АНАЛИТИЧНО НЕПРОДЪЛЖИМИ РЕДОВЕ ПО ПОЛИНОМИ НА ФАБЕР

от Любомир Илиев

1. Weierstrass пръв показа степенни редове, които не могат да бъдат продължени аналитично вън от кръга им на сходимост.

Разглежданите от Weierstrass редове имат „празнини" между всеки два последователни члена, на които коефициентите са отлични от нула.

С примера на Weierstrass се постави началото на една редица изследвания, които имат за цел да установят прецизни критерии за непродължимост на един степенен ред в случая, когато последният притежава празнини. В това отношение забележителна е теоремата на Hadamard за празнините[1], която Ostrowski [2] получи като частен случай от теоремата за свърхсходимост, с което успя да навлезе по-дълбоко в същината на тия въпроси. На Fabry [3] се дължи най-прецизната форма на теоремата за празнините.

С едно предположение на Fatou [4], доказано за пръв път от Pólya [5], се постави началото на изследвания, в които се търсят такива критерии за аналитична непродължимост на степенните редове, при които не се изискват празнини в редовете. Според теоремата на Fatou- Polya за всеки степенен ред $\sum c_n z^n$ може да се намери една редица ε_n, $n=1, 2, \cdots$, всеки член на която е равен на $+1$ или -1, така че редът $\sum \varepsilon_n c_n z^n$ да е непродължим вън от кръга му на сходимост.

В тази област важна е следната

Теорема на Szegö [6]. *Ако всеки коефициент на един степенен ред*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

е равен на едно от крайно многото различни числа $d_1, d_2, \cdots, d_k$, то той дефинира една рационална функция, или е непродължим вън от единичния кръг.

Първият случай имаме тогава и само тогава, когато коефициентите след известен индекс следват периодично. Дефинираната в тоя случай функция има вида

[1] Едно пълно изложение и библиография по тия въпроси може да се намери в [1].

$$\frac{P(z)}{1-z^m},$$

гдето $P(z)$ е полином, а m е едно цяло положително число.

В две работи [7,8] ние обобщихме теоремата на Szegö и дадохме нови условия за аналитична непродължимост (Вж. [9]) на степенни редове.

2. Нека една едносвързана област е ограничена от жордановата крива C и функцията

$$w=\varphi(z)=z+a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots$$

изобразява външността на C взаимно еднозначно и конформно на областта $|w|>\varrho$.

Кривата линия от равнината z, която при изображението $w=\varphi(z)$ преминава в окръжността $|w|=R>\varrho$, ще означаваме с C_R.

Нека за редицата от полиноми $p_n(z)$, $n=1, 2,\cdots$, от които $p_n(z)$ е от n-та степен, при всяко n и $R>\varrho$ за точките z, лежащи на C_R да имаме

$$|p_n(z)|<M(R+\varepsilon)^n$$

гдето $\varepsilon>0$, а M зависи от ε и R, но не и от z и n.

В такъв случай, редът

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n p_n(z), \tag{a}$$

за който

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R_0}<\frac{1}{\varrho}$$

е сходящ в C_{R_0} и при това равномерно във всяка област лежаща вътре в C_{R_0}.

Частен случай от полиномите $p_n(z)$ са полиномите на Фабер $\Phi_n(z)$. Нека K е ограничен континумм, който съдържа повече от една точка. Да означим с G_∞ онази съседна на K област, която съдържа точката ∞ и с $w=\Phi(z)$ функцията, която трансформира взаимно-еднозначно и конформно G_∞ на $|w|>\varrho$ и за която

$$\Phi(\infty)=\infty,\ \lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}=1.$$

Тогава

$$\Phi(z)=z+\beta_0+\frac{\beta_1}{z}+\cdots$$

и

$$[\Phi(z)]^n=\Phi_n(z)+\frac{\beta_1^{(n)}}{z}+\cdots$$

При частни случаи на K за полиномите на Фабер се получават известни системи от полиноми. Така:

а) Ако K е кръга $|z| \leqq r$, то $\Phi_n(z) = z^n$.

б) Ако K е затворената вътрешност на лемнискатата

$$|z^k + A_{k-1}z^{k-1} + \cdots + A_0| \leqq A,$$

то

$$\Phi_{mk}(z) = (z^k + A_{k-1}z^{k-1} + \cdots + A_0)^m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

в) Ако K е интервалът $-1 < x < 1$, то

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z),$$

т. е. $\Phi_n(z)$ се редуцира на n-я Чебишев полином $T_n(z)$.

