PLISKA

STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ СО СПРЯМЛЯЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ

Г. Ц. ТУМАРКИН

В работе распространяются известные результаты Берлинга об инвариантных подпространствах оператора сдвига на инвариатные подпространства оператора S умножения на ζ в пространствах E_p, $p>0$, граничных значений функций $f(z)$, принадлежащих классам $E_p(G)$ В. И. Смирнова в областях G со спрямляемой границей γ. При этом оказывается, что структура инвариантных пространств оператора S в E_p оказывается аналогичной ранее отмечавшейся в пространствах H_p. Соответствующие подпространства имеют вид $I.E_p$, где $I(z)$ — внутренняя (по терминологии Бёрлинга) функция в G ($|I(z)|\leq 1$ в G, $|I(\zeta)|=1$ почти всюду на γ).

Однако характеристические признаки циклических (воспроизводящих) элементов оператора S в пространствах E_p в произвольных областях оказываются по форме отличными от того, что было в пространствах H_p. Такие элементы $f(\zeta)$ имеют параметрическое представление вида $f(z)=e^{i\alpha}\frac{Q_f(z)}{I^*(z)}$, где $Q_f(z)$ — внешняя функция, а $I^*(z)$ — внутренняя функция, зависящая только от области G и сводящаяся к константе $I^*(z)=1$ только в областях класса В. И. Смирнова.

Далее исследуются инвариантные подпространства оператора S^*, сопряженного к S в пространстве E_2. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы $f(\zeta)\in E_2$ являлось нециклическим элементом оператора S^* в E_2. Эти условия заключаются в том, что функция $\overline{f(\zeta)\,e^{it}}$, где t — угол наклона касательной в точке ζ к кривой γ, является угловым граничным значением мероморфной в области G функции с ограниченной неванлинновской характеристикой.

1. Инвариантные подпространства оператора сдвига. Приведем хорошо известные определения и результаты об операторе сдвига.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{l_n\}$, $n=0, 1, 2, \dots$. Оператор сдвига S на H задается формулами

$$Sl_n=l_{n+1}, \quad n=0,\ 1,\ 2, \dots .$$

Бёрлингу удалось впервые описать инвариантные подпространства $M\subset H$ относительно S, т. е. такие M, что $SM\subset M$. Можно отождествить H с пространством H_2 Харди, состоящим из граничных значений $F(e^{i\theta})$ аналитических в круге $|w|<1$ функций $F(w)$, для которых

$$\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2\, d\theta \leq C<\infty, \quad 0<r<1.$$

Как известно, каждая функция $F(z) \in H_2$ имеет почти всюду на $|w|=1$ угловые граничные значения $F(e^{i\theta}) \in L_2$. При этом комплексный ряд Фурье таких функций имеет вид

$$(1) \qquad F(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Здесь C_n являются коэффициентами разложения аналитической функции $F(w)$ в ряд Тейлора

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n.$$

Сходимость ряда Фурье (1) гарантирована не только в среднем, как это следует из равенства Парсеваля, но также по известному результату Карлесона и почти всюду.

Рассмотрим отображение гильбертова пространства с базисом $\{l_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, изометрически на пространство функций, суммируемых на $|w|=1$ в степени $p=2$, так, чтобы l_n соответствовало $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$. Тогда образом H будет пространство H_2, а оператору сдвига S будет соответствовать в H_2 оператор умножения на $e^{i\theta}$. Таким образом оператор сдвига S сводится в пространстве H_2 к оператору умножения на w функций $f(w) \in H_2$: $Sf = wf(w)$.

Теорема 1. (Бёрлинг). *Пусть M-подпространство в H_2, инвариантное относительно S. Тогда, если $M \neq \{0\}$, то существует внутренняя функция $I(w)$: $|I(w)| \leq 1$ при $|w| < 1$, $|I(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду такая, что $M = IH_2$, где*

$$(2) \qquad IH_2 = \{If : f \in H_2\}.$$

Внутренняя функция $I(w)$, соответствующая инвариантному подпространству M, единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$. Обратно, всякое подпространство вида (2) является замкнутым и инвариантным относительно оператора S.

Приведем формулировки теорем, дающих распространение результатов Бёрлинга о структуре инвариантных подпространств оператора сдвига в пространствах L_2 и H_2 (случай $p=2$) на произвольные $p>0$. Распространение теоремы Бёрлинга на $p>0$ было дано Сриниваном и Вангом.

