МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2010
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2010
Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Albena, April 6–10, 2010

ВЪРХУ ДВА ПОДХОДА ЗА ПРЕПОДАВАНЕ НА ПОНЯТИЯТА В КУРСА ПО КОМПЮТЪРНА ТОПОЛОГИЯ

Калин Георгиев, Димитрина Ставрова*

Излагаме два подхода за запознаване на студентите с топологични понятия в курса по компютърна топология, като даваме конкретни примери и анализираме тяхното усвояване, контролирано чрез тестове с избираем отговор. Единият подход е интуитивното формиране на понятията, разглеждане на конкретни примери, обсъждане на общите им и забележителни свойства, последвано от абстрактна дефиниция. Другият е, наложилият се от модела "Бурбаки" подход – първо се дава абстрактната дефиниция, а после се разглеждат конкретни примери.

1. Въведение. В тази работа споделяме част от нашия петгодишен опит при преподаване на курса по Компютърна топология във Факултета по математика и информатика на Софийския Университет "Св. Климент Охридски". Този курс се води от 2006-та година и е основан на материала, изложен в [1]–[3].

Курсът включва запознаване с основни топологични понятия и резултати, от общата и най-вече от алгебричната топология, и директните им приложения за създаване и подобряване на алгоритми за възстановяване и анализ на дигитални образи. Тези приложение се използват в биологията (например генериране и анализ на модели на протеинови структури, проблеми с изследване на онаследяване на белези), медицината (образна медицинска диагностика), географията (създаване на географски системи, ландшафтни модели и др.), създаване и анализ на сензорни мрежи и други. Основните теми на курса включват запознаване с: основните понятия на общата топология (околност, вътрешност, затворена обвивка, граница, метрични пространства, Евклидови пространства, методи за задаване на топология) и основни понятия и резултати от геометричната и алгебрична топология (2- и 3-повърхнини, Ойлерова характеристика, триангулация, симплициални комплекси, хомотопия, хомология, числа на Бети, хомологични комплекси).

Топологията, като една основна теоретична математическа дисциплина (наред с анализа и алгебрата), традиционно се преподава по строг аналитичен начин. Това изисква самият характер на предмета, както и необходимостта от строги понятия и доказателства на теоремите и фактите. Но предметът *Компютърна топология* се

*Работа е подкрепена от договор 173/09 с Фонд Научни изследвания на Софийския Университет.

преподава едносеместриално, с хорариум $2+0+1$ на студенти от втори курс от специалността *информатика.* Това ни изправя пред евентуалния избор да употребим преобладаващата част от времето за строгото изложение на понятията и резултатите, а впоследствие бегло да споменем по един повече или по-малко декларативен начин, че те намират голямо и широко приложение (не само в самата математика, но и в практиката, за решаване на конкретни практически задачи). Известно е, че студентите гледат с недоверие на подобни декларации и често ги считат за "оправдание" за преподаването на съответната дисциплина. През първите години на курса към някои от понятията се подхождаше интуитивно, докато други се въвеждаха по стандартния абстрактен начин. Опитът показа, че той води до по-големи трудности в разбирането и усвояването им.

За това, впоследствие, ние избрахме подхода на запознаване с понятията и резултатите в тяхната конкретна форма и приложение, последвано от формулирането им в строг математически вид и директно преминаване към прилагането им върху конкретни практически задачи. Един такъв подход неминуемо жертва строгостта и пълнотата на изложението, но от друга страна води до едно по-дълбоко разбиране на материала, до възможността му за прилагане в практиката, а и от там буди интерес и към останалата, строга част на топологията и подтиква студентите към разширеното ѝ по-нататъшно изучаване в традиционни курсове. Курсът е придружен от компютърни упражнения, в които студентите разработват и защитават конкретни курсове проекти за писане на код за генериране на топологични обекти, изучавани в лекциите.

2. Разглеждани основни топологични понятия. За определеност ще се спрем върху понятия като *вътрешност, граница, затворена обвивка.* Първо да дадем формалните дефиниции, а после ще опишем подхода на изграждане на понятията, участващи в тях, който ние сме приложили:

Дефиниция 1. *Ако X е дадено множество, а T е фамилия от негови подмножества, наричаме T топология върху X, а двойката (X,T) – топологично пространство, ако:*

1) *Празното множество и цялото множество принадлежат на T.*
2) *Сечението на две множества от T принадлежи на T.*
3) *Обединението на произволен брой елементи на T е елемент на T.*

Елементите на фамилията T се наричат *отворени подмножества на X*, а техните допълнения – *затворени подмножества на X*.

