Serdica
Mathematical Journal
Сердика
Математическо списание

Serdica Math. J. **34** (2008), 383–394

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

RÉGULARITÉ LIPSCHITZIENNE DES GÉODÉSIQUES MINIMISANTES POUR QUELQUES DISTRIBUTIONS AFFINES

Naceurdine Bensalem

Communicated by A. L. Dontchev

Abstract. In the context of sub-Riemannian geometry and the Lipschitzian regularity of minimizers in control theory, we investigate some properties of minimizing geodesics for certain affine distributions. In particular, we consider the case of a generalized $H2$-strong affine distribution and the case of an affine Plaff system of maximal class.

1. Introduction. La géométrie sous-Riemannienne est l'étude des distributions de p-plans muni d'une métrique Riemannienne, sur une variété de dimension n. Lorsque $p = n$, on retrouve la situation classique de la géométrie Riemannienne. Dans ce contexte, chaque géodésique est la projection d'une courbe intégrale du champ Hamiltonien canoniquement associé à la métrique. Lorsque $p < n$, une géodésique est une courbe localement minimisante pour l'énergie. Mais dans ce cas, il est bien connu qu'il peut exister des géodésiques qui ne

2000 *Mathematics Subject Classification:* 49J15, 49J30, 53B50.
Mots-clés : Contrôle optimal, Régularité Lipschitzienne, Distribution affine, Géodésique.

sont pas la projection d'une courbe intégrale du champ Hamiltonien canoniquement associé à la métrique. Ces courbes sont appelées des géodésiques strictement anormales, les autres géodésiques sont appelées Hamiltoniennes. Ce type de problèmes a connu, ces dernières années un regain d'intérêt, notamment grâce à la théorie du contrôle (voir les références de la liste non exaustive suivante ainsi que les références qui y sont contenues : [1, 7, 8, 9]). Un travail récent de A. Sarychev et D. M. Torres ([13, 14, 15]), établit sous certaines hypothèses un résultat de régularité Lipschitzienne (bornétude des contrôles minimisants) pour un problème de contrôle optimal gouverné par une dynamique affine. On propose dans cet article un cadre géométrique où ce résultat s'applique. Plus précisément, on aborde l'étude des géodésiques minimisantes pour quelques structures sous-Riemanniennes dans le contexte de contraintes données par une distribution affine. En utilisant la théorie de la régularité Lipschitzienne, on établit sous les conditions de [13] quelques propriétés de ces géodésiques. Le premier résultat concerne la situation où toutes les géodésiques sont régulières pour une distribution affine (paragraphe 3). On s'intéresse ensuite au cas des géodésiques pour une distribution $H2$-forte généralisée affine (paragraphe 4). Dans ce contexte et moyennant quelques hypothèses, on montre aussi que toutes les géodésiques sont non singulières et on obtient un résultat de régularité Lipschitzienne. Enfin on considère la situation où la distribution est définie par un système de Plaff affine de classe maximale et possédant un feuilletage local. Dans ce cas les géodésiques anormales sont tangentes au feuilletage. Cette situation correspond aux systèmes de contact généralisés bien connus en mécanique. Un résultat qui concerne la régularité Lipschitzienne des géodésiques pour une distribution définie par une structure de contact généralisée affine est démontré dans le paragraphe 5. Enfin, indiquons que les résultats du présent travail admettent une version non linéaire.

2. Préliminaires.

2.1. Position du problème. Soient M une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension n, TM son fibré tangent, T^*M son fibré cotangent. Soit $\mathcal{E}$ une distribution de classe $\mathcal{C}^\infty$. Étant donné un champ de vecteurs X_0 sur M, on dit qu'une courbe absolument continue est *horizontale* si elle est tangente presque partout à la distribution affine $X_0 + \mathcal{E}$. Considérons une métrique Riemannienne g sur M et notons $\widetilde{g}$ la métrique induite sur $\mathcal{E}$. On choisit X_0 de sorte qu'il soit orthogonal à $\mathcal{E}$. Il existe un morphisme linéaire de fibrés G: $T^*M \to TM$ tels que $\operatorname{Im} G(x) = \mathcal{E}_x$, $\ker G(x) = \mathcal{E}_x^\perp$ (l'orthogonal par dualité dans T^*M) et que G soit symétrique par rapport au produit de dualité, c'est à dire $\langle \xi, G\eta\rangle_x = \langle G\xi, \eta\rangle_x = \widetilde{g}(G\xi,\, G\eta)$ pour ξ, η appartenant à T^*M. Un chemin $\gamma : [0,T] \to M$ est horizontal si et seulement s'il existe un relèvement $(\gamma, \xi) : [0,T] \to T^*M$ de classe L^1 de γ tel que $\dot\gamma = X_0(\gamma) + G(\gamma)\xi$.

