

МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ НА ИЗБОРИ ЗА СТУДЕНТИ ОТ БАКАЛАВЪРСКА СТЕПЕН

н. с. Йорданка Горчева

Институт по математика и информатика при БАН
ул. „Акад. Георги Бончев“, бл. 8, София 1113
gorcheva@math.bas.bg

Резюме. Разглежда се проблемно-ориентиран подход за преподаване на класически методи за обработка на изборни резултати на студенти-бакалаври от широк кръг специалности. Математическото моделиране на разнообразни изборни ситуации от студентите и опитите им за собствена интерпретация на резултатите подобрява тяхната математическа и специална подготовка и развива креативността им.

Ключови думи: Математическо образование в бакалавърска степен, Математическо моделиране, Обработка на изборни резултати, Метод на Д'Ондт, Метод на Хеър-Ниймайер, Информационно общество

1. Увод

Сред характерните черти на съвременното информационно общество на преден план изпъкват натрупването на огромен обем от информация и знания ([1], с. 20). Машабът и интензивността на техния обмен са от безспорно значение за прогреса на човечеството. Наблюдават се обаче и случаи, в които за потенциалния потребител изобилието от информация се оказва равносилно на нейната липса. С такъв пример се сблъсках през 2009 г., две седмици след изборите за Европарламент. В желанието си да проверят разпределението на мандатите, група студенти-бакалаври поместиха на сайта на своя университет въпрос как от броя на подадените гласове за отделните партии да изчислят броя на полагащите им се места в Европарламента.

Публичността на значимата за обществото информация е важен критерий за неговата демократичност. В приведените пример законовата информация относно изборите за Европарламент бе изцяло достъпна за заинтересованите. Методът на Хеър-Ниймайер, официално утвърден за разпределението на мандатите, бе публикуван на страниците на Държавен вестник [2], на уебстраницата на Централната избирателна комисия за Европарламент*, а също и на някои специализирани юридически сайтове. Подобни примери показват, че празнини между налична информация и нуждаещи се от нея потребители все пак съществуват. Това са парадокси на информационното общество, чийто анализ може да разкрие добри практики за преодоляването им.

2. Математически аспекти на изборите и студентите-бакалаври

Въпросите, свързани с избори и резултатите от тях, привличат отдавна вниманието на българските математици. Безпрецедентен в историята на нова България е приносът на Иван Салабашев. На проведените през октомври 1879 избори за 10-членен Постоянен комитет при Областното събрание на Източна Румелия, с комбинаторни разсъждения Салабашев осъществява абсолютното мнозинство от 10 български депутати в комитета.

Математическите аспекти на изборите са обект на постоянен научен интерес у нас [3], [4]. Общественият им отзвук е причина световноизвестни учени да ги свързват тясно с демокрацията [5], [6]. Следователно може да се заключи, че разглеждането на основни положения от теория на игрите, теория на ранжировките, динамичното оптимизиране, методите за обработка на изборни резултати и пр. в бакалавърската степен на обучение осъвременява учебното съдържание и е адекватен отговор на нуждите на обществото.

3. Основни методи за разпределяне на парламентарни мандати у нас

През периода 1991–2005 г. обработката на резултатите от изборите за народни представители, кметове и общински съветници у нас се извършва с метода на Д'Ондт (метод на най-големите средни). След 5 последователни изборни кампании той е заменен с метода на Хеър-Ниймайер (метод на най-големия остатък). Тези два метода се използват широко в световната практика, поради което намират място и в курса *Класически и съвременни идеи в математиката***.

3.1. Методът на Д'Ондт изисква броя на гласовете, получени от всяка политическа партия или коалиция, да се дели последователно на 1, 2, 3 и т.н. След всяко деление получените частни се сравняват и партията с най-голямо частно получава мандат. Процесът продължава, докато се разпределят всички мандати. Ако на последния етап няколко партии се окажат с равни частни, между тях се тегли жребий.

