ВЪРХУ ТРИ-СИМЕТРИЧНИТЕ ЕДНОЛИСТНИ ФУНКЦИИ

от Любомир Илиев

Да означим с S_3 съвокупността на функциите от вида:

(1) $$f_3(z)=z+a_1^{(3)}z^4+a_2^{(3)}z^7+\ldots,$$

3-симетрични, регулярни и еднолистни в кръга $|z|<1$.

В настоящата работа ще бъдат установени следните резултати:

Теорема I. Ако $f_3(z)\,\varepsilon\,S_3$, то

(2) $$|a_2^{(3)}|<0{\cdot}579,\ |a_3^{(3)}|<0{\cdot}618,\ |a_4^{(3)}|<0{\cdot}636,\ |a_5^{(3)}|<0{\cdot}658,$$
$$|a_6^{(3)}|<0{\cdot}683,\ |a_7^{(3)}|<0{\cdot}711\ |a_8^{(3)}|<0{\cdot}741,\ |a_9^{(3)}|<0{\cdot}774$$

и въобще

(2′) $$|a_n^{(3)}|^2\leq\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|a_{n-\nu}^{(3)}|^2}{3\nu-1}.$$

Теорема II. Ако $f_3(z)\,\varepsilon\,S_3$, то парциалната сума

(3) $$\sigma_n^{(3)}(z)=z+a_1^{(3)}z^4+\ldots+a_n^{(3)}z^{3n+1}$$

при $n\neq 2$ е еднолистна в кръга $|z|<\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$. Константата $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ не може да се замени с по-голяма.

Теорема III. Ако $f_3(z)\,\varepsilon\,S_3$, парциалната сума

(4) $$\sigma_n^{(3)}(z)=z+a_1^{(3)}z^4+\ldots+a_n^{(3)}z^{3n+1},\quad n=1,\ 2,\ldots$$

е еднолистна в кръга

(5) $$|z|\leq\left\{1-\frac{8}{3}\frac{\ln\theta(n+1)}{n+1}\right\}^{1/3}$$

гдето

(6) $$\theta=7{\cdot}96^{3/8}.\ 3^{1/4}.\ 2^{7/8}.$$

Теорема IV. Ако $f_3(z)\,\varepsilon\,S_3$, полиномът

(7) $$\frac{\sigma_n^{(3)}(z)}{z}=1+a_1^{(3)}z^3+\ldots+a_n^{(3)}z^{3n},\quad n=1,\ 2,\ldots$$

не се анулира в кръга

(8) $$|z| < \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{\ln a(n+1)}{n+1} \right\}^{1/3}$$

где т о

(9) $$a = 7{\cdot}96^{3/2}.\ 3^{3/4}.\ 2^{1/2}.$$

1. Ако функцията

(1,1) $$f_3(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + \dots$$

принадлежи на класата S_3, да положим

(1,2) $$f_3(z) = \sigma_n^{(3)}(z) + p_n^{(3)}(z),$$

гдето

(1,3) $$\sigma_n^{(3)}(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + \dots + a_n^{(3)} z^{3n+1}.$$

Съгласно теоремата за изкривяването (теорема искажении, Verzerrungssatz), при $|z| \leq r < 1$ е изпълнено неравенството

(1,4) $$\left| \frac{f_3(z)}{z} \right| \geqq \frac{1}{(1+r^3)^{2/3}}.$$

Следователно, ако за $|z| \leq r_n < 1$ имаме:

(1,5) $$\left| \frac{p_n^{(3)}(z)}{z} \right| < \frac{1}{(1+r_n^3)^{2/3}},$$

то $\dfrac{\sigma_n^{(3)}(z)}{z}$ не може да се анулира в кръга $|z| \leq r_n$.

Неравенството (1,5) е изпълнено, ако

(1,6) $$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu^{(3)}| \, r_n^{3\nu} < \frac{1}{(1+r_n^3)^{2/3}}.$$

Както показа К. Джо [1], за всяко положително ν е вярно неравенството

(1,7) $$(3\nu+1)^{1/3} |a_\nu^{(3)}| < 7{\cdot}96.$$

Следователно, (1,6) е изпълнено, ако

(1,8) $$7{\cdot}96 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{r_n^{3\nu}}{(3\nu+1)^{1/3}} < \frac{1}{(1+r_n^3)^{2/3}},$$

т. е., ако

(1,9) $$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{r_n^{3\nu}}{(3\nu+1)^{1/3}} < \frac{1}{7{\cdot}96.2^{2/3}}.$$

Съгласно неравенството на Буняковски, за $0 \leq r < 1$, получаваме:

(1,10)
$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{r^{3\nu}}{(3\nu+1)^{1/3}} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1)^{1/2} r^{3\nu} \cdot \frac{1}{(3\nu+1)^{1/2+1/3}}$$
$$\leq \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1) r^{6\nu} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{(3\nu+1)^{1+2/3}} \right\}^{1/2}$$

Очевидно:

(1,11)
$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{(3\nu+1)^{1+2/3}} < \sum_{k=0}^{\infty} \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{d\nu}{(3\nu+1)^{1+2/3}} =$$
$$= \int_{n}^{\infty} \frac{d\nu}{(3\nu+1)^{1+2/3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(3n+1)^{2/3}}.$$

От тождеството

(1,12)
$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \varrho^{3\nu+1} = \frac{\varrho^{3n+4}}{1-\varrho^3},$$

чрез диференциране, при $\varrho = r^2$, получаваме

(1,13)
$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1) r^{6\nu} = r^{6n+6} \frac{(3n+4)(1-r^6)+3r^6}{(1-r^6)^2}.$$

Съгласно (1,10), (1,11) и (1,13), получаваме:

(1,14)
$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{r^{3\nu}}{(3\nu+1)^{1/3}} < \frac{1}{2^{1/2}} \frac{r^{3n+3}}{(3n+1)^{1/3}} \frac{\sqrt{(3n+4)(1-r^6)+3r^6}}{1-r^6}.$$

Следователно, неравенството (1,9) е изпълнено при $n \geq 1$, ако:

(1,15)
$$r_n^{3n+3} \frac{\sqrt{(3n+4)(1-r_n^6)+3r_n^6}}{1-r_n^6} \cdot \frac{1}{(3n+1)^{1/3}} < \frac{1}{7 \cdot 96 . 2^{1/6}}.$$

Да положим:

(1,16)
$$r_n^6 = 1 - \frac{a}{n+1}, \quad 0 < a < n+1$$

така, че

(1,77)
$$r_n^{3n+3} = \left(1 - \frac{a}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} < e^{-\frac{a}{2}}$$

и

(1,18)
$$(3n+4)(1-r_n^6) + 3r_n^6 = 3a + 3 - \frac{2a}{3n+3} < 3a+3.$$

Неравенството (1,15) е изпълнено, щом

$$e^{-\frac{a}{2}}\frac{\sqrt{a+1}}{a}(n+1)^{2/3}<\frac{2^{1/6}}{7{\cdot}96.3^{1/3}}. \tag{1,19}$$

При $a\geqq 1$ последното неравенство е изпълнено, ако

$$2^{1/2}e^{-\frac{a}{2}}(n+1)^{2/3}=\frac{2^{1/6}}{7{\cdot}96.3^{1/3}}, \tag{1,20}$$

т. е., ако

$$a=\frac{4}{3}\ln a(n+1), \tag{1,21}$$

гдето

$$a=7{\cdot}96^{3/2}.3^{3/4}.2^{1/2}. \tag{1,22}$$

Условието $a\geq 1$ е изпълнено за всяко n.

Следователно, при $n\geqq 1$ полиномът $\frac{\sigma_n^{(3)}(z)}{z}$ не се анулира в кръга

$$|z|\leq r_n=\left\{1-\frac{4}{3}\frac{\ln a(n+1)}{n+1}\right\}^{1/6}\approx 1-\frac{2}{9}\frac{\ln a(n+1)}{n+1},$$

с което теорема IV е установена.

2. Ако функцията

$$f_3(z)=z+a_1^{(3)}z^4+\ldots \tag{2,1}$$

принадлежи на класата S_3 и $|z_1|\leq r$, $|z_2|<r$, $0<r<1$, $z_1\neq z_2$, използувайки едно неравенство на Г. М. Голузин [2], ние установихме [3], че

$$\left|\frac{f_3(z_1)-f_3(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geq\frac{1-r^2}{(1+r^3)^{4/3}}. \tag{2,2}$$

Следователно, по метода на Szegö [4] парциалната сума

$$\sigma_n^{(3)}(z)=z+a_1^{(3)}z^4+\ldots+a_n^{(3)}z^{3n+1} \tag{2,3}$$

е еднолистна в кръга $|z|\leq r_n$, ако при $|z_1|\leq r_n$, $|z_2|\leq r_n$, $0\leq r_n<1$ $z_1\neq z_2$ е изпълнено неравенството

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu^{(3)}\frac{z_1^{3\nu+1}-z_2^{3\nu+1}}{z_1-z_2}\right|<\frac{1-r_n^2}{(1+r_n^3)^{4/3}} \tag{2,4}$$

или, ако

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|a_\nu^{(3)}|(3\nu+1)r_n^{3\nu}<\frac{1-r_n^2}{(1+r_n^3)^{4/3}}. \tag{2,5}$$