Considérons alors les quantités suivantes :

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^T g\left(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\right) dt, \qquad\qquad L(\gamma) = \int_0^T \sqrt{g\left(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\right)} dt$$

$E(\gamma)$ (resp. $L(\gamma)$) est l'énergie (resp. la longueur) du chemin horizontal γ.

L'étude du problème des géodésiques (c'est à dire les courbes qui minimisent la fonctionnelle E) joignants deux points donnés, en géométrie sous-Riemannienne, a déja fait l'objet de divers travaux. Le but de notre travail est d'établir quelques propriétés des géodésiques minimisantes, lorsque la distribution est affine et que le système associé vérifie certaines hypothèses. On utilise principalement dans cette étude un résultat démontré par A. Sarychev et D. M. Torres ([13, 14, 15]) qui concerne la régularité Lipschitzienne des minimiseurs dans le cadre de l'étude d'un problème de contrôle optimal gouverné par une dynamique affine.

Remarque 2.1. Si l'on ne considère que des chemins définis sur le même intervalle, il est équivalent de minimiser la longueur ou l'énergie.

Définition 2.1. 1. *Une courbe horizontale est dite minimisante en temps T pour la fonctionnelle E si elle réalise le minimum de cette fonctionnelle, parmi tous les chemins horizontaux de même origine et d'extrémité fixées paramétrés sur un intervalle de longueur T.*

2. *On dira qu'une courbe γ définie sur $[\alpha,\ \beta]$, est une géodésique si elle est localement minimisante pour la fonctionnelle E; c'est à dire plus précisément, si pour tout $t_0 \in [\alpha, \beta]$, il existe un voisinage V de $\gamma(t_0)$ tel que, pour tout sous intervalle $[t_1,\ t_2]$ de $[\alpha, \beta]$ avec $\gamma([t_1,\ t_2]) \subset V$, la restriction de γ à ce sous intervalle est minimisante en temps $t_2 - t_1$ parmi toutes les courbes horizontales contenues dans V, d'extrémités $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$.*

2.2. Formulation du problème en théorie du contrôle. Soit V un ouvert de M sur lequel il existe une base orthonormée $X_1, \ldots, X_p$ de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{H}(V)$ (resp. $\mathcal{H}_{x_0}(V$) l'ensemble des courbes γ absolument continues dont le vecteur tangent $\dot{\gamma}$ appartient presque partout à $X_0 + \mathcal{E}$ (resp. avec $\gamma(0) = x_0$). En d'autres termes, $\gamma \in \mathcal{H}_{x_0}(V)$ si et seulement si il est solution du *système affine contrôlé* suivant :

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & X_0(x(t)) + \sum\limits_{i=1}^{p} u_i(t) X_i(x(t)), \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

où x_0 est un point de M donné et où $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathcal{U} = L^1([0, T],\ \mathbb{R}^p)$ est le contrôle associé de classe L^1.

L'espace des chemins horizontaux au voisinage du chemin constant s'identifie à un voisinage de $V \times \mathcal{U}$ en associant à toute courbe son origine x_0 et son contrôle u. Dans ce cas, l'application extrémité est :

$$\begin{aligned} \mathrm{ext} : \mathcal{U} &\to M \\ u &\longmapsto x_u(T) \end{aligned}$$

où x_u est la trajectoire associée au contrôle u.