3.2. Методът на Хеър-Ниймайер работи с т.нар. квота на Хеър, равна на броя на гласовете, необходими за получаването на един мандат. Тя се пресмята чрез разделяне на общия брой гласове, подадени за политическите партии, на общия брой места в избираения орган. В случай, че не е цяло число, квотата на Хеър според закона у нас се закръгля нагоре, до най-близкото цяло число ([2], чл. 5, ал. 2).

След това подадените за всяка партия гласове се разделят на квотата на Хеър. Получените частни са рационални числа, записани в десетичен вид. Цялата им част показва гарантирания брой мандати за съответните партии. Тяхната сума не надминава броя на местата в избиращия орган. Разпределянето на местата, останали незаети, се извършва чрез сравняване на десетичните части на частните (т. нар. *остатъци*). Партията с най-голям остатък получава първото незаето място, партията със следващия по големина остатък – следващото място и т. н., до изчерпване на местата. На последния етап от разпределянето може да се окаже, че оставащите мандати трябва се разпределят между няколко партии с равни остатъци. Ако броят на мандатите е по-малък от броя на партиите, се тегли жребий, за да се определи коя от тези партии ще получи мандат.

4. Математическо моделиране на избори

Математическото моделиране на избори е сред най-предпочитаните теми от студентите в курса *Класически и съвременни идеи в математиката*. Проблемно-ориентираният подход, дискусиите и тълкуването на резултатите неотменно присъстват в поднасянето на материала. Досадната за студентите изчислителна страна на методите на Д'Ондт и на Хеър-Ниймайер разяснявам с примери, в чиято формулировка има и лек хумор. Това интригува студентите и заостря вниманието им към съдържателната страна на методите:

Пример 1. В щата Биг Мама се провеждат избори за Доларпарламент. На щата се полагат 10 места. Изборните резултати се обработват по метода на Хеър-Ниймайер. За четирите политически партии в щата са подадени общо 1 000 000 гласа, чието разпределение е показано в **Табл. 1**:

	Партия К	Партия L	Партия М	Партия N
Брой подадени гласове	420 000	400 000	130 000	50 000

Табл. 1. Данни за разпределение на подадените гласове в **Пример 1**

А. Разпределете мандатите между партиите К, L, М и N по метода на Хеър-Ниймайер;

Б. Привърженици на метода на Д'Ондт в щата изразили становище, че разпределянето на мандатите по метода на Хеър-Ниймайер е изкривило вота на част от гласоподавателите. На основа на данните от **Табл. 1** изчислете разпределянето на мандатите по метода на Д'Ондт, сравнете го с това по метода на Хеър-Ниймайер и направете коментар.

Изчисленията по метода на Хеър-Ниймайер се оказаха лесни и дори приятни за аудиторията, но резултатите от тях (**Табл. 2**) предизвикаха оживени коментари: „Щом Партия N има 8 пъти по-малко гласове от Партия L, е честно тя да получи 8 пъти по-малко мандати от нея. С половин мандат не би трябвало да се влиза в Доларпарламента.“ В такъв смисъл, още преди да започнат изчисленията си по метода на Д'Ондт, студентите очакваха чрез него да получат „по-честно разпределение на мандатите“.

Квота на Хеър 100 000 гласа	Партия К	Партия L	Партия М	Партия N
Частно	4.2	4.0	1.3	0.5
Брой места по целите части	4	4	1	0
Остатъци	0.2	0.0	0.3	0.5
Допълнит. места според остат.	0	0	0	1
Окончателен брой места	4	4	1	1

Табл. 2. Разпределение на 10-те мандата в **Пример 1** по Хеър-Ниймайер

Целта на т. **Б** от **Пример 1** бе да покаже, от една страна, особеността на метода на Д'Ондт леко да толерира големите партии (**Табл. 3**), а от друга – да направи изчисленията по-привлекателни. В практиката ми на преподаване на метода на Д'Ондт студентите винаги са ме питали: „Защо делим началния брой гласове последователно на 2, 3, 4 и т.н., а не резултата от предходното деление?“. Сполучлива аналогия за разбиране на същността на този алгоритъм е на гласовете за съответната партия да се гледа като на неин паричен капитал, с който тя, в конкуренция с останалите партии, наддава за мандати ([7], с. 79). Последното частно, с което партията е взела мандат, е цената, която тя е „платила“ за всяко от своите места в парламента. Този икономически подход към разпределянето на местата допадна на студентите и те спряха да „забравят“ кой ред от таблицата трябва да делят на 3, 4 и т. н.

