О НЕКОТОРЫХ ТРУДНОРЕШАЕМЫХ ЗАДАЧАХ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО АНАЛИЗА СТРУКТУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ[1]

Александр Кельманов

Аннотация: *Рассматриваются дискретные экстремальные задачи, к которым сводятся некоторые варианты проблемы помехоустойчивого off-line обнаружения в числовой последовательности повторяющегося фрагмента, а также некоторые варианты проблемы поиска подмножеств векторов во множестве векторов евклидова пространства. Анализируется сложность редуцированных оптимизационных задач и соответствующих им задач анализа данных и распознавания образов. Дан обзор новых и известных алгоритмических результатов по решению этих задач.*

Ключевые слова: *поиск подмножеств векторов, помехоустойчивое обнаружение повторяющегося фрагмента, кластерный анализ, дискретная оптимизация, NP-трудная задача, алгоритмы с гарантированными оценками точности.*

ACM Classification Keywords: *F.2. Analysis of Algorithms and Problem Complexity, G.1.6. Optimization, G2. Discrete Mathematics, I.5.3. Pattern Recognition: Clustering.*

Conference: *The paper is selected from International Conference "Classification, Forecasting, Data Mining" CFDM 2009, Varna, Bulgaria, June-July 2009*

Введение

Объект исследования работы – проблемы оптимизации в задачах анализа данных и распознавания образов. Предмет исследования – дискретные экстремальные задачи, к которым сводятся некоторые варианты проблемы помехоустойчивого off-line обнаружения повторяющегося фрагмента в числовой последовательности и некоторые варианты проблемы поиска подмножеств «похожих» векторов во множестве векторов евклидова пространства. Цель работы – обзор новых и известных результатов по изучению сложности, систематизации и исследованию алгоритмов решения этих задач. Данная работа дополняет сообщения [1-3].

Представленные в работе модели анализа данных типичны для широкого спектра приложений, в которых необходимым элементом является компьютерная обработка массивов зашумленных структурированных данных, включающих повторяющиеся, чередующиеся или перемежающиеся информационно значимые фрагменты в одномерном случае или векторы в многомерном случае. Формулировки анализируемых ниже задач являются результатом: 1) формализации соответствующих содержательных (прикладных) задач либо в виде задач максимизации функционала правдоподобия (в случае, когда помеха аддитивна и является последовательностью гауссовских независимых одинаково распределенных случайных величин), либо в виде задач среднеквадратического приближения (когда о помехе известно лишь то, что она аддитивна), 2) последующей редукции этих задач к задачам дискретной оптимизации.

[1] Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00032, 07-07-00022 и грантом АВЦП Рособразования 2.1.1/3235.

Модели анализа структурированных данных

Пусть $\mathbf{x}_n \in \mathcal{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$, где $\mathcal{N} = \{1,2,\dots,N\}$, – последовательность векторов евклидова пространства. Рассмотрим две возможные структуры этой последовательности.

Структура 1. Последовательность задается формулой

$$\mathbf{x}_n = \begin{cases} \mathbf{w}_1, & n \in \mathcal{M}_1, \\ \mathbf{w}_2, & n \in \mathcal{M}_2, \\ \dots, & \dots, \\ \mathbf{w}_J, & n \in \mathcal{M}_J, \\ \mathbf{0}, & n \in \mathcal{N} \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j, \end{cases} \tag{1}$$

где $\bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{N}$, причем $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \varnothing$, если $i \neq j$.

Структура 2. Последовательность обладает свойством

$$\mathbf{x}_n = \begin{cases} \mathbf{w}_1, & n \in \mathcal{M}_1, \\ \mathbf{w}_2, & n \in \mathcal{M}_2, \\ \dots, & \dots, \\ \mathbf{w}_J, & n \in \mathcal{M}_J, \end{cases} \tag{2}$$

где $\bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j = \mathcal{N}$, причем $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \varnothing$, если $i \neq j$.