Като вземем предвид (1,7) следва, че (2,5) е изпълнено, ако

$$7{\cdot}96\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(3\nu+1)^{2/3}r_n^{3\nu}<\frac{1-r_n^2}{(1+r_n^3)^{4/3}} \tag{2,6}$$

т. е., ако:

$$7{\cdot}96\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(3\nu+1)^{2/3}r_n^{3\nu}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r_n^3}{2^{4/3}}. \tag{2,7}$$

От неравенството на Хйолдер, получаваме:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(3\nu+1)^{2/3}r^{3\nu}=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(3\nu+1)^{2/3}r^{2\nu}.r^{\nu}$$

$$\leqq\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(3\nu+1)r^{3\nu}\right\}^{2/3}\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}r^{3\nu}\right\}^{1/3}$$

$$=\left\{r^{3n+3}\frac{(3n+4)(1-r^3)+3r^3}{(1-r^3)^2}\right\}^{2/3}\left\{\frac{r^{3n+3}}{1-r^3}\right\}^{1/3} \tag{2,8}$$

$$=r^{3n+3}\frac{\{(3n+4)(1-r^3)+3r^3\}^{2/3}}{(1-r^3)^{5/3}}.$$

Нека

$$r_n^3=1-\frac{a}{n+1},\quad 0<a<n+1 \tag{2,9}$$

така, че

$$r_n^{3n+3}=\left(1-\frac{a}{n+1}\right)^{n+1}<e^{-a} \tag{2,10}$$

и

$$(3n+4)(1-r^3)+3r^3=3a+3-\frac{2a}{n+1}<3(a+1). \tag{2,11}$$

От (2,8), (2.10) и (2,11) следва, че (2,7) е изпълнено, ако:

$$e^{-a}\frac{(a+1)^{2/3}}{a^{8/3}}(n+1)^{8/3}<\frac{1}{7{\cdot}96.3^{2/3}.2^{7/3}}. \tag{2,12}$$

При $a>1{\cdot}2$ неравенството (2,12) е изпълнено, ако

$$e^{-a}(n+1)^{8/3}=\frac{1}{7{\cdot}96.3^{2/3}.2^{7/3}}, \tag{2,13}$$

т. е., ако

$$a=\frac{8}{3}\ln\theta(n+1), \tag{2,14}$$

гдето

$$\theta=7{\cdot}96^{3/8}.3^{1/4}.2^{7/8}. \tag{2,15}$$

Неравенството $a>1{\cdot}2$ е изпълнено за всяко n. Следователно, парциалната сума $\sigma_n^{(3)}(z)$, $n=1, 2, \ldots$ е еднолистна в кръга.

$$|z|<r_n=\left\{1-\frac{8}{3}\frac{\ln\theta(n+1)}{n+1}\right\}^{1/3}\approx1-\frac{8}{9}\frac{\ln\theta(n+1)}{n+1},$$

с което теорема III е установена.

3. Ако $f_3(z) \in S_3$, следвайки метода на В. Левин [5], да разгледаме функцията

$$\frac{1}{f_3\left(\frac{1}{z}\right)} = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^{-3\nu+1}, \tag{3,1}$$

която е регулярна и еднолистна в $|z|>1$, с изключение на **точката** $z=\infty$. Според теоремата за площите, ще имаме

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (3\nu-1)\,|b_\nu|^2 \leq 1. \tag{3,2}$$

Ако

$$f_3(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + a_2^{(3)} z^7 + \cdots, \tag{3,3}$$

от (3,1) получаваме

$$(z^{-1} + a_1^{(3)} z^{-4} + a_2^{(3)} z^{-7} + \cdots)(z + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-5} + \cdots) = 1, \tag{3,4}$$

отгдето, при $a_0^{(3)} = 1$, намираме

$$a_n^{(3)} = -\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu a_{n-\nu}^{(3)}. \tag{3,5}$$

От последното равенство следва

$$\begin{aligned} |a_n^{(3)}|^2 &\leq \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|\,|a_{n-\nu}^{(3)}| \right\}^2 \\ &\leq \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} (3\nu-1)\,|b_\nu|^2 \right\} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|a_{n-\nu}^{(3)}|^2}{3\nu-1} \right\} \end{aligned} \tag{3,6}$$

или, според (3,2):

$$|a_n^{(3)}|^2 \leq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|a_{n-\nu}^{(3)}|^2}{3\nu-1}, \tag{3,7}$$

с което неравенството (2') е установено.

Както е известно [6]:

$$|a_2^{(3)}| < \frac{2}{3} e^{-1} + \frac{1}{3} < 0{\cdot}579. \tag{3,8}$$

Понеже $|a_1^{(3)}| \leq \frac{2}{3}$, от (3,8) и (3,7) намираме оценките (2), с което теорема I е установена.