Il est bien connu que l'application ext est Fréchet différentiable. Une courbe associée au contrôle u est dite *singulière* si $d\ \mathrm{ext}(u)$ n'est pas surjective. Une courbe ne correspondant pas à une singularité de $d\ \mathrm{ext}(u)$ est dite *régulière.*

On désigne en outre par $\mathrm{Acc}(T)$ l'ensemble des extrémités des solutions de (1) correspondant à tous les contrôles u de $\mathcal{U}$.

Remarque 2.2. Toute courbe horizontale ne possédant pas de point double possède toujours un voisinage V ayant les propriétés précédentes. En fait toute courbe horizontale peut être recouverte par un nombre fini de tels ouverts, ce qui permet de construire un atlas définissant une structure de variété sur l'espace $\mathcal{H}(M)$ (resp. $\mathcal{H}_{x_0}(M)$) des chemins horizontaux absolument continus (resp. et d'origine x_0) dans M, définis sur un intervalle fixé $[0, T]$ (voir [3]).

Notre problème d'optimisation se reformule dans l'ouvert V en termes de contrôle optimal de la manière suivante :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} E(x_u, u) = \frac{1}{2}\int_0^T g(X_u,\ X_u)dt \to \min \\ \\ x(0) = x_0 \\ x(T) \in \mathrm{Acc}(T) \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$X_u = X_0(x_u) + \sum_{i=1}^{p} u_i X_i(x_u).$$

Définition 2.2. *Appelons* $\mathcal{P}_{x_1}$ *le problème de contrôle optimal donné par la dynamique* (1) *et la minimisation* (2) *avec* $\mathrm{Acc}(T) = x_1$.

Il est bien connu que pour calculer les géodésiques on utilise le principe du maximum de Pontryagin (PMP) [4, 11]. Introduisons le Hamiltonien :

$$(3) \qquad H(x,\ u,\ \psi_0,\ \psi) = \langle \psi,\ X_0 + X_u \rangle +\ \psi_0 g(X_u,\ X_u).$$

D'après le PMP, toute géodésique $\gamma : [0, T] \to M$ est une extrémale. Il existe alors un champ de covecteur $\psi : [0, T] \to T^*M$ le long de γ tel que presque partout on ait :

$$(4) \qquad \begin{cases} \dot{\gamma} & = & \dfrac{\partial H}{\partial \psi}(\gamma,\ u,\ \psi_0,\ \psi), \\ \dot{\psi} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x}(\gamma,\ u,\ \psi_0,\ \psi), \end{cases}$$

$$H(\gamma(t),\ u(t),\ \psi_0,\ \psi(t)) = \max\{H(\gamma(t),\ v,\ \psi_0,\ \psi(t)),\ v \in \mathbb{R}^p\} = \text{cste}.$$

En particulier la courbe $(\gamma,\ \psi)$ est solution du système différentiel :

$$(5) \qquad \begin{cases} \dot{x} & = & \dfrac{\partial H}{\partial \psi}, \\ \dot{\psi} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} & = & 0. \end{cases}$$

D'autre part toute courbe $(x, \psi) : [0, T] \to T^*V$ solution de (5) s'appelle une *bi-extrémale.*

En fonction de la valeur du réel ψ_0, on obtient deux types de *bi-extrémales* :

1. Si $\psi_0 = 0$, mais $\psi(t) \neq 0$, la bi-extrémale (γ, ψ) est appelée *bi-extrémale anormale* ou *singulière* (ces trajectoires sont indépendantes de la fonction coût, mais dépendantes seulement de la distribution).

2. Si $\psi_0 \neq 0$ (que l'on peut normaliser à $\psi_0 = -1$) la bi-extrémale (γ, ψ) est appelée *bi-extrémale normale.*

Définition 2.3. *Soit $\gamma : [0, T] \to M$ une courbe horizontale :*

1. *On dit que γ est une extrémale normale* (*pour l'Hamiltonien* (3))*, si il existe un covecteur ψ le long de γ tel que (γ, ψ) soit une bi-extrémale normale du* PMP.

2. *On dit que γ est une extrémale strictement anormale* (*pour l'Hamiltonien* (3))*, si pour tout covecteur non nul ψ le long de γ tel que (γ, ψ) soit une bi-extrémale, cette bi-extrémale est anormale.*

Remarque 2.3. Si γ est une extrémale normale (resp. anormale), le contrôle associé u est appelé contrôle extrémal normal (resp. anormal).