Последоват. делител.	Партия К	Партия L	Партия М	Партия N
1	420 000 (1)	400 000 (2)	130 000 (7)	50 000

2	210 000 (3)	200 000 (4)	65 000	
3	140 000 (5)	133 334 (6)		
4	105 000 (8)	100 000 (9)		
5	84 000 (10)	80 000		
Брой места по Д'Ондт	5	4	1	0
Бр. места по Х.-Н.	4	4	1	1

Табл. 3. Разпределение на 10-те мандата в **Пример 1** по Д'Ондт

Сравнението на резултатите от двата метода показва на студентите, че методът на Хеър-Ниймайер е толерирал партията с най-малко подадени гласове. Това се обяснява с най-големия остатък, който тя има сред четирите

партии. На практика се оказва, че 5% от гласоподавателите са „усвоили“ 10% от местата в Доларпарламента. Коментарът на студентите по случая бе: „Не може да се отнеме мандат от Партия N, ако е нямало нарушения. При това положение, за да бъдат мандатите пропорционални на вота, Партия L трябва да получи 8 места, поне толкова и Партия K и пр. Толкова мандати няма. А д'онтистите да не възразяват, резултатите са доста близки.“

Чрез следващия пример илюстрирах на студентите ситуация, при която за разпределянето на мандатите се налага теглене на жребий:

Пример 2. В щата Биг Мама се провеждат избори за 10-местен Щатски съвет. Обработката на резултатите се извършва по метода на Хеър-Ниймайер. Подадени са общо 1 000 000 гласа, разпределени между четири политически партии, както е показано в **Табл. 4**:

	Партия K	Партия L	Партия M	Партия N
Брой подадени гласове	430 000	410 000	130 000	30 000

Табл. 4. Данни за разпределение на подадените гласове в **Пример 2**

A. Разпределете мандатите между партиите K, L, M и N;

B. Предложете начин Партия N да увеличи представителството си в съвета.

Пресмятането на мандатите по метода на Хеър-Ниймайер доведе до резултата, показан в **Табл. 5**: на Партия K се гарантират 4 мандата, на Партия L – 4 мандата и на Партия M – 1 мандат. Остава 1 мандат за разпределяне между три партии с равни остатъци – K, M и N. Коя от тях ще го получи, се определя чрез теглене на жребий.

Квота на Хеър 100 000 гласа	Партия K	Партия L	Партия M	Партия N
Частно	4.3	4.1	1.3	0.3
Брой места по целите части	4	4	1	0
Остатъци	0.3	0.1	0.3	0.3
Допълнит. места според остат.	жребий	0	жребий	жребий

Табл. 5. Разпределение на 10-те мандата в **Пример 2** по Хеър-Ниймайер

Педагогическата цел на т. **B** от **Пример 2** бе да накара студентите да се абстрахират от възможността Партия N да спечели жребия и проявявайки креативност и политическо мислене, да предложат решение в нейна полза. Никой от присъстващите обаче не съобрази, че един начин интересите на Партия N да бъдат непосредствено представени в Щатския съвет е участието ѝ в коалиция с други партии. И въпреки че политически коалиции между партии се създават на базата на внимателни социологически проучвания, политически консултации и компромиси, една хипотетична коалиция между партиите M и N би довела до следното разпределение на мандатите (**Табл. 6**):

Квота на Хеър 100 000 гласа	Партия K	Партия L	Коалиция M U N
Частно	4.3	4.1	1.6
Брой места по целите части	4	4	1
Остатъци	0.3	0.1	0.6
Допълнит. места според остат.	0	0	1
Окончателен брой места	4	4	2

Табл. 6. Разпределение на 10-те мандата в **Пример 2** при коалиране на М и N

Идеята за коалиции между партиите вдъхнови студентите да разгледат и други възможни комбинации, моделирайки по този начин ролята на малките партии в политическото пространство и интереса на по-големите партии към партньорство с тях.

