | 7 | 12 | 14 | 9 |

По формуле (5): $y_4$=13,25 м и $y_5$=10,5 м.

Зададим для посадки 1 следующие числовые данные:

| | *По формулам (1) и (5)* |
|---|---|
| *$y_1$=3 м; $A_1$=15 м; $f_1$=8.* | *$y_{01}$=0,2; $\alpha_1$=0,25;* |
| *$y_2$=4 м; $A_2$=10 м; $f_2$=7.* | *$y_{02}$=0,4; $\alpha_2$=0,22;* |
| *$y_3$=0,6 м/сек; $A_3$=1 м/сек; $f_3$=9.* | *$y_{03}$=0,6; $\alpha_3$=0,28;* |
| *$y_4$=13,25 м; $A_4$=30 м; $f_4$=5.* | *$y_{04}$=0,44; $\alpha_4$=0,16;* |
| *$y_5$=10,5 м; $A_5$=20 м; $f_5$=3.* | *$y_{05}$=0,52; $\alpha_5$=0,09.* |

По формуле (2):

$$Y = 0,25\frac{1}{1-0,2} + 0,22\frac{1}{1-0,4} + 0,28\frac{1}{1-0,6} + 0.16\frac{1}{1-0,44} + 0,09\frac{1}{1-0,52} = 1,85$$

Нормировка по формуле (4): $Y_0 = 1 - \frac{1}{1,85} = 0,46$.

По обращенной нормированной фундаментальной шкале посадка 2 оценивается как *удовлетворительная*. К такому выводу наша процедура привела не в последнюю очередь из-за критерия $y_3$=0,6 м/сек (посадка жесткая).

## Сведения об авторах

***Воронин Альберт Николаевич** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных информационных технологий Национального авиационного университета, проспект Комарова, 1, Киев-58, 03058 Украина; e-mail: alnv@voliacable.com*

***Зиатдинов Юрий Кашафович** – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой компьютерных информационных технологий Национального авиационного университета, проспект Комарова, 1, Киев-58, 03058 Украина; e-mail: oberst@nau.edu.ua*