Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

Serdica Math. J. **37** (2011), 221–226

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

FORMES DE CONTACT AYANT LE MEME CHAMP DE REEB

Saad Aggoun

Communicated by O. Mushkarov

Abstract. In this paper, we study contact forms on a 3-manifold having a common Reeb vector field R. The main result is that when the contact forms induce the same orientation, they are diffeomorphic.

1. Introduction. Une forme de contact sur une variété de dimension trois est une forme de Pfaff ω telle que $\omega \Lambda d\omega$ soit sans zéros. Une structure de contact est un champ de 2-plans défini par une forme de contact. Deux structures de contact sont isomorphes si les formes qui les définissent sont conjuguées par un difféomorphisme h, i.e. si $h^*\omega_1 = \lambda\omega_2$ où λ est une fonction sans zéros. Si $\lambda = 1$, on dit que les formes ω_1 et ω_2 sont difféomorphes.

On sait que si ω_t est une famille à un paramètre de formes de contact (voir [2]), il existe une isotopie h_t avec $h_0 = id$ telle que $h_t{}^*\omega_0 \Lambda\ \omega_t = 0$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 37J55, 53D10, 53D17, 53D35.
Key words: Contact structures, contact forms, Reeb field.

L'isotopie h_t s'obtient en intégrant le champ de vecteurs X_t défini de manière unique par les conditions $\omega_t(X_t) = 0$ et $\left(X_t \rfloor d\omega_t - \dfrac{\partial \omega_t}{\partial t} \right) \Lambda \omega_t = 0$.

On dit que le champ de vecteurs R et un champ de Reeb de ω si on a : $i(R)d\omega = 0$ et $i(R)\omega = 1$. R est unique.

Dans cet article on va étudier deux formes de contact ayant le même champ de Reeb R et on démontre le théorème suivant :

Théorème. *Soient ω_0 et ω_1 deux formes de contact ayant le même champ de Reeb R sur une variété de dimension trois.*

1. *Si ω_0 et ω_1 induisent la même orientation alors les deux formes sont difféomorphes.*
2. *Si ω_0 et ω_1 ont des orientations opposées alors :*

   a) *ω_0 et ω_1 sont difféomorphes si et seulement si : il existe un difféomorphisme F tel que $F_* R = R$, et det F négatif.*

   b) *Si un tel difféomorphisme existe alors les formes sont conjuguées mais la réciproque reste indécise.*

Démonstration. On pose pour $t \in [0,1]$: $\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega_0$. La forme $\omega = \omega_1 - \omega_0$ est complètement intégrable (cád $\omega \Lambda d\omega = 0$) car $i(R)\omega = i(R)d\omega = 0$ ainsi on obtient que

$$\omega_1 \Lambda d\omega_1 + \omega_0 \Lambda d\omega_0 - \omega_1 \Lambda d\omega_0 - \omega_0 \Lambda d\omega_1 = 0$$

et

$$\begin{aligned} \omega_t \Lambda d\omega_t &= [t\omega_1 + (1-t)\omega_0] \Lambda [t d\omega_1 + (1-t) d\omega_0] \\ &= t^2 \omega_1 \Lambda d\omega_1 + (1-t)^2 \omega_0 \Lambda d\omega_0 + t(1-t) [\omega_1 \Lambda d\omega_0 + \omega_0 \Lambda d\omega_1] . \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité pécédente on a

$$\omega_t \Lambda d\omega_t = t\omega_1 \Lambda d\omega_1 + (1-t)\omega_0 \Lambda d\omega_0,$$

de sorte que si ω_1 et ω_0 ont la même orientation, alors ω_t serait une forme de contact donc il existe une isotopie h_t avec $h_0 = id$ et telle que ${h_t}^* \omega_0 \Lambda \omega_t = 0$. Ainsi les deux formes sont conjuguées. L'isotopie est le flôt du champ de vecteurs X_t défini par :

$$\omega_t(X_t) = 0 \quad \text{et} \quad \left(i(X_t) d\omega_t - \frac{\partial \omega_t}{\partial t} \right) \Lambda \omega_t = 0.$$

Cette expression est équivalente à $X_t \rfloor d\omega_t - \dfrac{\partial \omega_t}{\partial t} = \lambda \omega_t$ et on déduit que $d\omega_t(X_t, R) - i(R)(\omega_1 - \omega_0) = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda = 0$ et par suite $i(X_t)d\omega_t = \dfrac{\partial \omega_t}{\partial t}$, ce qui équivaut à $h_t^* \omega_0 = \omega_1$ et les deux formes ω_0 et ω_1 sont difféomorphes. On a donc démontré le premier point du théorème.