Анализът на показания в **Табл. 5** математически модел поведе мислите на студентите и в друга посока. Те разсъждаваха, че „вероятността Партия N да спечели жребия е $1/3$, но не бива да се игнорира и възможността да бъде отпуснат един допълнителен мандат. С това вероятността Партия N да получи мандат скача двойно: от $1/3$ на $2/3$. А ако бъдат отпуснати два нови мандата, всяка партия, участваща в жребия, ще получи по един мандат.”

Такъв подход обаче бе в разрез с идеята за пропорционалното разпределяне на гласовете. Студентите бяха пропуснали да съобразят, че увеличаването на броя на мандатите изисква преизчисляване на избирателната квота. За 11 на брой мандати тя е 90 910 гласа, а не 100 000.

Разпределението на 11-те мандата по метода на Хеър-Ниймайер е показано в **Табл. 7**. То убеди студентите, че ситуация за жребий вече няма. Те със съжаление отбелязаха, че няма и пропорционалност между подадените гласове за партиите L и M и броя на получените от тях мандати.

Квота на Хеър 90 910 гласа	Партия К	Партия L	Партия М	Партия N
Частно	4.73	4.51	1.43	0.33
Брой места по целите части	4	4	1	0
Остатъци	0.73	0.51	0.43	0.33
Допълнит. места според остат.	1	1	0	0
Окончателен брой места	5	5	1	0

Табл. 7. Разпределение на 11-те мандата в **Пример 2** по Хеър-Ниймайер

5. Изборни парадокси

В изборната практика са регистрирани случаи, когато увеличаването на общия брой мандати води до намаляване на броя на мандатите, получени от някоя от партиите-участнички. Сред тях известен е т. нар. *Alabama paradox****. Този факт се стори толкова нелогичен на студентите, че те упорито отказваха да приемат истинността му. За да им дам възможност да се убедят сами в „лошите шегги“ на метода на Хеър-Ниймайер, за вече познатите им партии К, L, M и N конструирах следното разпределение на гласовете:

Пример 3. При предишните избори за 10-членния Съвет на щата Биг Мама също били подадени 1 000 000 гласа. Те били разпределени между четирите партии К, L, M и N, както е показано в **Табл. 8**:

	Партия К	Партия L	Партия М	Партия N
Брой подадени гласове	420 000	340 000	145 000	95 000

Табл. 8. Данни за разпределение на подадените гласове в **Пример 3**

За пресмятане на мандатите се използвал методът на Хеър-Ниймайер. След като 10-те мандата били разпределени, политиците от Партия L подали възражение. Те считали, че тъй като Партия L имала около 2 пъти повече гласове от Партия M, толкова пъти повече трябвало да бъдат и мандатите ѝ. В отговор, Конституционният съд на щата отпуснал един допълнителен мандат и наредил преразпределяне на подадените гласове.

А. Разпределете 10-те мандата за Щатския съвет и преценете основателно ли е било възражението на Партия L;

Б. Разпределете 11-те мандата за Щатския съвет и преценете удовлетворени ли са исканията на Партия L.

Обработката на данните доведе до резултатите, показани в **Табл. 9** и **10**. Сравнявайки ги, студентите забелязаха, че в 11-членния съвет партиите M и N са оцетени. В него те имат с по 1 мандат по-малко, отколкото в 10-членния.