4. Остава да докажем теорема II. Съгласно (2,2), ако $f_3(z) \in S_3$, при $|z_1| < \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, $|z_2| \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, $z_1 \neq z_2$, получаваме

$$\left|\frac{f_3(z_1)-f_3(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geqq \frac{4(4-\sqrt[3]{9})}{11\sqrt[3]{11}}. \tag{4,1}$$

Следователно, парциалната сума

$$\sigma_n^{(3)}(z)=z+a_1^{(3)}z^4+\cdots+a_n^{(3)}z^{3n+1} \tag{4,2}$$

е еднолистна в кръга $|z|<\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, ако

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^{(3)}\frac{z_1^{3\nu+1}-z_2^{3\nu+1}}{z_1-z_2}\right| < \frac{4(4-\sqrt[3]{9})}{11\sqrt[3]{11}}. \tag{4,3}$$

Последното неравенство е изпълнено, ако

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|a_\nu^{(3)}|\,(3\nu+1)r^{3\nu} < \frac{4(4-\sqrt[3]{9})}{11\sqrt[3]{11}} \tag{4,4}$$

където $r^3=\frac{3}{8}$.

Съгласно (2) и (1,7) неравенството (4,4) е изпълнено при $n>2$, ако

$$\begin{aligned}&0{\cdot}636.\,13\left(\frac{3}{8}\right)^4+0{\cdot}658.\,16.\left(\frac{3}{8}\right)^5+0{\cdot}683.19\left(\frac{3}{8}\right)^6+0{\cdot}711.22\left(\frac{3}{8}\right)^7+\\ &+0{\cdot}741.25\left(\frac{3}{8}\right)^8+0{\cdot}774.28\left(\frac{3}{8}\right)^9+7{\cdot}96\sum_{\nu=10}^{\infty}(3\nu+1)^{2/3}r^{3\nu}<0{\cdot}312,\end{aligned} \tag{4,5}$$

където $r^3=\frac{3}{8}$.

Според (2,8) имаме при $r^3=\frac{3}{8}$:

$$\sum_{\nu=10}^{\infty}(3\nu+1)^{2/3}r^{3\nu}=\left(\frac{3}{8}\right)^{10}\cdot\frac{8}{5}\cdot\left(\frac{164}{5}\right)^{2/3} \tag{4,6}$$

Следователно, (4,5) е изпълнено, ако

$$\begin{aligned}&0{\cdot}636.13\left(\frac{3}{8}\right)^4+0{\cdot}658.\,16.\left(\frac{3}{8}\right)^5+0{\cdot}683.19.\left(\frac{3}{8}\right)^6+0{\cdot}711.22.\left(\frac{3}{8}\right)^7+\\ &+0{\cdot}741.25.\left(\frac{3}{8}\right)^8+0{\cdot}774.28.\left(\frac{3}{8}\right)^9+7{\cdot}96.\frac{8}{5}\left(\frac{164}{5}\right)^{2/3}\left(\frac{3}{8}\right)^{10}<0{\cdot}312.\end{aligned} \tag{4,7}$$

Понеже неравенството (4,7) е изпълнено, теоремата е установена за $n>2$.

При $n=1$ теоремата също е вярна. Наистина, ако допуснем, че за $|z_1|<\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z_2|<\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 \neq z_2$ е изпълнено равенството

$$z_1+a_1^{(3)} z_1^4=z_2+a_1^{(3)} z_2^4$$

то, като вземем предвид, че $|a_1^{(3)}| \leqq \frac{2}{3}$, получаваме абсурдното неравенство:

$$1=|a_1^{(3)}|\left|\frac{z_1^4-z_2^4}{z_1-z_2}\right|< 4\,|a_1^{(3)}|\frac{3}{8} \leqq 4.\frac{2}{3}\ \ \frac{3}{8}=1.$$

Константата $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ се достига от парциалната сума $z+\frac{2}{3}z^4$ на еднолистната функция:

$$\frac{z}{(1-z^3)^{2/3}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Joh. Proc. Phys. math. Soc. Japan. 3 Serie. T. 19 (1937), стр. 1.
2. Г. М. Голузин. Матем. сборник. T. 19 (61), 2 (1946), стр. 183.
3. Л. Илиев. ДАНСССР. T. 69 (1949), стр. 491.
4. G. Szedő. Math. Annalen. T. 100 (1928), стр. 188.
5. V. Levin. Proc. London Math. Soc. T. 39 (1935), стр. 467.
6. M. Feketé and G. Szegö. J. London Math. Soc. T. 8. (1933), стр. 85.