Si maintenant ω_0 et ω_1 induisent des orientations opposées et si elles sont difféomorphes, alors il existe un difféomorphisme F vérifiant $F^* \omega_0 = \omega_1$.

On obtient que

$$F_* R = R \quad \text{et} \quad F^*(\omega_0 \Lambda d\omega_0) = \omega_1 \Lambda d\omega_1,$$

ainsi F est un difféomorphisme négatif. Réciproquement si un tel difféomorphisme existe, en posant $\omega_2 = F^* \omega_1$ on obtient une troisième forme de contact ayant le même champ de Reeb et induisant la même orientation que ω_0 donc ω_0 et ω_2 sont conjuguées et par suite ω_0 et ω_1 le sont aussi. Ce qui termine la démonstration de la partie a) de la $2^{\text{ème}}$ partie du théorème.

Pour la partie b) du théorème, il suffit d'appliquer le a). Le théorème est démontré. $\square$

2. Exemples.

Donnons maintenant deux exemples particuliers :

Exemple 1. Considérons sur $\mathbb{R}^3$ la forme de contact $\omega_0 = xdy + dz$. Son champ de Reeb est $R = \dfrac{\partial}{\partial z}$. La forme de contact $\omega_1 = -xdy + dz$ admet le même champ de Reeb et induisant une orientation opposée à celle de ω_0, mais si on considère l'application F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $F(x, y, z) = (-x, y, z)$, on aura $F_* R = R$ et $F^* \omega_0 = \omega_1$. Ainsi toute forme de contact sur $\mathbb{R}^3$ admettant $R = \dfrac{\partial}{\partial z}$ comme champ de Reeb est difféomorphe à ω_0.

Exemple 2 (voir [1]). Considérons sur le tore T^3 la forme de contact $\omega_0 = \cos\theta_3 d\theta_1 + \sin\theta_3 d\theta_2$. Son champ de Reeb est donné par $R = \cos\theta_3 \dfrac{\partial}{\partial \theta_1} + \sin\theta_3 \dfrac{\partial}{\partial \theta_2}$.

Pour cet exemple on a les deux affirmations suivantes :

1. Toute forme de contact admettant R comme champ de Reeb est de la forme $\omega_1 = \cos\theta_3 d\theta_1 + \sin\theta_3 d\theta_2 + C(\theta_3) d\theta_3$ où $C(\theta_3)$ est une fonction quelconque sur T^3 (la démonstration détaillée se trouve dans [1]). Ainsi ω_0 et ω_1 induisent la même orientation donc elles sont conjuguées et même difféomorphes. Calculons l'isotopie h_t pour cet exemple.

X_t doit vérifier les conditions $\omega_t(X_t) = 0$ et $i(X_t)d\omega_t = \dfrac{\partial \omega_t}{\partial t}$.

Un calcul direct montre que :

$$X_t = C(\theta_3)\sin\theta_3 \frac{\partial}{\partial\theta_1} - C(\theta_3)\cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial\theta_2}.$$

Son flôt à un paramètre est donné par :

$$h_t(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1 + tC(\theta_3)\sin\theta_3; \theta_2 - tC(\theta_3)\cos\theta_3; \theta_3)$$

et on vérifie sans peine que $h_t^*\omega_0 = \omega_t$ avec $h_0 = id$ et $h_1^*\omega_0 = \omega_1$.

2. Il n'existe aucun difféomorphisme négatif F tel que $F_*R = R$. Ceci n'est pas en contradiction avec le théorème car pour cet exemple il n'existe pas deux formes de contact d'orientations opposées admettant R comme champ de Reeb.