Теорема 2. *Всякое замкнутое инвариантное относительно умножения на $e^{i\theta}$ подпространство $E \subset L_p$ имеет следующий вид:*

1) *в случае, когда $e^{i\theta}E = E$, тогда $E = \chi_A L_p$, где χ_A — характеристическая функция некоторого множества A на $|w|=1$.*

2) *в случае, когда $e^{i\theta}E \subset E$ (включение строгое), тогда $E = \omega H_p$, где $|\omega(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду на $|w|=1$, H_p — пространство граничных значений аналитических в $|w|<1$ функций из обозначаемого той же буквой пространства Харди.*

Из этой теоремы немедленно получается описание замкнутых инвариантных подпространств оператора сдвига в пространствах H_p.

Теорема 3. *Произвольное непустое, замкнутое, инвариантное относительно умножения на $e^{i\theta}$ подпространство $E \subseteq H_p$ имеет вид $E = IH_p$, где $I(e^{i\theta})$ — граничные значения внутренней функции $I(w)$,* ($|I(w)| \leq 1$ при $|w| < 1$ *и* $|I(e^{i\theta})| = 1$ *почти всюду*).

Сформулированные в п. 1 теоремы в п. 2 легко переносятся с $|w|=1$ на замкнутые спрямляемые жордановы кривые γ. При этом вместо пространства H_p берутся пространства E_p, состоящие из граничных значений $f(\zeta)$ функций $f(z)$ из класса В. И. Смирнова $E_p(G)$, $(\gamma=\partial G)$. Вместо умножения на $e^{i\theta}$ рассматривается умножение на ζ.

2. Инвариантные подпространства оператора умножения на ζ в пространствах граничных значений аналитических функций в областях со спрямляемой границей. Теорема Бёрлинга дает описание инвариантных подпространств оператора умножения на $e^{i\theta}$ в пространстве граничных значений аналитических в единичном круге функций класса H_2. При переходе к произвольной односвязной области G с жордановой спрямляемой границей γ естественным аналогом классов H_p в круге являются классы E_p В. И. Смирнова, важные свойства которых были установлены М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым. Напомним известное определение этих классов: (см., напр., [2, 8]) $f(z)\in E_p(G)$, если существует последовательность жордановых спрямляемых контуров $\gamma_n\subset G$, $\gamma_n\to\gamma$, таких, что

$$\int_{\gamma_n}|f(z)|^p\,|dz|\le C,\quad n=1,\,2,\,\ldots .$$

Функции $f(z)$ класса E_p имеют почти всюду на γ угловые граничные значения $f(\zeta)\in L_p(\gamma)$. Вместо умножения на $e^{i\theta}$ в случае единичной окружности при переходе к пространствам граничных значений на γ функций класса E_p естественно рассматривать умножение на ζ.

Теорема 4. *Всякое замкнутое инвариантное подпространство $E\subseteq E_p$, такое, что $\zeta E\subseteq E$ (не сводящееся к тривиальному $E=\{0\}$) имеет вид $E=IE_p$, где $I(\zeta)$ — граничные значения внутренней функции $I(z)$, $|I(z)|\le 1$ в G, $|I(\zeta)|=1$ почти всюду на γ.*

Доказательство может быть получено, используя хорошо известный факт, что при конформном отображении $z=\varphi(w)$, $(w=\psi(z))$ области G на круг $|w|<1$ соответствие

$$f(z)\in E_p\leftrightarrow f[\varphi(w)]\sqrt[p]{\varphi'(w)}\in H_p$$

является изометрическим отображением пространств граничных значений аналитических функций соответствующих классов.

Пусть E — замкнутое, инвариантное относительно умножения на ζ подпространство E_p. Обозначим через $\widetilde{E}$ подмножество H_p, состоящее из всех функций вида

$$\widetilde{E}=\{f[\varphi(\xi)]\sqrt[p]{\varphi'(\xi)}\},\quad \text{где } f(\zeta)\in E.$$

