МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА КОМБИНАТОРНОМ МНОЖЕСТВЕ ПОЛИРАЗМЕЩЕНИЙ: СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

Людмила Колечкина

***Резюме**: Рассматривается многокритериальная задача дискретной оптимизации на допустимом комбинаторном множестве полиразмещений. Исследуются структурные свойства допустимой области и различных видов эффективных решений. На основе развития идей евклидовой комбинаторной оптимизации и метода главного критерия предложены и обоснованы возможные подходы для решения многокритериальной комбинаторной задачи на множестве полиразмещений..*

***Ключевые слова**: многокритериальная оптимизация, дискретная оптимизация, Парето-оптимальные, слабо, строго эффективные решения, комбинаторное множество полиразмещений.*

***ACM Classification Keywords**: G2.1 Combinatorics (F2.2), G1.6 Optimization*

Введение

Многокритериальные задачи оптимизации на различных множествах продолжают привлекать внимание многих исследователей [1 – 10]. Модели дискретной комбинаторной оптимизации широко применяются при решении важных задач геометрического проектирования, экономики, размещение объектов, управления процессом обработки данных, принятия решений и других. В последнее время в области исследования различных классов комбинаторных моделей, разработки новых методов их решения большое внимание уделяется методам, которые основаны на использовании структурных свойств комбинаторных множеств [2, 8 – 15].

В данной работе формулируется и исследуется качественно новая и актуальная задача, которая объединяет многокритериальность альтернатив и допустимые множества решений, имеющие определенные комбинаторные свойства. Как известно, большинство комбинаторных оптимизационных задач могут быть сведены к задачам целочисленного программирования, но это не всегда оправдано, поскольку при этом теряется возможность учета комбинаторных свойств задач [2].

Систематическое изучение свойств евклидовых комбинаторных множеств и их исследование описаны во многих работах. Рядом с хорошо известными евклидовыми комбинаторными множествами перестановок, размещений, сочетаний, разбиений выделяются более сложные структуры – поликомбинаторные множества. Интерес к таким множествам обусловлен разными прикладными задачами, поскольку значительное их количество хорошо описывается с помощью поликомбинаторных конструкций [12, 14].

Следует отметить, что задачи евклидовой комбинаторной оптимизации на поликомбинаторных множествах неотъемлемо связаны с комбинаторными многогранниками, которые являются выпуклыми оболочками таких множеств, и их свойствами. Повышенный интерес к комбинаторным и поликомбинаторным конфигурациям обусловлен исследованиями последних лет в области компьютерных технологий при создании современных алгоритмов и программ для решения оптимизационных задач. Следовательно, рассмотрение новых задач на поликомбинаторных множествах со многими критериями предопределено потребностями практики.

Данная работа продолжает исследования многокритериальных задач на комбинаторных множествах перестановок, сочетаний, представленные в работах [8, 9].

Постановка задачи.

Рассматриваются многокритериальные задачи вида:

$$Z(\Phi, P_{qk}^{ns}(A,H)): \quad \max\left\{\Phi(a) \mid a \in P_{qk}^{ns}(A,H)\right\},$$

состоящие в максимизации векторного критерия $\Phi(a)$ на евклидовом комбинаторном множестве полиразмещений, где $\Phi_i : R^n \to R^1, i \in N_l = \{1,...,l\}$.

Для изложения материала используем понятие мультимножества $A = \left\{a_1, a_2, ..., a_q\right\}$, которое определяется основанием $S(A) = \left\{e_1, e_2, ..., e_k\right\}$ т.е. множеством всех его различных элементов и кратностью его элементов $k(e_j) = r_j$ – числом повторений каждого j- го элемента основания, $j \in N_k = \left\{1,2,...,k\right\}$, $r_1 + r_2 + ... + r_k = q.$

Выберем произвольное $n \in N_q$. Упорядоченной n- выборкой из мультимножества A называется набор $a = \left(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}\right)$, где $a_{i_j} \in A \quad \forall i_j \in N_n, \ \forall j \in N_n, \ i_s \neq i_t$, если $s \neq t \ \ \forall s \in N_n, \ \ \forall t \in N_k$.