Квота на Хеър 100 000 гласа	Партия К	Партия L	Партия М	Партия N
Частно	4.2	3.4	1.45	0.95
Брой места по целите части	4	3	1	0
Остатъци	0.2	0.4	0.45	0.95
Допълнит. места според остат.	0	0	1	1

Окончателен брой места	4	3	2	1
------------------------	---	---	---	---

Табл. 9. Разпределение на 10-те мандата в *Пример 3* по Хеър-Ниймайер

Пропорционалността в представянето на партиите L и M в 11-мандатния съвет се оказва още по-силно изкривена, отколкото в 10-мандатния му вариант. Облаготетелствана е Партия L. Тя вече има 4 пъти повече мандата от Партия M при съотношение на гласовете им 2:1.

Квота на Хеър 90 910 гласа	Партия K	Партия L	Партия M	Партия N
Частно	4.62	3.74	1.59	1.04
Брой места по целите части	4	3	1	1
Остатъци	0.62	0.74	0.59	0.04
Допълнит. места според остат.	1	1	0	0
Окончателен брой места	5	4	1	1

Табл. 10. Разпределение на 11-те мандата в *Пример 3* по Хеър-Ниймайер

Изтъкнатите недостатъци на метода на Хеър-Ниймайер се проявяват, макар и рядко, и в реалната изборна практика. Обстойното им дискутиране в клас цели не да омаловажи достойнствата му, а да развие математическото мислене на студентите. Така те сами ще могат да преценят, че от методите за обработка на изборни резултати не бива да се очаква да бъдат идеални.

6. Заключение бележки

Изборите в съвременното общество са тест за неговата демократичност. Същевременно, те са тест и за математическата грамотност на членовете му. Разкриването на логически връзки в поднасяната информация, критичното възприемане на числовите данни, умението за съставяне на елементарни математически модели, наред с основните математически знания, са част от математическата култура на обществото. Стъпка напред за нейното развитие е изложеният тук подход към преподаването на математически идеи в бакалавърската степен на обучение. Той спомага за изграждането на математическо мислене, знания и умения у бъдещите специалисти, с чиято помощ те успешно да се справят с огромния обем информация или компенсират на празнините в нея.

Литература

- [1] Геров, А., Е. Гурова. Информационно общество и 21 век. София, IDG – България, 2000. ISBN 954-90649-1-3.
- [2] Централна избирателна комисия за избиране на членове на Европейския парламент от Република България. Решение № ЕП-9 от 6 април 2009. Методика за определяне на резултатите от гласуването за членове на Европейския парламент от Република България. София, Държавен вестник, бр. 27 от 10 април 2009, 124–128. ISSN 0205-0900.
- [3] Ivanov, K., N. Kirov, N. Yanev. Optimal regional allocation of party mandates in the 40th National Assembly. Mathematics and Education in Mathematics, 2006, 35, 70–81. Sofia, UBM, 2006. ISBN 978-954-8880-23-7.
- [4] Konstantinov, M. Mathematical aspects of electoral systems. Proc. Amer. Inst. Phys., 2007, CP 946, 55–66.
- [5] Brams, S. J. Mathematics and democracy: designing better voting and fair-division procedures. Princeton, NJ, Princeton University Press, 2007. ISBN 978-0-691-13321-8, 390 p.
- [6] Steen, L. A. (ed.) Mathematics and democracy: the case for quantitative literacy. USA, NCED, 2001. ISBN 0-9709547-0-0, 121 p.
- [7] Mudambi, R., P. Navarra, G. Sobbrino. Rules, choice and strategy: the political economy of Italian electoral reform. Northampton, MA, Edward Elgar Publishing, 2001. ISBN 978-1840646009, 192 p.

Бележки

* Централна избирателна комисия за избиране на членове на Европейския парламент от Република България. <http://www.cikep2009.eu/> (последен достъп 30 април 2010)

** Курса *Класически и съвременни идеи в математиката* преподавам на студенти в бакалавърска степен на обучение в Нов Български университет в София.

*** През 1880 г. висшият американски чиновник *C. W. Seaton* пресмята, че ако Камарата на представителите на САЩ се състои от 299 места, от тях на щата Алабама се полагат 8. Ако обаче Камарата има 300 места, щатът Алабама ще получи само 7.