Тогда $\widetilde{E}$ — замкнутое подпространство пространства H_p, инвариантное относительно умножения на $\varphi(\xi)$. Используя уже отмечавшиеся результаты, можно тогда сразу проверить, что подпространство $\widetilde{E}$ является также инвариантным подпространством H_p относительно умножения на $\xi=e^{i\theta}$. Действительно, взяв $f\in E$ и последовательность $\{\Pi_k(\zeta)\}$ многочленов от ζ, равномерно сходящихся на γ к функции $\psi(\zeta)$, мы имеем при достаточно больших $k>K$:

$$\int_0^{2\pi}\left|\xi f[\varphi(\xi)]\sqrt[p]{\varphi'(\xi)}-\Pi_k[\varphi(\xi)]f[\varphi(\xi)]\sqrt[p]{\varphi'(\xi)}\right|^p|d\xi|$$

$$=\int_\gamma|\psi(\zeta)f(\zeta)-\Pi_k(\zeta)f(\zeta)|^p\,|d\zeta|=\int_\gamma|\psi(\zeta)-\Pi_k(\zeta)|^p\,|f(\zeta)|^p\,|d\zeta|\le\varepsilon^p\int_\gamma|f(\zeta)|^p\,|d\zeta|.$$

Тем самым мы сумеем убедиться в инвариантности $\widetilde{E}\subset H_p$ относительно умножения на $\xi=e^{i\theta}$. Применим далее цитированную в п. 1 теорему Бёрлинга об инвариантных подпространствах H_p. Мы убеждаемся в существовании внутренней функции $\widetilde{I}(w)$, такой, что $\widetilde{E}=\widetilde{I}H_p$. После этого надо учесть, что при конформном отображении $z=\varphi(w)$ круга $|w|<1$ на G всем функциям $F(w)$ класса H_p будут соответствовать $F(w)\to F[\psi(z)]\sqrt[p]{\psi'(z)}$ всевозможные функции класса E_p. Тогда можно будет сразу заключить, что инвариантное подпространство $E\subset E_p$ имеет структуру $E=I.E_p$, где $I(z)=\widetilde{I}[\psi(z)]$.

При доказательстве нам пришлось воспользоваться хорошо известными результатами о возможности аппроксимации в равномерных метриках соответственно на γ функции $\psi(\zeta)$ многочленами от ζ, а функции $\varphi(\xi)$ на $|\xi|=1$ многочленами от ξ (см., напр., [5, 11]).

3. Циклические элементы оператора умножения на ζ в пространствах E_p. Напомним вначале известное определение циклических элементов оператора S гильбертова пространства.

Определение. *Элемент f называется циклическим элементом оператора S, если замкнутая линейная оболочка $\{S^n f\}$ элементов, получаемых применением к f всевозможных степеней n оператора S, совпадает со всем пространством.*

Циклическими элементами пространства H_p относительно оператора S умножения на $e^{i\theta}$ являются по терминологии Бёрлинга внешние функции $F(w)$, т. е. функции, допускающие следующее параметрическое представление В. И. Смирнова:

$$F(w)=e^{i\alpha}\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\ln|F(e^{i\theta})|\,d\theta. \tag{3}$$

В п. 2 приведено распространение теоремы Бёрлинга об инвариантных подпространствах H_p оператора умножения на $e^{i\theta}$ на случай оператора умножения на ζ в пространствах E_p. При этом формулировка результата для пространств E_p оказалась аналогичной формулировке для пространств H_p. В то же время, как будет сейчас показано, структура параметрических представлений циклических элементов в пространствах E_p будет в общем случае (для произвольных областей со спрямляемой границей) отличаться от структуры циклических элементов в пространствах H_p.

Для формулировки получающихся результатов нам понадобятся свойства производной конформного отображения круга на области со спрямляемой границей. В связи с тем, что $\varphi'(w)$ входит в класс H_1, эта функция допускает параметрическое представление

$$\varphi'(w)=e^{i\alpha}.I_G(w)\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\ln|\varphi'(e^{i\theta})|\,d\theta. \tag{4}$$

При этом $I_G(w)\equiv 1$, и, следовательно, функция $\ln|\varphi'(w)|$ представима в $|w|<1$ интегралом Пуассона-Лебега

$$\ln|\varphi'(re^{it})|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\ln|\varphi'(e^{i\theta})|\,d\theta \tag{5}$$

только для областей класса В. И. Смирнова. Конструкция областей со спрямляемой границей, не удовлетворяющих условию В. И. Смирнова (5), была впервые осуществлена М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым (см., напр., [8]). Другой подход к построению примеров областей, не входящих в класс В. И. Смирнова, был предложен в работе [15] (см. также [14]).