Определение 1. Множество упорядоченных n- выборок из мультимножества A при условии $n < q$ называется множеством размещений с повторениями из n действительных чисел, среди которых k различных, либо общим множеством размещений и обозначается $P_{qk}^{n}(A)$.

Представим множество N_q в виде упорядоченного разбиения на s, где $s < q$, непустых попарно непересекающихся подмножеств $J_1, ..., J_s$, то есть для них выполняются условия: $J_i \cap J_j = \varnothing$, $J_i \neq \varnothing, \ J_j \neq \varnothing, \ \forall i, j \in N_s$, а также упорядоченное разбиение числа n на s слагаемых $n_1, n_2, ..., n_s$, которое удовлетворяет условие $1 \leq n_i \leq q_i$, $\forall i \in N_s, \left|J_i\right| = q_i$. Очевидно, что $q_1 + q_2 + ... + q_s = q$, $n_1 + n_2 + ... + n_s = n$.

Обозначим H - множество элементов вида: $h = (h(1), ..., h(n)) = (h^1, ..., h^s)$, где $h(j) \in N_n, \ \ j \in N_n$, а h^i - произвольная перестановка элементов множества $J_i \ \forall i \in N_s$.

Пусть подмультимножество A^i мультимножества A, состоит из тех элементов A, номера которых принадлежат множеству J_i : $A^i = \{a_1^i, ..., a_{n_i}^i\}$, $\left|J_i\right| = n_i$.

Определение 3. Множество $P_{qk}^{ns}(A,H) = \left\{(a_{h(1)}, ..., a_{h(n)}) \middle| a_{h(i)} \in A \ \forall i \in N_n, \forall h \in H\right\} \subset R^n$

называют общим множеством полиразмещений.

Не теряя общности, упорядочим элементы мультимножества A по неубыванию: $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$.

Очевидно, что это упорядочение сохраняется и для каждого подмультимножества A^i, $i \in N_s$, из A.

Свойства евклидова множества полиразмещений

Известно, что комбинаторные множества приобретают интересные свойства при погружении в арифметическое евклидово пространство. Будем рассматривать элементы множества полиразмещений как точки арифметического евклидова пространства R^n .

Пусть вектор a – элемент евклидова комбинаторного множества $E(A)$. Отображение $\varphi : E(A) \to E_{\varphi}(A) \subset R^n$ называется погружением множества $E(A)$ в арифметическое евклидово пространство, если φ задает взаимно однозначное соответствие $E_{\varphi}(A) \subset R^n$ по правилу: для $x_j = a_{i_j}$ $\forall j \in N_n$.

Известно [12, 14], что выпуклой оболочкой множества полиразмещений $P^{ns}_{qk}(A,H)$ является многогранник полиразмещений $\Pi^{ns}_{qk}(A,H) = \operatorname{conv} P^{ns}_{qk}(A,H),$ множеством вершин которого есть элементы множества полиразмещений: $\operatorname{vert} \Pi^{ns}_{qk}(A,H) = P^{ns}_{qk}(A,H)$.

Теорема 1. Множество $\Pi^{ns}_{qk}(A,H)$ определяется совокупностью всех решений системы

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n_i} x_j \le \sum_{j=1}^{n_i} a^i_j, \; i \in N_s, & (1) \\ \sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{m_i} a^i_j, \quad m_i \in N_{q_i - 1}, \alpha_j \in J_i, \forall i \in N_s & (2) \end{cases}$$

$\alpha_j \ne \alpha_t, \forall j \ne t, \forall j,t \in J_i.$

Многогранник $\Pi^{ns}_{qk}(A,H)$ будем называть общим многогранником евклидового множества полиразмещений. Рассмотрим некоторые его свойства и связь с общим множеством полиразмещений.