2.3. Caractérisation des géodésiques anormales. Étant donnée une courbe horizontale $\gamma : [0, T] \to M$, on appellera *relèvement* de γ tout champ de 1-forme $(\gamma, \xi) : [0, T] \to T^*M$ le long de γ. Soit Ω la forme volume canonique sur T^*M. Pour tout champ de vecteurs X sur M est associé une fonction H_X :

$T^*M \to \mathbb{R}$ donnée par $H_X(x,\lambda) = \langle \lambda, X(x)\rangle$ pour $\lambda \in T^*_xM$. Alors X est $\mathcal{C}^k$ si et seulement si H_X est $\mathcal{C}^k$. On notera $\overrightarrow{H_X}$ le champ de vecteurs Hamiltonien associé à H_X (par définition $\overrightarrow{H_X}$ est le champ de vecteurs sur T^*M tel que $\Omega(Y, \overrightarrow{H_X}) = dH_X(Y)$ pour tout champ de vecteurs Y sur T^*M).

Sur l'annulateur $\mathcal{E}^0$ de $\mathcal{E}$, la 2-forme Ω induit une 2-forme que l'on notera Ω^0. On peut alors établir les caractérisations géométriques suivantes qui sont prouvées dans un cadre plus général dans [12] :

Proposition 2.1. 1) *On a les équivalences suivantes :*
a. γ *est singulière;*
b. γ *possède un relèvement* (γ,θ) *dans* $\mathcal{E}^0$ *solution de l'équation* $i_{(\dot\gamma,\dot\theta)}\Omega^0 = dH^0_{X_0}$, *où* $H^0_{X_0}$ *est la restriction de* H_{X_0} *à* $\mathcal{E}^0$;
c. il existe un champ de covecteur ψ *le long de* γ *tel que la bi-extrémale* (γ,ψ) *soit anormale.*

2) *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
a. γ *est une extrémale normale;*
b. il existe un relèvement $(\gamma,\lambda) \in T^*M$ *qui est localement une courbe intégrale du champ Hamiltonien (relativement à la forme symplectique canonique* Ω*) associé à :*

$$H(x,\lambda) = \langle \lambda, X_0\rangle + \frac{1}{2}\left\|\Phi(x,\lambda)\right\|^2 - \frac{1}{2}g_x(X_0,X_0),$$

où

$$\Phi = (\Phi_1,\ldots,\Phi_p) \quad \text{et} \quad \Phi_i(x,p) = \langle p, X_i\rangle, \qquad i = 1,\ldots,m;$$

c. il existe un relèvement (γ,ξ) *de* γ *dans* T^*M *qui est une courbe intégrale du champ Hamiltonien associé à :*

$$H(x,\xi) = \langle \xi, X_0(x)\rangle + \frac{1}{2}(\langle \xi, G_x\xi\rangle - g(X_0(x),X_0(x)))$$

pour la forme symplectique Ω

3. Régularité lipschitzienne des trajectoires optimales et problème des géodésiques.

3.1. Introduction. L'objet de la régularité Lipschitzienne pour un problème de contrôle optimal sans contraintes sur le contrôle a priori, est d'établir des conditions pour qu'on ait des contrôles optimaux bornés. L'étude de ce problème pour divers motivations a donné lieu à de nombreux travaux ces dernières années (citons par exemple [5, 6, 13, 14, 15] et les références de ces articles). On s'intéresse dans ce paragraphe et les paragraphes suivants à l'utilisation de la théorie de la régularité Lipschitzienne des trajectoires minimisantes dans le contexte du problème des géodésiques sous-Riemanniennes, en particulier on établira quelques résultats des géodésiques minimisantes de certaines distributions régulières. Commençons par un rappel du théorème de A. Sarychev et D. M. Torres [13].