Теорема 5. *Циклическими элементами оператора умножения на ζ в пространстве E_p, $p>0$ являются те и только те функции $f(\zeta)$, которые суть угловые граничные значения функции $f(z)$ класса E_p, допускающие следующее представление:*

$$f(z)=e^{i\alpha}\frac{Q_f(z)}{I^*(z)}. \tag{6}$$

Здесь: $I^*(z)$ — внутренняя функция, зависящая только от области G, $I^*(z)=I_G[\psi(z)]$, где $I_G(w)$ — функция, участвующая в параметрическом представлении (4) функции $\varphi'(w)$, а функция $Q_f(z)$ внешняя:

$$Q_f[\varphi(w)]=\exp\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\ln|Q_f[\varphi(e^{i\theta})]|\,d\theta.$$

Следствие. Циклическими элементами оператора умножения на ζ в пространствах E_p, $p>0$ являются внешние функции тогда и только тогда, когда область G есть область В. И. Смирнова.

Мы не приводим здесь доказательства теоремы, так как при этом используются рассуждения, аналогичные примененным при обосновании теоремы 4.

4. Инвариантные подпространства оператора, сопряженного к оператору сдвига окружности. Напомним вначале определение и известные факты, касающиеся сопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

Пусть U — линейный (ограниченный) оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда сопряженным U^* оператором к U называется оператор, определяемый соотношением [4]:

$$(Ux,\ y)=(x,\ U^*y),\quad x,\ y\in H. \tag{7}$$

В интересующем нас случае H есть пространство H_2, а U — оператор сдвига S или, что то же самое, оператор умножения на $e^{i\theta}$. Тогда, используя цитированный в п. 1 результат Бёрлинга, сразу получается описание структуры S^*-инвариантных подпространств H_2. Каждое S^*-инвариантное подпространство H_2 имеет представление

$$H_2\ominus IH_2 \tag{8}$$

в силу того, что S^*-инвариантное подпространство является ортогональным дополнением в H_2 к S-инвариантному подпространству.

Заметим, что из представления (8) можно непосредственно извлечь лишь часть информации об S^*-инвариантных подпространствах H_2.

Очень важная информация о характеристических признаках циклических элементов оператора S^* требует специального рассмотрения.

Впервые это было сделано в работе [13] Р. Дугласа, Г. Шапиро и А. Шилдса. При этом оказалось, что описание нециклических элементов оператора S^* может быть дано в терминах псевдоаналитического продолжения.

Определение. *Пусть $f(z)$ — аналитическая в односвязной области G со спрямляемой границей γ функция, имеющая почти всюду на γ угловые граничные значения $f(\zeta)$. Тогда говорят, что $f(\zeta)$ имеет псевдоаналитическое продолжение через γ в область G^- (дополнение к G), если найдется мероморфная в G^- функция с ограниченной неванлиннов-*

ской характеристикой $f^{-}(z)$, имеющая на γ угловые граничные значения $f^{-}(\zeta)$, совпадающие с $f(\zeta)$ почти всюду на γ.

Теорема 6 (Р. Дуглас, Г. Шапиро, А. Шилдс). *$f(e^{i\theta}) \in H_2$ тогда и только тогда является нециклическим элементом оператора S^* сопряженного сдвига в H_2, когда соответствующая аналитическая функция $f(w)$ допускает псевдоаналитическое продолжение в $|w|>1$.*

Заметим, что ранее выполненные исследования автора по аппроксимации в различных интегральных метриках функций на окружности последовательностями рациональных дробей с фиксированными полюсами, заданными таблицей $\{\alpha_{kj}\}$, позволили сформулировать необходимое и достаточное условие для нециклических элементов в терминах возможности приближения таких элементов в метрике L_2 последовательностями $\{R_k(e^{i\theta})\}$ рациональных дробей с добавочным условием на расположение полюсов.

Теорема 7 (Г. Ц. Тумаркин). *Для того, чтобы функция $f(e^{i\theta}) \in L_2$ являлась нециклическим элементом пространства H_2, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{R_k(w)\}$ рациональных дробей с полюсами в точках $\{\alpha_{kj}\}$, расположенных в $|w|>1$, для которых выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})-R_k(e^{i\theta})|^2\,d\theta=0,\ \text{причем}\ \sum_j\Bigl(1-\frac{1}{|\alpha_{kj}|}\Bigr)\le C,\quad k=1,\ 2\ldots$$

Сформулированный результат оказался весьма важным и был использован как в работе Р. Дугласа, Г. Шапиро и А. Шилдса, так и в лекциях Н. К. Никольского об операторе сдвига [6, 7]. Другая эквивалентная форма описания S^*-инвариантных подпространств приведена в [6]:

S^*-инвариантное подпространство имеет вид $E=\lim\limits_{n\to\infty}(b_nH_2)^{\perp}$, где $b_n(w)$ — произведение Бляшке с нулями в точках $\{\alpha_{nj}\}$ в $|w|<1$ с условием

$$\sum_j(1-|\alpha_{nj}|)\le C,\quad n=1,\ 2,\ldots.$$

Эти результаты позволяют в качестве следствия установить, что множество нециклических элементов типа F_σ первой категории в H_2.