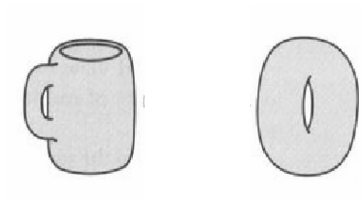
Дефиниция 2. *Околност на една точка x от X наричаме всяко отворено множество, което я съдържа.*

Дефиниция 3. *Вътрешност на едно подмножество A на X наричаме обединението на всички отворени множества, съдържащи се в A, и я означаваме с $\operatorname{Int} A$. Ясно е, че $\operatorname{Int} A$ е отворено множество. Точка от вътрешността на A наричаме негова вътрешна точка.*

Дефиниция 4. *Затворена обвивка на едно подмножество A на X наричаме сечението на всички затворени подмножества на X, съдържащи A, и я означаваме с $\operatorname{Cl} A$. Ясно че, $\operatorname{Cl} A$ е затворено множество. Еквивалентно, $\operatorname{Cl} A$ са онези точки от X, всяка околност на които пресича X.*

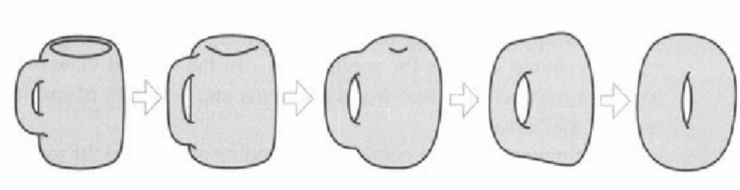
Дефиниция 5.Граница на едно множество A се нарича множеството $\mathrm{Cl}\, A \backslash \mathrm{Int}\, A$ и се означава с $\mathrm{Bndr}\, A$. Еквивалентно, $\mathrm{Bndr}\, A$ се състои от онези точки на X, всяка околност на които сече както A, така и неговото допълнение. Точките от $\mathrm{Bndr}\, A$ се наричат гранични точки на A. Също така отбелязаваме, че $A \cup \mathrm{Bndr}\, A = \mathrm{Cl}\, A$.

3. Въвеждане на понятията и запознаване с основни топологични факти. Въвеждането на понятията естествено е предхождано от една подробна мотивировка на необходимостта от изучаването както на предмета като цяло, така и на точно тези конкретни понятия. За да провокираме интуицията започваме с един неочакван, конкретен въпрос, който да предизвиква въображението и на пръв поглед противоречи на интуицията и установени предишни представи: Може ли (ако считаме, че са направени от достатъчно разтеглив материал) предметите, изобразени на фигура 1, да се преобразуват един в друг по непрекъснат начин (т.е. без да ги разрязваме, пробиваме дупки в тях, чупим и пр.)



Фиг. 1

С други думи, можем ли да преобразуваме чашката за кафе в геврек – една дотолкова стандартна и типична топологична задача, че доста често се определя тополога като е човек, който не може да различи геврека от чашката за кафе. Една естествена и най-често срещана реакция е, че това не може да стане. Но тук въвеждаме и запознаването с един от най-важните елементи на топологията – непрекъснатата трансформация. Демонстрира се филмче, което показва, че това всъщност е възможно, а после се фиксират и последователни характерни стъпки на една такава трансформация:



Фиг. 2

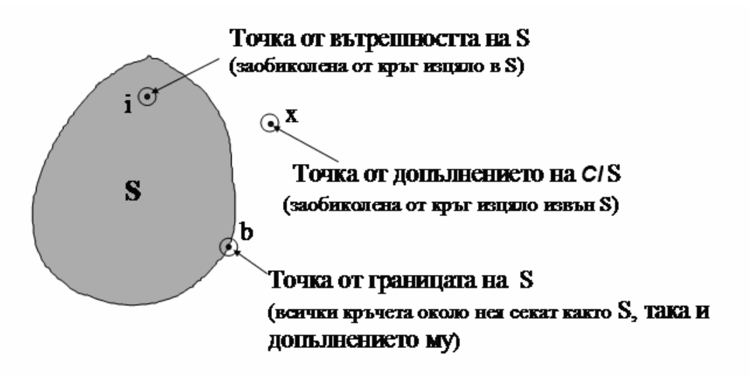
Ето защо, от топологична гледна точка тези два обекта наричаме *еквивалентни* или *неразличими.*

Демонстрират се и други провокиращи въображението видео-филми, които показват как почти всички прочути женски образи в изкуството могат да бъдат непрекъснато трансформирани един в друг.

Това по естествен начин възбужда интереса "как" всичко това може да бъде извършено по "математичен" начин, мотивира и подготвя студентите за разглеждане на топологични понятия и резултати.