Очевидно, что из системы линейных неравенств (1) – (2) можно выделить s подсистем линейных неравенств, описывающих многогранники размещений $\Pi^{n_i}_{q_i k_i}\left(A^i\right)$, являющиеся выпуклой комбинацией множества размещений a_{h^i}, $i \in N_s$. Следовательно,

$$\Pi^{n_i}_{q_i k_i}(A^i) = \left\{ x \in R^{n_i} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n_i} x_j \le \sum_{j=1}^{n_i} a^i_{q_i - j}, \sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{m_i} a^i_j \right\},$$

$$m_i \in N_{q_i - 1}, \alpha_j \in J_i, \alpha_j \ne \alpha_t, \forall j \ne t, \forall j,t \in J_i, \forall i \in N_s.$$

Определение 4. Под произведением многогранников $M_1,...,M_s$ понимают множество $\bigotimes_{i=1}^{S} M_i = \left\{ x \in R^{d_1 + ... + d_s} \mid x = (x_1,...,x_s), \; x_i \in M_i \quad \forall i \in N_s \right\}$, где M_i - d_i – мерный многогранник.

Воспользуемся следующей леммой [15].

Лемма. 1) Произведение многогранников является многогранником;

2) $\dim(\overset{S}{\underset{i=1}{\otimes}} M_i) = \sum_{i=1}^{S} \dim M_i$, где $\dim M$ – размерность множества M ;

3) k -мерные грани многогранника $\overset{S}{\underset{i=1}{\otimes}} M_i$ образуют множество с элементами вида $\overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} F_i$, где F_i – k_i -мерная грань многогранника M_i и $k_1 + ... + k_s = k$.

Каждый из многогранников $\Pi^{n_i}_{q_i k_i}\left(A^i\right)$ представляет собой многогранник размещений. По определению 4 и согласно лемме справедливо равенство $\overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} \Pi^{n_i}_{q_i k_i}(A^i) = \left\{ x \in R^{d_1+...+d_s} \mid x = (x_1,...,x_s),\ x_i \in \Pi^{n_i}_{q_i k_i}(A^i)\ \ \forall i \in N_s \right\}$, то есть точка $x \in \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} \Pi^{n_i}_{q_i k_i}(A^i)$ удовлетворяет каждой из s подсистем системы (1), (2). Следовательно, можно утверждать, что если a_{h^i} – вершина многогранника $\Pi^{n_i}_{q_i k_i}\left(A^i\right)$, то $a(h) = \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} a_{h^i}$. Соответственно $a(h) = (a_{h^1},...,a_{h^s})$, где $a(h) \in P^{ns}_{qk}(A,H)$.

Справедливы следующие теоремы [12].

Теорема 2. Общий многогранник евклидова множества полиразмещений можно представить как произведение многогранников $\Pi^{n_i}_{q_i k_i}\left(A^i\right)$ размещений, т.е. $\Pi^{ns}_{qk}(A,H) = \overset{s}{\underset{i=1}{\otimes}} \Pi^{n_i}_{q_i k_i}(A^i)$.

Теорема 3. Множество полиразмещений $P^{ns}_{qk}(A,H)$ совпадает с множество вершин многогранника $\Pi^{ns}_{qk}(A,H)$.

Теорема 4. Вершина $a(h) \in \mathrm{vert}\, \Pi^{ns}_{qk}(A,H)$ является смежной с вершиной $a(z) \in \mathrm{vert}\, \Pi^{ns}_{qk}(A,H)$ тогда и только тогда, когда $a(z)$ образуется из $a(h)$ перестановкой двух неравных друг другу компонент a^i_i и a^i_j, $j \in J_{q_i - 1}$, $i \in N_s$.