5. Инвариантные подпространства оператора, сопряженного к оператору умножения на ζ, в пространстве E_2-граничных значений $f(\zeta)$ аналитических функций класса В. И. Смирнова. В п. 3 были описаны инвариантные подпространства оператора S умножения на ζ в пространствах E_p. При $p=2$ пространство E_2 является гильбертовым пространством с нормой

$$\|f\|=\int_\gamma|f(\zeta)|^2|d\zeta|.$$

Поэтому можно рассматривать в гильбертовом пространстве E_2 оператор S^*, сопряженный к оператору S умножения на ζ.

Используя известные соотношения об инвариантных подпространствах сопряженного оператора в гильбертовых пространствах, можно записать следующее соотношение, определяющее S^*-инвариантные подпространства E_2: $S^*E_2\subset E_2 \Leftrightarrow SE_2^{\perp}\subset E_2$ (откуда, опираясь на отмеченную в п. 2 структуру инвариантных подпространств оператора S, получаем: S^*-инвариантные подпространства E_2 имеют вид $E_2\ominus IE_2$).

Переходим теперь к описанию S^* циклических элементов пространства E_2.

Теорема 8. *Для того, чтобы функция $f(\zeta)\in E_2$ являлась нециклическим элементом оператора S^*, сопряженного в гильбертовом прос-*

транстве E_2 *к оператору* S *умножения на* ζ, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\overline{f(\zeta)e^{it}}$, *где* $e^{it}=\frac{d\zeta}{|d\zeta|}$ (т. е. t — угол наклона касательной к γ *в точке* ζ), *совпадала почти всюду на* γ *с граничными значениями мероморфной в* G *функции с ограниченной неванлинновской характеристикой.*

Доказательство. Пусть $f(\zeta)$ — S^* нециклический элемент пространства E_2. Множество всех нециклических элементов оператора S^* (сопряженного к S — умножению на ζ) этого пространства обозначим через N, $f \in N$. В ортогональном дополнении N в E_2 возьмем какой-либо элемент $g \in E_2 \ominus N$, $g \neq 0$. Тогда, используя известное соотношение, определяющее сопряженный оператор (см. п. 4), можно записать следующие равенства

$$(\zeta^n g, f)=(g, S^{*^n} f)=0, \quad n=0, 1, 2, \ldots .$$

Это означает, что

$$\int\limits_\gamma \zeta^n g(\zeta)\overline{f(\zeta)}\,|d\zeta|=0, \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

После применения конформного преобразования $z=\varphi(w)$ круга $|w|<1$ на область G, которое для областей со спрямляемой границей по известной теореме, установленной Лузиным и Приваловым (независимо от них Риссом), остается абсолютно непрерывным и на границе круга $|w|=1$, имеем из (9)

$$\int\limits_{|\xi|=1} [\varphi(\xi)]^n g[\varphi(\xi)]\overline{f[\varphi(\xi)]}\,|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|=0, \quad n=0, 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Воспользуемся уже использованным нами ранее хорошо известным фактом возможности приближения в метрике пространства C на $|\xi|=1$ любых, степеней ξ^k, $k=0, 1, 2, \ldots$, линейными комбинациями системы $\{[\varphi(\xi)]^n\}$ $n=0, 1, 2, \ldots$. (Этот факт является следствием теоремы Уолша (см., напр., [11]), о том, что функции $[\psi(z)]^k$, аналитические внутри G и непрерывные в $\overline{G}$, можно приблизить в равномерной метрике в $\overline{G}$ многочленами от z.)

Тогда из (10) следуют равенства

$$\int\limits_{|\xi|=1} \xi^k [g[\varphi(\xi)]\sqrt{\varphi'(\xi)}]\,\overline{f[\varphi(\xi)]\sqrt{\varphi'(\xi)}}\,|d\xi|=0, \quad k=0, 1, \ldots \tag{11}$$

Условия (11) дают возможность заключить, что функция

$$F(\xi)=g[\varphi(\xi)]\sqrt{\varphi'(\xi)}\;\overline{f[\varphi(\xi)]\sqrt{\varphi'(\xi)}}$$

является почти всюду на $|\xi|=1$ угловыми граничными значениями аналитической в круге $|w|<1$ функции $F(w)$ класса H_1 (см., например, [8]). Но тогда функция $F[\psi(z)]\psi'(z)$ является аналитической в области G функцией класса E_1.