Като използваме образите на понятията за *вътрешен*, *външен* и *граничен*, в съзнанието на студента, формирани от употребата им във всекидневния живот или в предишни строги математически курсове (като Математически анализ), акцентираме върху евентуална интерпретация на тези понятия по отношение на едно множество в равнината, като разглеждаме следния конкретен случай:

Пример 1. Вътрешна и гранична точка за дадено множество:

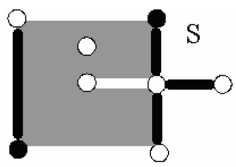


Фиг. 3

Обръщаме внимание на значението на кръгчето като топологична околност на дадената точка и неговото взаимоотношение с множеството (съдържа се във или лежи "далече" от него). Подчертаваме, че при Евклидовата топология в равнината отвореното кръгче е една от възможните околности на дадена точка.

После надграждаме идеята от ниво "точка" до ниво "съвкупност от такива точки":

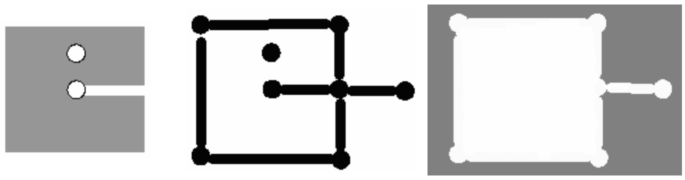
Пример 2. Нека A е множеството, изобразено на Фиг. 4.



Фиг. 4

Задаваме въпросите за това множество каква би била съвкупността на точките, за които: 1) има околност, лежаща вътре в множеството; 2) във всяка тяхна околност има точки както от множеството, така и от неговото допълнение и 3) какво характеризира точките, лежащи извън обединението на множествата, определени от 1) и 2)?

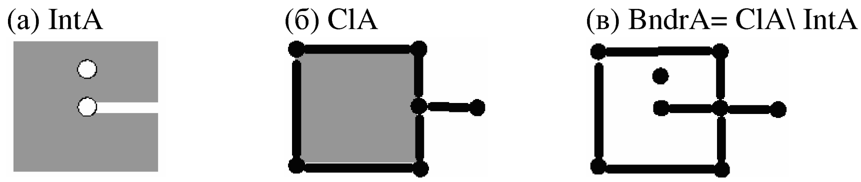
И стигаме до следната визуализация за отговорите:



Фиг. 5

Сега вече можем да дадем точните дефиниции за *вътрешност*, *затворена обвивка* и *граница* и да коментираме относно същото множество кои точно са тези множества в конктретния случай.

Пример 3. Множество, неговата затворена обвивка и неговото отворено ядро.



Фиг. 6

Следват два по-аналитични примера за тези понятия:

Пример 4. Нека $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{1-1/2, 1-1/3, 1-1/4, \ldots, 1-1/n, \ldots\}$. Намерете затворената обвивка на A в Евклидовата топология върху реалната права.

Имаме следните естествени кандидати за отговор:

а) затвореният интервал [0,1]

б) $\{0\} \cup \{1\}$

в) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{1-1/2, 1-1/3, 1-1/4, \ldots, 1-1/n, \ldots\} \cup \{0\} \cup \{1\}$.

Коментираме защо а) и б) не могат да бъдат отговор и доказваме строго, че в) е правилният отговор.

Пример 5. Нека (a, b) е произволен отворен подинтервал на реалната права. Кои са неговата вътрешност, затворена обвивка и граница?

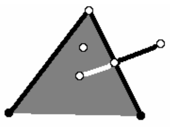
Даваме и не дотам интуитивни примери като:

Пример 6. Разглеждаме *кокрайната топология* в равнината (отворени при нея са подмножествата на равнината, чиито допълнения са крайни множества) и идентифицираме някои типични отворени в нея множества.

Коментираме какво представляват границата, вътрешността и затворената обвивка на тези множества. Стигаме до извода, че вътрешността и затворената обвивка на множествата могат да бъдат празни, да са цялото пространство или множества, свързани с даденото множество.

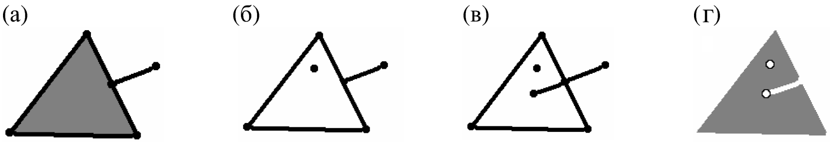
4. Типични тестови задачи и мотивировката им. Ще се спрем на някои типични тестови задачи:

Задача 1. Нека A е множеството:



Границата на A е:

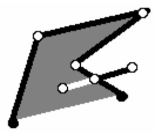
(а) (б) (в) (г)



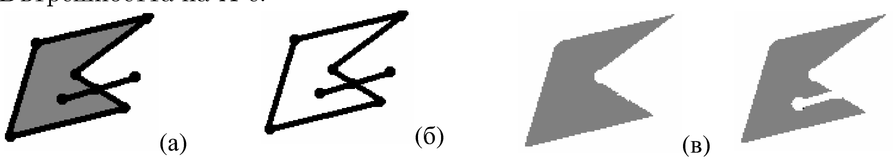
Тук идеята е да се добави като неверен отговор множество, “приличащо” на границата. Подобни множества като при останалите отговори са вече обсъждани на лекции и упражнения и верният отговор може да бъде лесно получен чрез съпоставяне на научен материал или пък с конкретно прилагане на дефиницията.