Следует отметить, что общее число p линейных неравенств, входящих в систему (1), (2), описывающих многогранник полиразмещений $\Pi^{ns}_{qk}(A,H)$ очень велико. Согласно [11] совокупность неравенств подсистемы для некоторого подмножества $J_i, i \in N_s$ системы (1), (2), имеющих одинаковое значение m_i верхнего предела суммирования, будем называть m_i -ой группой неравенств этой подсистемы, где $i \in N_s$. В частности, в каждую m_i -ю группу входит $C^{m_i}_{q_i}$ неравенств. Отсюда имеем общее число неравенств, описывающих многогранник $\Pi^{n_i}_{q_i k_i}\left(A^i\right)$ равным $p_i = \sum_{i=0}^{q_i} C^{m_i}_{q_i} = 2^{q_i}$, $i \in N_s$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Поскольку из q_i координат $a^i_j,\ j \in J_i$, точки $x \in P^{ns}_{qk}(A,H)$ только k_i различных, то из системы неравенств (1), (2), описывающей общий многогранник полиперестановок $\Pi^{ns}_{qk}(A,H)$, можно исключить некоторые неравенства. Их общее число составляет $N = \sum_{i=1}^{s} N^i$, где $N^i = 1 + q_i + \sum_{j=i+1}^{q_i} C^j_{q_i}$.

Доказательство. С учетом выполнения условия $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_q$ для любого $j \in N_{m_i - 1}$, $m_i \le q_i$, $i \le N_s$, имеет место равенство $a^i_j = a^i_{j+1}$. В этом случае при выполнении неравенств первой группы в подсистеме (1), (2) будут также справедливы неравенства второй, третьей, ..., m_i-ой, $i \in N_s$, групп. Действительно, поскольку $x_j \ge a^i_1,\ j \in J_i,\ i \in N_s$, то для любого $m_i \in N_n$ выполняется условие $\sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \ge m_i a^i_1$. Следовательно, из каждой подсистемы системы (1), (2), описывающей многогранник полиразмещений $\Pi^{ns}_{qk}(A,H)$, можно исключить неравенства второй, третьей, ..., m_i-ой, $i \in N_s$, групп и общее число неравенств в i-ой подсистеме будет составлять $N^i = 1 + q_i + \sum_{j=i+1}^{q_i} C^j_{q_i}$, а следовательно число неравенств, которое можно исключить из системы (1), (2) будет равно $N = \sum_{i=1}^{s} N^i$. Если набор чисел $\left(a^i_1, a^i_2, ..., a^i_n\right)$ обладает свойством $a^i_j = a^i_{j+1}\ \ \forall j \in N_{n_i - 1} \setminus N_{n_i - m_i}$, $i \in N_s$, то в подсистеме системы (1), (2) достаточно оставить только неравенства первой, второй, ...,$(m_i - j)$-ой групп. Доказательство завершено.

При отображении множества полиразмещений $P^{ns}_{qk}(A,H)$ в евклидово пространство R^n сформулируем задачу $Z(F,X)$ максимизации некоторого векторного критерия $F(x)$ на множестве X, причем каждой точке $a \in P^{ns}_{qk}(A,H)$ будет соответствовать точка $x \in X$, такая, что $F(x) = \Phi(a)$.

$$Z(F,X): \max\left\{F(x) \mid x \in X\right\} ,$$

где $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_l(x))$ соответствует функционалу $\Phi_i(a)$, $f_i : R^n \to R^1, i \in N_l$, X – непустое множество, которое определяется следующим образом: $X = \operatorname{vert} \Pi^{ns}_{qk}(A,H)$, где $\Pi^{ns}_{qk}(A,H) = \operatorname{conv} P^{ns}_{qk}(A,H) = \Pi$. Под соответствием векторной функции F вектору функционалов Φ будем понимать соотношение: $\Phi(a) = F(\varphi(a)) \forall a \in P^{ns}_{qk}(A,H)$.

Задача $Z(F,X)$ может содержать также дополнительные линейные ограничения, образующие выпуклое многогранное множество $D \subset R^n$ вида: $D = \{x \in R^n \mid Bx \le d\}$, где $B \in R^{m \times n}$, $d \in R^m$. Следовательно допустимое множество имеет вид: $X = \operatorname{vert} \Pi^{ns}_{qk}(A,H) \bigcap D$.