Положим $|\mathcal{M}_j| = M_j$, $j = 1,2,\dots,J$, и $\{n_1,\dots,n_M\} = \bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j$, где $M = \sum_{j=1}^{J} M_j$. Векторы $\mathbf{w}_j$ будем интерпретировать как информационно значимые векторы, а M_j – как число их повторов в последовательности $\mathbf{x}_n \in \mathcal{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$. Доступной для анализа будем считать последовательность

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n + \mathbf{e}_n, \quad n \in \mathcal{N}, \tag{3}$$

где $\mathbf{e}_n$ – вектор помехи (ошибки измерения), независимый от вектора $\mathbf{x}_n$. Положим

$$S(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_J, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_J) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \| \mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n \|^2 . \tag{4}$$

Модели анализа данных сформулируем в форме задач среднеквадратического приближения.

Допустим сначала, что в отсутствие шума данные имеют структуру 1. Сформулируем следующие задачи.

Задача 1. *Дано*: совокупность $\{\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{N}$ и совокупность $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_J\}$ векторов такие, что то целевая функция (4) минимальна.

Эту задачу можно трактовать как поиск семейства непересекающихся подмножеств векторов, похожих в среднеквадратическом.

Допустим, что в рамках структуры 1 компоненты набора $(n_1,\dots,n_M)$, элементы которого соответствуют номерам ненулевых векторов в формуле (1), связаны дополнительными ограничениями

$$1 \le T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max} \le N-1, \quad m = 2,\dots,N, \tag{5}$$

где $T_{\min}$ и $T_{\max}$ – натуральные числа. Эти ограничения устанавливают допустимый интервал между двумя ближайшими номерами ненулевых информационно значимых векторов в последовательности (1).

Задача 2. *Дано*: последовательность $\mathbf{y}_n \in \mathcal{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{N}$ и совокупность $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_J\}$ векторов такие, что целевая функция (4) минимальна, при ограничениях (5) на элементы упорядоченного набора $(n_1, \ldots, n_M)$, которые образуют совокупность $\{n_1, \ldots, n_M\} = \bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j$.

Задачу 2 можно трактовать как совместное оптимальное обнаружение и оценивание по критерию минимума суммы квадратов уклонений ненулевых неизвестных информационно значимых векторов, повторяющихся и перемежающихся в ненаблюдаемой последовательности (1).

Для данных, имеющих структуру 2, сформулируем следующую задачу.

Задача 3. *Дано*: совокупность $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{N}$ на непустые подмножества $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_J$ и совокупность $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_J\}$ векторов такие, что то целевая функция (4) минимальна.

Эта задача отличается от задачи 1 тем, что в ней требуется найти разбиение множества $\mathcal{N}$, а не совокупность непересекающихся подмножеств этого множества. При этом предполагается, что структура данных описывается формулой (2).

Редуцированные экстремальные задачи

Легко убедиться, что во всех сформулированных задачах для любого допустимого семейства $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_J\}$ подмножеств множества $\mathcal{N}$ минимум функционала (4) по переменным $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_J$, доставляется векторами $\overline{\mathbf{w}}_j = \sum_{n \in \mathcal{M}_j} \mathbf{y}_n / |\mathcal{M}_j|$, $j = 1, 2, \ldots, J$. В задачах 1 и 2 в силу формулы (1) этот минимум равен

$$S_{\min} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \| \mathbf{y}_n \|^2 - \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{|\mathcal{M}_j|} \| \sum_{n \in \mathcal{M}_j} \mathbf{y}_n \|^2 . \tag{6}$$

Для задачи 3, учитывая (2), имеем

$$S_{\min} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{n \in \mathcal{M}_j} \| \mathbf{y}_n - \overline{\mathbf{w}}_j \|^2 . \tag{7}$$

Таким образом, для отыскания решений сформулированных задач необходимо решить задачи на минимум функций (6) и (7). К идентичным оптимизационным задачам приводит статистический подход к проблеме анализа данных, если считать, что вектор $\mathbf{e}_n$ в формуле (4) есть выборка из q-мерного нормального распределения с параметрами $(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, где $\mathbf{I}$ единичная матрица, а в модели анализа данных в качестве критерия решения использовать максимум функционала правдоподобия.