Аналогични въпроси могат да се зададат и за останалите понятия, например:

Задача 2. Нека A е множеството:

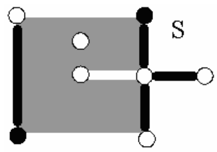


Вътрешността на A е:



От леко по-различен характер е следната:

Задача 3. Нека A е множеството



A е: (а) отворено; (б) затворено; (в) нито отворено, нито затворено; (г) отворено-затворено.

Тя изиква паралелно разглеждане и на двете понятия. Ако множеството в Задача 3 вече е било разглеждано в някоя от предишните задачи (макар и с друг въпрос), то това облекчава нейния отговор.

Следните две задачи са вече от по-теоретичен характер.

Задача 4. Нека $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{1+1/2, 1+1/3, 1+1/4, \ldots, 1+1/n, \ldots\}$. Затворената обвивка на A е:

(а) затвореният интервал $[0, 3/2]$;

(б) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{1+1/2, 1+1/3, 1+1/4, \ldots, 1+1/n, \ldots\} \cup \{0\} U \{1\}$;
(в) $\{0\} \cup \{1\}$.

Задача 5. Нека върху множеството X е зададена топологията $\{X, A, B, \emptyset\}$, където A и B са собствени подмножества на X. Кое от следните НЕ може да е вярно:

(а) $A = X \backslash B$ или $B = X \backslash A$	(б) $A \subset B$ или $B \subset A$	(в) $A \cap B = \emptyset$	(г) $A \cap B \neq \emptyset, A, B$

Подобна на Задача 4 е обсъждана в клас, а решението на задача 5 изисква разбирането на структурата на топологията (кои подмножества могат да влизат в нея и кои – не).

5. Резултати от теста и изводи. Като правило преобладаващата част от студентите се справят много добре на визуалния тип задачи (като 1 и 2).

Малко по-голямо затруднение предизвикват задачите от тип 3, особено ако не са предхождани от задачи, базирани на същото (даже не на подобно) множество. Ако са предхождани, успеваемостта е същата както на задачи от тип 1 и 2; ако не са предхождани, тя е с около 30% по-ниска.

Задачи от тип 5 вече са определено преизвикателство, независимо че на практика решението им е разглеждано на лекции. Тук отговорът изисква едно непрекъснато съпоставяне с дефиницията на топология и нейните основни моменти.

Задачи от тип 4 се оказват най-трудни за студентите, независимо, че на практика подобни задачи се разглеждат и решават подробно на лекции. Това се дължи според нас преди всичко на абстрактната аналитична формулировка. Онези студенти, които имат създадени навици за визуализация като правило се справят по-добре, защото те визуализират множеството върху реалната права и от там съобразяват отговора. Но се срещат такива, които дори и при правилна визуализация се затрудняват да дадат верния отговор.

За сравнение същите тестове са проведени и в курс по Обща топология, където материала се излага традиционно аналитично. Средната успеваемост на студентите е под 50% независимо за кои от типовете задачи се отнася.

В заключение можем да кажем, че при преподаването на материя, допускаща индуктивно, интуитивно въвеждане на основните понятия и твърдения, този метод е за предпочитане пред аналитично-теоретичния. Такъв подход води до по-дълбоко разбиране на понятията и тяхното усвояване, а впоследствие и до боравенето с тях в останалата част на материала.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Afra J. Zomorodian. Topology for Computing. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2005.

[2] Colin Adams, Robert Franzosa. Introduction to Topology – Pure and Applied. Pearson Prentice Hall, 2008.

[3] Jeffrey Weeks. The Shape of Space. CRC, 2nd edition, 2001.

Калин Георгиев
Димитрина Ставрова
Факултет по математика и информатика
Софийски университет "Св. Климент Охридски"
e-mail: kalin@fmi.uni-sofia.bg
e-mail: Stavrova@fmi.uni-sofia.bg

TWO APPROACHES FOR INTRODUCING NOTIONS IN A COURSE OF COMPUTATIONAL TOPOLOGY

Kalin Georgiev, Dimitrina Stavrova

We consider two approaches for introducing topological notions in a course of Computational Topology. One is an intuitive inductive introduction of a notion; the other is theoretical-analytical one. As an example we treat the notions of *interior*, *closure* and *boundary of a set* in a topological space. We analyze several visual representations as well as analytical ones. Examples of tests and quiz problems are considered. Comparisons of student's achievement on different type of problems are presented.