Разработано множество различных принципов принятия решений в таких задачах. Наиболее традиционные из них связаны с выделением из всего множества $Y=\left\{y=F(x)\,|\,x\in \Pi_{qk}^{ns}(A,H)\bigcap D\right\}$ множества неулучшаемых или оптимальных по Парето, оптимальных по Слейтеру, оптимальных по Смейлу векторов.

Таким образом, под решением задачи $Z(F,X)$ будем понимать нахождение некоторого подмножества одного из следующих множеств: $P(F,X)$ – множества Парето-оптимальных (эффективных решений), $Sl(F,X)$ – оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений, $Sm(F,X)$ – оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений. Напомним [4, 10], что точка $x^*\in X$ называется эффективной (или Парето-оптимальной), если $\overline{\exists} x\in X: F(x)\geq F\left(x^*\right), F(x)\neq F\left(x^*\right)$; слабо эффективной (оптимальной по Слейтеру), если $\overline{\exists} x\in X: F(x)> F\left(x^*\right)$ и строго эффективной (оптимальной по Смейлу), если $\overline{\exists} x\in X: x\neq x^*, F(x)\geq F\left(x^*\right)$.

Из приведенных определений этих множеств следует справедливость соотношений между ними: $Sm(F,X)\subset P(F,X)\subset Sl(F,X)$.

Как известно, множество $P(F,X)$ Парето-оптимальных решений не пусто, поскольку допустимая область X ограничена, и внешне устойчиво [10]: $\forall y\in \Pi_{qk}^{ns}(A,H)\ \exists\, x\in P(F,X): F(x)\geq F(y)$.

При построении метода решения многокритериальной задачи $Z(F,X)$ следует учитывать структурные особенности ее допустимой области, т.е. свойства общего многогранника полиразмещений и довольно большое число описывающих его ограничений. Условия различных видов оптимальности решений и общий подход к нахождению слабо эффективных и Парето-оптимальных решений на основе использования представленных структурных свойств множеств эффективных решений, разработаны в работе Н.В. Семеновой в этом номере данного журнала.

Выводы

В статье исследованы сложные комбинаторные многокритериальные задачи на множестве полиразмещений. Рассмотрены некоторые свойства допустимой области комбинаторной многокритериальной задачи, погруженной в арифметическое евклидово пространство, являющейся общим многогранником полиразмещений. Полученные результаты в определенном смысле обобщают и развивают свойства изученного ранее общего многогранника размещений и являются необходимыми и важными для построения различных методов решения указанных классов задач. Дальнейшее развитие данной работы будет направлено на исследование структурных свойств других сложных комбинаторных множеств и на их основе разработку новых методов решения многокритериальных задач комбинаторной оптимизации.

Библиография

[1] Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наук. думка, 1988. – 472 с.

[2] Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев – Наук. думка, 1981. – 287 с.

[3]Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. – К.: Наук. думка, 2003. –264 с.

[4] Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наук. думка, 1995. – 170 с.

[5] Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2000. - №6 – С. 39 – 46.

[6] Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І., Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доповіді НАНУ. – 2003. – №10 – С. 80–85.

[7] Лебедева Т.Т., Семенова Н.В Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №4 – С. 90–100.

[8] Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ – 2008. – №3 – С. 158–172.

[9] Semenova N.V., Kolechkina L.M., Nagirna A.M. Vector combinatorial problems in a space of combinations with linear fractional functions of criteria // Intern. Journal "Information Theories and Applications", 15. – 2008. – P. 240 – 245.

[10] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето–оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

[11] Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 265 с.

[12] Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. –188 с.

[13] Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями.– К.: Наукова думка. – 2005.– 118 с.

[14] Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язання. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. – 130с.

[15] Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344с.

[16] Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. – К.: Вища школа, 1979. – 312 с.

Информация об авторе

***Людмила Николаевна Колечкина** – Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, канд. физ.-мат. наук, доцент, докторант, 03680 МСП Киев 187, проспект академика Глушкова, 40, Украина; e-mail: ludapl@ukr.net*