Soit le problème de contrôle optimal $\mathcal{P}_{x_1}$ donné par la dynamique (1) et la minimisation (2) avec $\mathrm{Acc}(T) = x_1$. Posons :

$$\begin{cases} \varphi(t,x,u) & = & f(t,x) + h(t,x)u, \\ L(t,x,u) & = & g(X_u,\ X_u), \end{cases}$$

de sorte que

$$f(t,x) = X_0(x(t)), \qquad\qquad h(t,x) = (X(x(t)).$$

Alors, avec les notations ci dessus on a le théorème fondamental suivant :

Théorème 1 [13]. *On suppose que L, f et h sont au moins de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport au système de variables (t,x,u). Appelons* **(H)** *les hypothèses suivantes :*

- *$h(t,\ x)$ est de rang maximal pour tout $t \in [0,\ T]$ et $x \in M$;*
- *il existe une fonction $\theta : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow R$ et $\zeta \in \mathbb{R}$ telle que*

$$L(t,\ x,\ u) \geqslant \theta\left(\|u\|\right) \geqslant \zeta,$$

pour tout $(t,x,u) \in [0,T] \times M \times \mathbb{R}^p$, et

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{r}{\theta\left(r\right)} = 0;$$

- *il existe des constantes α, β, η et μ, avec $\alpha > 0$, $\beta < 2$ et $\mu \geq \max\{\beta - 2, -2\}$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, $x \in M$, et $u \in \mathbb{R}^p$ on ait :*

$$\left(\|L_t\| + \|L_x\| + \|L\varphi_t - L_t\varphi\| + \|L\varphi_x - L_x\varphi\|\right) \|u\|^\mu \leq \alpha L^\beta + \eta.$$

Si les hypothèses **(H)** *ci dessus sont vérifiées, alors tout minimiseur $u\left(\cdot\right)$ pour le problème $\mathcal{P}_{x_1}$ qui n'est pas un contrôle extrémal anormal est essentiellement borné sur $[0,T]$.*

Remarque 3.1. Si tous les contrôles extrémaux sont normaux, alors un minimiseur a priori $u\left(\cdot\right)$ qui n'est pas essentiellement borné, peut ne pas satisfaire le PMP et ainsi peut ne pas être un extrémal. En ce qui concerne les minimiseurs essentiellement bornés le PMP est valide. Pour les minimiseurs non bornés (si ils en existent) ils seront d'après le théorème 1 des contrôles extrémaux anormaux.

Remarque 3.2. Pour le problème élémentaire du calcul des variations classique

$$\int_0^T L(t, x(t), u(t))dt \to \min, \qquad \dot{x}(t) = u(t)$$

et sous les hypothèses **(H)** ci dessus, toute courbe minimisante $x(\cdot)$ est Lipschitzienne sur $[0, T]$.

3.2. Un résultat de régularité Lipschitzienne géométrique. Un chemin horizontal est dit géodésique minimisante s'il réalise le minimum de l'énergie entre deux points donnés. Contrairement au cas Riemannien où toutes les courbes minimisant l'énergie sont caractérisées comme solutions d'un système différentiel, dans le cadre sous-Riemannien on a différentes caractérisations de géodésiques et qui ne sont pas nécessairement équivalentes. On peut distinguer dans ce contexte deux types de courbes minimisantes : les géodésiques dites normales (ou régulières) et les géodésiques dites anormales (ou singulières). Il est bien connu qu'une géodésique peut être à la fois normale et anormale. Une géodésique qui est uniquement anormale est dite strictement anormale (ou non Hamiltonienne). C'est l'application du *PMP* qui permet de rendre compte de toutes les géodésiques minimisantes.

On considère alors le problème de contrôle optimal $\mathcal{P}_{x_1}$donné par la dynamique (1) et la minimisation (2) avec $\mathrm{Acc}(T) = x_1$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les contrôles $u(.)$ (resp. les chemins $\gamma(.)$) sont des éléments de l'espace $L^1([0, T], \mathbb{R}^p)$ (resp. $\mathcal{H}(M)$ des chemins horizontaux absolument continus d'origine x_0 et d'extrémité x_1 définis sur l' intervalle $[0, T]$).