Первый член в правой части равенства (6) является константой. Поэтому из задачи 1 получаем следующие редуцированные оптимизационные задачи.

Задача J -MSASVS-F (максимум суммы средних значений квадратов длин сумм векторов из подмножеств фиксированной мощности). *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральные числа

$M_1, M_2, \ldots, M_J$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{Y}$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{1}{|\mathcal{B}_j|} \| \sum_{y \in \mathcal{B}_j} \mathbf{y} \|^2 \to \max , \tag{8}$$

при ограничениях: $|\mathcal{B}_j| = M_j,\ j = 1, \ldots, J$.

Задача J **-MSASVS-NF** (максимум суммы средних значений квадратов длин сумм векторов из подмножеств, мощности которых не фиксированы). *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{Y}$ такое, что имеет место (8).

Обе задачи можно трактовать как поиск подмножеств векторов «похожих» в среднеквадратическом смысле. Отличие задач состоит в том, что в первой из них мощности искомых подмножеств являются частью входа задачи, а во второй эти мощности – оптимизируемые величины. Аналогичным образом формулируются еще две задачи, которые следуют из задачи 2 и ориентированы на анализ последовательностей при наличии ограничений (5).

Задача J **-MSASVSO-F**. *Дано*: последовательность $\mathbf{y}_n \in \mathcal{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$, и натуральные числа $M_1, M_2, \ldots, M_J$, $T_{\min}$ и $T_{\max}$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{N}$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{1}{|\mathcal{M}_j|} \| \sum_{n \in \mathcal{M}_j} \mathbf{y}_n \|^2 \to \max , \tag{9}$$

при ограничениях $|\mathcal{M}_j| = M_j,\ j = 1, \ldots, J$, на мощности подмножеств и при дополнительных ограничениях (5) на элементы упорядоченного набора $(n_1, \ldots, n_M)$, которые образуют совокупность $\{n_1, \ldots, n_M\} = \bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j$.

Задача J **-MSASVSO-NF**. *Дано*: последовательность $\mathbf{y}_n \in \mathcal{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$, и натуральные числа $T_{\min}$ и $T_{\max}$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{N}$ такое, что имеет место (9), при ограничениях (5) на элементы упорядоченного набора $(n_1, \ldots, n_M)$, которые образуют совокупность $\{n_1, \ldots, n_M\} = \bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j$.

Из задачи 3 и формулы (7) получаем хорошо известную задачу.

Задача MSSC. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $J > 1$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества (кластеры) $C_1, C_2, \ldots, C_J$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{\mathbf{y} \in C_j} \| \mathbf{y} - \overline{\mathbf{w}}_j \|^2 \to \min ,$$

где $\overline{\mathbf{w}}_j = \sum_{\mathbf{y} \in C_j} \mathbf{y} / |C_j|$, $j = 1, 2, \ldots, J$, – центры кластеров.

Эта задача является классической задачей анализа данных и распознавания образов. Ниже сформулированы два важных специальных случая этой задачи.

Задача J **-MSSC0-F**. *Дано*: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральные числа $M_1,M_2,\ldots,M_J$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $C_1,C_2,\ldots,C_J$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{w}}_j\|^2+\sum_{\mathbf{y}\in C_J}\|\mathbf{y}\|^2\to\min\,, \tag{10}$$

где $\overline{\mathbf{w}}_j=\sum_{\mathbf{y}\in C_j}\mathbf{y}/|C_j|$, $j=1,2,\ldots,J-1$, – центры кластеров, при ограничениях $|C_j|=M_j$, $j=1,\ldots,J$.

Задача J **-MSSC0-NF**. *Дано*: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $C_1,C_2,\ldots,C_J$ такое, что имеет место (10).

Эти задачи можно трактовать как специальные случаи задачи MSSC, в которых центр одного из кластеров определять не требуется (считается, что центр этого кластера известен и равен нулю). В первой задаче предполагается, что мощности кластеров фиксированы, а во второй число кластеров и их мощности – оптимизируемые величины.