Поэтому функция

$$\frac{\overline{f(z)\,\psi'(z)}}{|\psi'(z)|}=\overline{\left[\frac{f(z)}{\sqrt{\psi'(z)}}\right]}\cdot\sqrt{\psi'}(z)=\overline{f(z)\sqrt{\varphi'[\psi(z)]}}\cdot\sqrt{\psi'}(z)=\frac{F[\psi(z)]\,\psi'(z)}{g(z)},$$

как частное аналитической в области G функции $F[\psi(z)]\psi'(z)$ класса E_1 и функции $g(z)$ класса E_2, будет мероморфной в области G функцией с ограниченной неванлинновской характеристикой. Очевидно, что подобным же свойством обладает функция

$$e^{-\frac{i\pi}{2}} \cdot \frac{\overline{f(z)\,\psi'(z)}}{|\psi'(z)|\,\psi(z)}\,. \tag{12}$$

Принимая далее во внимание геометрический смысл аргумента производной $\psi'(\zeta)$, существующей почти во всех точках границы γ и дающей угол поворота касательной (имеющейся также в почти всех точках γ) при конформном отображении G на круг $|w|<1$, имеем:

$$\frac{\psi'(\zeta)}{|\psi'(\zeta)|} = e^{i[(\theta+\frac{\pi}{2})-t]}, \tag{13}$$

где t — угол наклона касательной к γ в точке $\zeta\in\gamma$, соответствующей при конформном отображении $w=\psi(z)$ области G на $|w|<1$ точке $\xi=e^{i\theta}$ окружности $|w|=1$. Учитывая значение функции $\psi(z)$ в точке ζ, $(\psi(\zeta)=\xi=e^{i\theta})$, имеем для граничных значений функции (12), существующих почти всюду на γ, следующее выражение:

$$e^{-i\frac{\pi}{2}}\,\frac{\overline{f(\zeta)\,\psi'(\zeta)}}{\psi(\zeta)\,|\psi'(\zeta)|} = \overline{f(\zeta)\,e^{it}}\,.$$

Согласно отмеченному свойству эта функция будет являться почти всюду на γ угловыми граничными значениями мероморфной в области G функции, имеющей в G ограниченную неванлинновскую характеристику.

Аналогичными рассуждениями может быть доказано утверждение о том, что сформулированного в условии теоремы требования о функции $\overline{f(\zeta)e^{it}}$ быть на γ угловыми граничными значениями мероморфной в G функции $\Phi(z)$ с ограниченной характеристикой достаточно для нецикличности $f(\zeta)\in E_2$ для оператора S^*, сопряженного оператору S умножения на ζ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Гарнетт. Ограниченные аналитические функции. Москва, 1984.
2. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. 1966.
3. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. Москва, Иностранная литература, 1963.
4. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ. Москва, 1977.
5. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Т. II. Москва, 1966.
6. Н. К. Никольский. Лекции об операторе сдвига. *Записки научного семинара ЛОМИ*, 1974, 59—93.
7. Н. К. Никольский. Лекции об операторе сдвига. Москва, Наука, 1980.
8. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, изд. 2. Москва, 1950.
9. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Москва, Наука, 1970.
10. Г. Ц. Тумаркин. Описание класса функций, допускающих приближение дробями с фиксированными полюсами. *Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика*, 1966, № 1, 89—106.
11. Дж. Л. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Москва, Иностранная литература, 1960.
12. П. Халмош. Гильбертово пространство в задачах. Москва, Мир, 1970.
13. R. G. Douglas, H. S. Shapiro, A. L. Shields. Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator. *Ann. Inst. Fourier*, 20, 1970, 37-76.
14. P. L. Duren Theory of H^p Spaces. Academic Press, New York, 1970.
15. P. L. Duren, H. S. Shapiro, A. L. Shields. Singular measures and domains not of Smirnov type. *Duke Math. J.*, 33, 1986, 247-254.

Московский Геологоразведочный институт
просп. Маркса, 18, корп. Ж,
Москва 103912, СССР

Поступила 5. 11. 1986