En appliquant maintenant le théorème 1, on peut établir un résultat qui concerne la régularité Lipschitzienne des géodésiques non singulières (qui ne sont pas anormales) :

Proposition 3.1. *Étant donnée une structure sous-Riemannienne* (M, Δ, g) *où* Δ *est une distribution affine sur une variété* M *et* g *est une métrique Riemannienne sur* Δ*. On suppose que le système associé satisfait les hypothèses* **(H)***. Si* $\gamma(\cdot)$ *est une géodésique minimisante non singulière de* (M, Δ, g)*, alors le contrôle minimiseur* $u(\cdot)$ *associé à* $\gamma(\cdot)$ *est essentiellement borné sur* $[0, T]$*.*

3.3. Exemple : Structure de contact. Soit M une variété de dimension impaire $m = n + 1$. Une structure de contact sur M est la donnée d'une section du fibré projectif PT^*M associée à T^*M, telle que si ω est une représentation locale alors $\omega \wedge (d\omega)^n$ n'est pas nul.

Corollaire 3.1. *Soit (M, Δ, g) une structure sous-Riemannienne où Δ est une distribution affine définie par une structure de contact. Si le système associé satisfait les hypothèses* **(H)**. *Alors tout contrôle associé à une géodésique minimisante non triviale de (M, Δ, g) est essentiellement borné sur $[0, T]$.*

Démonstration. Soit γ une géodésique minimisante non triviale. Il est bien connu que pour une distribution Δ définie par une structure de contact, toute courbe horizontale non triviale est non singulière (voir [2, 3]). Le résultat vient alors de la proposition 3.1. $\square$

4. Régularité lipschitzienne des géodésiques minimisantes pour une distribution $\boldsymbol{H}$2-forte généralisée. Soit Δ une distribution de rang p sur une variété M de dimension n. On note $\Gamma(\Delta)$ l'ensemble des sections locales de Δ et Dom X le domaine de X. (l'ouvert sur lequel la section X est définie). Soient $X \in \Gamma(\Delta)$ et $x \in$ Dom X, l'évaluation en x de l'ensemble $\Gamma(\Delta) + [X, \Gamma(\Delta)]$ ne dépend que de la valeur de X en x.

Définition 4.1. *Nous dirons que*

1. $X \in \Gamma(\Delta)$ *est un générateur d'ordre* 2 *en* x *si*

$$\{\Gamma(\Delta) + [X,\ \Gamma(\Delta)]\}_x = T_x M$$

2. Δ *est fortement génératrice d'ordre* 2 *si tout* $X \in \Gamma(\Delta)$ *qui est non nul est un générateur d'ordre* 2 *en tout point* $x \in$ *Dom* X. *Nous dirons aussi que* Δ *vérifie l'hypothèse* $H2$*- forte.*

3. Δ *est Q-fortement génératrice d'ordre* 2 *s'il existe un sous fibré* $\mathcal{F}$ *de* Δ *vérifiant :*

i) Pour tout champ $X \in \Gamma(\mathcal{F})$ *et* $Y \in \Gamma(\Delta)$ *le crochet* $[X, Y] \in \Gamma(\Delta)$.

ii) Tout champ $X \in \Gamma(\Delta) - \Gamma(\mathcal{F})$ *est générateur d'ordre* 2 *en tout point de Dom* X. *Nous dirons aussi dans ce cas que* Δ *vérifie l'hypothèse* $H2$*-forte généralisée. Le fibré* $\mathcal{F}$ *est appelé le fibré caractéristique de* $\mathcal{F}$.

Remarque 4.1. Un résultat classique de la géométrie sous-Riemannienne stipule que si Δ est une distribution définie par une structure de contact, alors elle vérifie la condition $H2$-forte. D'autre part, il est clair que si Δ vérifie $H2$-forte alors elle vérifie $H2$-forte généralisée avec $\mathcal{F} = \{0\}$.

Dans la suite nous aurons besoin du résultat suivant :

Lemme 4.1. *Si Δ est une distribution vérifiant l'hypothèse $H2$-forte généralisée, alors*

i) Le fibré caractéristique $\mathcal{F}$ est intégrable,

ii) Toute courbe horizontale est anormale si et seulement si elle est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}$.