Pour démontrer cette affirmation démontrons le lemme suivant :

Lemme. *Soit f une fonction sur le tore T^3 telle que $R(f) = 0$ c'est-à-dire f est une intégrale première de R, alors f est une fonction ne dépendant que de la variable θ_3.*

D é m o n s t r a t i o n. La condition $R(f) = 0$ signifie que f est constante le long des courbes intégrales de R dont les équations sont :

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \cos\theta_3,$$
$$\frac{d\theta_2}{dt} = \sin\theta_3,$$
$$\frac{d\theta_3}{dt} = 0,$$

d'où il vient que

$$\theta_1 = t\cos k + \text{constante}$$
$$\theta_2 = t\sin k + \text{constante}$$
$$\theta_3 = k(\text{constante})$$

Lorsque $\tan k$ est irrationnel, la trajectoire est dense sur un tore T^2 de sorte que par continuité f est constante sur ce tore. On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial\theta_1} = \dfrac{\partial f}{\partial\theta_2} = 0$ pour θ_1, θ_2 arbitraires et θ_3 dans un ensemble dense sur le cercle. Il en résulte que

f est constante par rapport à θ_1 et θ_2. Donc f est une fonction périodique ne dépendant que de θ_3. Ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

Soit maintenant un difféomorphisme F tel que $F_*R = R$. On obtient les équations suivantes :

$$f_1 \cos\theta_3 + f_2 \sin\theta_3 = \cos h \tag{1}$$

$$g_1 \cos\theta_3 + g_2 \sin\theta_3 = \sin h \tag{2}$$

$$h_1 \cos\theta_3 + h_2 \sin\theta_3 = 0 \tag{3}$$

où f_i, g_i, h_i désignent respectivement $\dfrac{\partial f}{\partial\theta_i}$, $\dfrac{\partial g}{\partial\theta_i}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial\theta_i}$ avec $i = (1, 2, 3)$ et

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (f(\theta_1, \theta_2, \theta_3); g(\theta_1, \theta_2, \theta_3), h(\theta_1, \theta_2, \theta_3)).$$

D'après le lemme, h serait une fonction de θ_3 seulement et en dérivant (1) et (2) par rapport à θ_1 et θ_2 puis en utilisant le lemme on déduit que : f_1, f_2, g_1 et g_2 sont des entiers, que l'on note respectivement a, b, c et d.

Ainsi F est de la forme

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (a\theta_1 + b\theta_2 + \alpha(\theta_3), c\theta_1 + d\theta_2 + \beta(\theta_3), h(\theta_3)).$$

Multiplions l'équation (1) par $\sin h$ et l'équation (2) par $\cos h$, on obtient en retranchant les équations ainsi obtenues que :

$$(a-d)\sin(h+\theta_3) + (a+d)\sin(h-\theta_3) + (b-c)\cos(h-\theta_3) - (b+c)\cos(h+\theta_3) = 0.$$

Si $h = +\theta_3$ alors $b = c = 0$ et $a = d = 1$ et par suite le déterminant de F est égal à 1.

Si $h = -\theta_3$ alors $b = c = 0$ et $a = -d = 1$ et par suite le déterminant de F est égal à 1.

Si h est différente de $\pm\theta_3$ on a dans ce cas $a = b = c = d = 0$, et un tel difféomorphisme n'existe pas.

Remarques.

1) Si $\omega_1 - \omega_0$ est exacte alors il existe une fonction f telle que $\omega_1 = \omega_0 + df$ de sorte que $\omega_1 \Lambda d\omega_1$ soit égale à $\omega_0 \Lambda d\omega_0 + df \Lambda d\omega_0$, mais $\omega_1(R) = \omega_0(R) = 1$ et $i(R)d\omega_0 = 0$ ce qui implique que $R(f)$ et $df \Lambda d\omega_0$ sont identiquement nulles et par suite ω_1 et ω_0 induisent la même orientation donc elles sont difféomorphes. Cette remarque est observée dans l'exemple 2.

2) On aimerait trouver deux formes de contact induisant deux orientations opposées et pour lesquelles il n'existe aucun difféomorphisme négatif F tel que : $F_* R = R$.

REFERENCES

[1] S. Aggoun. Thèse, Mulhouse, 1989.

[2] J. Martinet. Sur les singularités des formes différentielles. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **20** (1970), 95–178.

Laboratory of Fundamental and Numerical Mathematics
Department of Mathematics
Ferhat Abbas University
19000 Setif, Algeria
e-mail: `saadaggoun@yahoo.fr`

Received July 3, 2011