Известные факты о сложности сформулированных задач и алгоритмах их решения

Прежде всего, заметим, что задача MSSC в силу своей широкой известности и давности постановки наиболее изучена в алгоритмическом плане. Имеется множество публикаций, ориентированных на построение эффективных алгоритмов с оценками точности для ее решения. Однако, лишь недавно в [4] дано корректное доказательство *NP*-трудности этой задачи для случая, когда $J=2$. Все ранее опубликованные доказательства труднорешаемости этой задачи содержали ошибки [5]. Другие задачи, сформулированные в предыдущем параграфе, относятся к числу слабо изученных задач. Рассмотрим современное состояние исследований по их решению.

Алгоритмическая сложность. Относительно сложности задач поиска подмножеств векторов и специальных случаев задачи кластерного анализа получены следующие результаты. Статус *NP*-трудности задачи 1-MSASVS-F был установлен в [6, 7]. Из этого результата следует, что задача J -MSASVS-F при $J>1$ также *NP*-трудна, как обобщение задачи 1-MSASVS-F. *NP*-трудность задачи 1-MSASVS-NF доказана в [8, 9]. Этот результат позволил установить труднорешаемость задачи J -MSASVS-NF при $J>1$ в случае, когда число J является частью входа. Позже в [10] была установлена труднорешаемость задачи J -MSASVS-NF для случая, когда J не является частью входа. В этой же работе было доказано, что задачи J -MSSC0-F и J -MSSC0-NF также *NP*-трудны.

О сложности задач с ограничением (5) на порядок выбора векторов известно следующее. Статус *NP*-трудности доказан [6, 7] лишь для задачи J -MSASVSO-F. Статус сложности задачи J -MSASVSO-NF пока не установлен. Скорее всего, она *NP*-трудна, как и задача J -MSASVS-NF.

Алгоритмы. Какие-либо алгоритмы с доказуемыми оценками точности для решения задач J -MSASVS-F и J -MSASVS-NF поиска подмножеств векторов, задач J -MSASVSO-F и J -MSASVSO-NF поиска подпоследовательностей векторов в случае, когда $J>1$, на сегодняшний день неизвестны. То же самое можно сказать про задачи J -MSSC0-F и J -MSSC0-NF , которые имеют смысл лишь при $J>1$.

К числу задач, для которых удалось построить алгоритмы с доказуемыми оценками точности, относятся простейшие задачи 1-MSASVS-F, 1-MSASVS-NF и 1-MSASVSO-F, в которых требуется найти лишь одно ($J=1$) подмножество «похожих» векторов или один повторяющийся вектор в последовательности. В [7] обоснованы приближенные асимптотически точные алгоритмы решения задач 1-MSASVS-F и 1-MSASVSO-F, имеющие временную сложность $O[Nq^2(2l+1)^{q-1}]$ и $O[Nq(q+M)(2l+1)^{q-1}]$ соответственно, где l – параметр алгоритма. Относительная погрешность у этих алгоритмов равна $(q-1)/(4l^2)$. В [6] предложен приближенный алгоритм решения задачи 1-MSASVSO-F. Его временная сложность есть величина $O(MN^2)$. К сожалению, для этого относительно «быстрого» алгоритма, хорошо зарекомендовавшего себя в численных экспериментах, гарантированная оценка точности пока не установлена.

Для решения задачи 1-MSASVS-NF в работе [10] предложен приближенный асимптотически точный алгоритм. Трудоемкость и относительная погрешность у этого алгоритма есть величины $O[Nq(q+\log N)(2l+1)^{q-1}]$ и $(q-1)/(4l^2)$, где l – параметр алгоритма.

В [11] доказано, что задачи 1-MSASVS-F и 1-MSASVS-NF разрешимы за время $O(q^2N^{2q})$. Тем самым показано, что при фиксированной размерности q пространства эти задачи могут быть точно решены за полиномиальное время.