D é m o n s t r a t i o n. *i*). On considère l'ensemble

$$\Gamma = \{X \in \Gamma(\Delta) \quad \text{tels que} \quad [X,\ Y] \in \Gamma(\Delta) \quad \forall\, Y \in \Gamma(\Delta)\}\,.$$

C'est un sous module de $\Gamma(\Delta)$ stable par crochet de Lie qui contient $\Gamma(\mathcal{F})$. Soit $X \in \Gamma - \Gamma(\mathcal{F})$, puisque $X \in \Gamma$ le crochet de Lie $[X, Y]$ appartient à $\Gamma(\Delta)$ pour tout $Y \in \Gamma(\Delta)$. Mais $X \notin \Gamma(\mathcal{F})$, donc il est générateur d'ordre 2 et il existe $Y \in \Gamma(\Delta)$ tel que $[X, Y] \notin \Gamma(\Delta)$, ce qui est impossible. Ainsi $\Gamma = \Gamma(\mathcal{F})$.

ii) Soit $\gamma : [0, T] \to M$ une courbe horizontale. Si γ n'est pas contenue dans une feuille du feuilletage défini par $\mathcal{F}$, il existe un sous intervalle $[\alpha, \beta]$ de $[0, T]$ tel que $\dot\gamma$ n'appartienne pas à $\mathcal{F}$. Si $t \in [\alpha, \beta]$ est un point pour lequel $\dot\gamma(t) \notin \mathcal{F}_{\gamma(t)}$, alors on a $\{\Delta + [X, \Delta]\}_{\gamma(t)} = T_{\gamma(t)}M$ où X est un champ de vecteurs local égal à $\dot\gamma(t)$ en $\gamma(t)$. Ce qui montre que $\dot\gamma(t)$ n'est pas caractéristique, et donc que la courbe n'est pas anormale. La réciproque est évidente. $\square$

L'objet principal de ce paragraphe est d'établir :

Théorème 2. *Soit Δ une distribution affine vérifiant l'hypothèse $H2$-forte généralisée. Supposons que le sous fibré $\mathcal{H}$, orthogonal de $\mathcal{F}$, possède la propriété suivante :*

$$[X,\ Y] \in \Gamma(\mathcal{H}) \ \textit{pour tout}\ X \in \Gamma(\mathcal{F}) \quad \textit{et}\ Y \in \Gamma(\mathcal{H}) \tag{6}$$

et que le système associé satisfait les hypothèses **(H)**. *Si une géodésique minimisante de Δ n'est pas tangente à $\mathcal{F}$, alors le contrôle minimiseur associé est essentiellement borné sur $[0, T]$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit γ une géodésique minimisante. On va montrer que sous les hypothèses du théorème 2, une géodésique est singulière si et seulement si elle est tangente à $\mathcal{F}$. Soit γ une géodésique singulière. D'après *ii*) du lemme 4.1, γ est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{H}$ vérifie l'hypothèse (5) alors le résultat est une simple application de la proposition 2.5 de la référence [3]. $\square$

5. Régularité lipschitzienne des géodésiques minimisantes pour une distribution définie par une structure de contact généralisée. Un système de Plaff $\mathcal{P}$ est la donnée d'un sous module du module des 1-formes sur M. Le système de Plaff $\mathcal{P}$ est dit régulier (de rang r) sur l'ouvert U s'il existe une base de dimension r de $\mathcal{P}$. L'espace caractéristique d'un système de Plaff $\mathcal{P}$ est l'espace vectoriel des vecteurs $v \in T_xM$ vérifiant $\omega(v) = 0$, $d\omega(v, .) \in \mathcal{P}$. La classe de $\mathcal{P}$ en $x \in M$ est la codimension de l'espace caractéristique de $\mathcal{P}$ en x.