Для вариантов задач 1-MSASVS-F и 1-MSASVSO-F с целочисленными координатами векторов в [12] обоснованы точные псевдополиномиальные алгоритмы. Трудоемкость этих алгоритмов есть величина $O[NqM^q(2b)^{q-1}]$, где b - максимальная по абсолютной величине координата векторов из заданного множества.

Заключение

К рассмотренным *NP*-трудным задачам сводятся простейшие проблемы из большого семейства (насчитывающего, по крайней мере, несколько сотен элементов [13]) проблем помехоустойчивого off-line анализа и распознавания структурированных последовательностей, включающих повторяющиеся, чередующиеся и перемежающиеся информационно значимые векторы (фрагменты) в качестве структурных элементов. Очевидно, что эти труднорешаемые задачи являются частными случаями для многих еще не изученных экстремальных задач, к которым сводятся проблемы анализа данных и распознавания образов, имеющих более сложную структуру над информационно значимыми векторами. Поэтому приведенные результаты могут служить в качестве базовых (при использовании известной [14] техники полиномиальной сводимости) для доказательства *NP*-трудности других более сложных проблем анализа структурированных данных и распознавания образов из упомянутого семейства.

Остается заметить, что для большинства из рассмотренных экстремальных задач какие-либо алгоритмы с оценками точности на сегодняшний день неизвестны. Высокая с практической точки зрения трудоемкость существующих приближенных алгоритмов решения некоторых из рассмотренных оптимизационных задач обуславливает продолжение исследований в направлении поиска новых алгоритмических решений, а также в направлении выделения подклассов задач, для которых возможно построение алгоритмов, имеющих меньшую временную сложность.

Благодарности

Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00032, 07-07-00022 и грантом АВЦП Рособразования 2.1.1/3235.

Литература

[1] Кельманов А.В. Полиномиально разрешимые и NP-трудные варианты задачи оптимального обнаружения в числовой последовательности повторяющегося фрагмента // Материалы Росс. конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Владивосток, 7-14 сентября 2007). – Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2007.- http://math.nsc.ru/ conference/ door07/ DOOR_abstracts.pdf. С. 46-50.

[2] Кельманов А.В. О некоторых полиномиально разрешимых и NP-трудных задачах анализа и распознавания последовательностей с квазипериодической структурой // Сборник докладов 13-й Всеросс. конф. «Математические методы распознавания образов» (ММРО-13). Ленинградская обл., г. Зеленогорск, 30 сентября - 6 октября 2007 г. - М.: МАКС Пресс, 2007. - С. 261-264.

[3] Kel'manov A.V. Off-line Detection of a Quasi-Periodically Recurring Fragment in a Numerical Sequence // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2008, Suppl. 2, pp. S84-S92.

[4] Aloise D., Deshpande A., Hansen P., Popat P. NP-Hardness of Euclidean Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2008-33. 2008. 4 p.

[5] Aloise D., Hansen P. On the Complexity of Minimum Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2007-50. 2007. 12 p.

[6] Gimadi E.Kh., Kel'manov A.V., Kel'manova M.A., Khamidullin S.A. A Posteriori Detecting a Quasiperiodic Fragment in a Numerical Sequence // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol. 18, No.1. P. 30-42.

[7] Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Пяткин А.В. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. 2007. Т.14, №1. С. 32-42.

[8] Kel'manov A.V., Pyatkin A.V. On the Complexity of a Search for a Subset of "Similar" Vectors // Doklady Mathematics. 2008. Vol. 78, No. 1. P. 574-575.

[9] Кельманов А.В., Пяткин А.В. Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т.15, №5. С. 25-40.

[10] Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009 (принята в печать).

[11] Гимади Э.Х., Пяткин А.В., Рыков И.А. О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножеств векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т.15, №6. С. 11-19.

[12] Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Рыков И.А. Задача выбора подмножества векторов с целочисленными координатами в евклидовом пространстве с максимальной нормой суммы // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т.15, №4. С. 31-43.

[13] http://math.nsc.ru/~serge/qpsl/

[14] Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, CA, 1979.

Информация об авторе

Александр Кельманов *– д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, проспект академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия; e-mail: kelm@math.nsc.ru*