Définition 5.1. *On dit qu'un système de Plaff $\mathcal{P}$ régulier de rang r sur une variété de dimension $n = (r+1)/(p+r)$ est une structure de contact généralisée si $\mathcal{P}$ est de classe maximale et possède localement un sous fibré intégrable de dimension rp.*

Dans ce cadre on a le résultat suivant :

Lemme 5.1. *Soit $\mathcal{P}$ une structure de contact généralisée de rang r sur une variété M de dimension $(r+1)/(p+r)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

i) Il existe un unique fibré intégrable $\mathcal{F}$ de dimension (maximale) rp tangent à $\mathcal{P}$.

ii) Si une courbe tangente à $\mathcal{P}$ (presque partout) est anormale alors elle est contenue dans une feuille du feuilletage définie par $\mathcal{F}$.

Pour une démonstration on peut voir par exemple [3] ou [10].

Remarque 5.1. Contrairement au cas des distributions qui vérifient l'hypothèse $H2$-forte généralisée, pour une structure de contact généralisée toute courbe tangente au feuilletage $\mathcal{F}$ n'est pas toujours anormale.

Une conséquence du lemme 5.1 est le théorème suivant :

Théorème 3. *Soit $\mathcal{P}$ une structure de contact généralisée de rang r sur une variété M de dimension $(r+1)/(p+r)$. Soit γ une courbe tangente à $\mathcal{P}$. Supposons que $\mathcal{P}$ est affine et que le système associé satisfait les hypothèses* **(H)**. *Si γ est une géodésique minimisante de $\mathcal{P}$ qui n'est pas contenue dans une feuille du feuilletage défini par $\mathcal{F}$, le contrôle u associé à γ est essentiellement borné sur $[0,T]$.*

Remerciement. Je tiens à remercier vivement le referee anonyme qui m'a suggéré de nombreuses améliorations.

REFERENCES

[1] A. A. Agrachev, A. V. Sarychev. Abnormal sub-Riemannian geodesics: Morse index and rigidity. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, **13**, *6* (1996), 635–690.

[2] M. Alcheikh. Etude géométrique de l'espace des chemins horizontaux d'une distribution régulière. Points critiques de l'énergie. Thèse de doctorat, Université de Savoie, 1995.

[3] M. Alcheikh, P. Orro, F. Pelletier. Characterizations of Hamiltonian geodesics in sub-Riemannian geometry. *J. Dynam. Cont. Syst.* **3** (1998), 391–418.

[4] U. Boscain, B. Piccoli. An introduction to optimal control, In: Contrôle non linéaire et applications, Herman, Paris, 2005, 19–66.

[5] F. H. Clarke, R. B. Vinter. Regularity properties of optimal controls. *SIAM J. Control Optim.* **28** (1990), 980–997.

[6] F. H. Clarke, R. B. Vinter. A Regularity theory for variational problems with higher order derivatives. *Trans. Amer. Math. Soc.* **320**, *1* (1990), 227–251.

[7] W. Liu, H. J. Sussmann. Abnormal sub-Riemannian minimizers. Differential equations, dynamical systems, and control science. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. vol. **152**, Dekker, New York, 1994, 705–716.

[8] R. Montgomery. A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry. *J. Dynam. Control Systems* **1** (1995), 49–90.

[9] R. Montgomery. A tour of sub-Riemannian geometries, their Geodesics and Applications. Math. Surveys and Monographs, American Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[10] P. Orro, F. Pelletier. Propriétés géométriques de quelques distributions régulières, Preprint LAMA, Université de Savoie, 1997.

[11] L. S. Pontryagin, V. Boltianski, R. Gamkelidze. Théorie mathématique des processus optimaux. Mir, Moscou, 1974.

[12] M. Popescu, F. Pelletier. Courbes optimales pour une distribution affine. *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), 701–725.

[13] A. V. Sarychev, D. M. Torres. Lipschitzian regularity of minimizers for optimal control problems with control-affine dynamics. *Appl. Math. Optim.* **41**, *2* (2000), 237–254.

[14] D. M. Torres. Lipschitzian regularity of minimizers in the calculus of variations and optimal control. MSc thesis, Univ. Aveiro, Portugal, 1997.

[15] D. M. Torres. Lipschitzian regularity of the minimizing trajectories for nonlinear optimal control problems. *Math. Control Signals Systems* **16** (2003), 158–174.

Naceurdine Bensalem
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Ferhat Abbas
Sétif, Algérie (19000)

Receive July 5, 2006
Revised September 25, 2007