Редът по полиноми на Фабер:

$$(a_1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z),$$

за който

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_0} < \frac{1}{\varrho},$$

е абсолютно и равномерно сходящ във всяка вътрешна област на C_{R_0} и е разходящ вън от тази област.

Обратно, всяка функция аналитична в C_{R_0} може да се разложи еднозначно в един ред от вида (a_1), сходящ в C_{R_0}.

Без ограничение на общността, в настоящата работа ние ще разглеждаме редове по полиноми на Фабер

$$(c) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$$

за които $\varrho < 1$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 < \frac{1}{\varrho}.$$

Редът (c) в такъв случай е сходящ във вътрешността на C_1, в която $f(z)$ е аналитична функция.

С. Я. Альпер [10] установи за редовете (a), а следователно и за (c), теоремата за свърсходимост на Островски. С това беше доказана и теоремата на Hadamard за празнините за тия редове, като естествена граница се указа кривата C_{R_0}.

Т. И. Краснощекова [11], използувайки работата на Альпер и доказателството на Hurwitz, доказа за същите редове теоремата на Fatou-Pòlya, при естествена граница C_{R_0}.

В настоящата работа отначало ще докажем теоремата на Szegö за редовете (c). След това, за същите редове ще установим нашите резултати от [7,8].

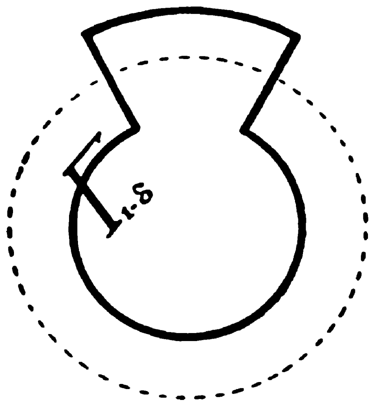
§ 1. *Обобщения на теоремата на Szegö.*

1. Ще установим следната

Теорема I. Ако коефициентите на реда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Phi_n(z) \tag{1,1}$$

вземат краен брой различни стойности $d_1, d_2, \ldots d_s, s>1$, то функцията $f(z)$ е аналитично непродължима вън от кривата C_1, щом членовете на редицата c_n, $n=0, 1, 2,\ldots$ след всеки индекс следват непериодично.



Фиг. 1.

Доказателство. Ще докажем, че известният метод на Szegö може да се разшири за доказателството на **теорема I.**

В равнината w да означим с $\Gamma_{1-\delta}$ кривата, която е образувана от две кръгови дъги съответно с радиуси $1-\delta<1$ и $R>1$ и от частите на двата радиуса съединяващи тия дъги. С $\overline{C}_{1-\delta}$ да означим кривата в равнината z, чийто образ посредством трансформацията $w=\Phi(z)$ е кривата $\Gamma_{1-\delta}$ (Фиг. 1).

Ако редът (с) е продължим аналитично вън от C_1, ще има една крива $\overline{C}_{1-\delta}$ във вътрешността и по контура, на която функцията $f(z)$ ще бъде холоморфна.

Предварително ще докажем

Помощна теорема I. Ако функцията

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Phi_n(z) \tag{1,2}$$

с $|c_n|<C$, гдето C не зависи от n, е регулярна в и върху $\overline{C}_{1-\delta}$ и, ако

$$s_n(z)=c_0+c_1\Phi_1(z)+\cdots+c_n\Phi_n(z), \tag{1,3}$$

то има един индекс N и едно независящо от z и n число M, така щото върху $\overline{C}_{1-\delta}$ е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{f(z)-s_{n-1}(z)}{[\Phi(z)]^n}\right|<M, \tag{1,4}$$

щом $n>N$.

Нека $R'_0=1-\delta$, $R'=1-\delta'$ и $\varrho<r<R'_0\leq R'$. Както е известно [12] в G_∞ върху кривата $C_{R'}$ и вън от нея имаме;

$$\Phi_n(z)=[\Phi(z)]^n+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{1,5}$$

Оттук върху $\overline{C}_{1-\delta'}$ се получава

$$(1,6)\qquad |\Phi_n(z)| \leqq |\Phi(z)|^n + \frac{L_r}{2\pi\delta_{r,R'}}\cdot r^n,$$

гдето L_r е дължината на C_r, а $\delta_{r,R'}$ е разстоянието между C_r и $C_{R'}$. Понеже върху $\overline{C}_{1-\delta'}$ имаме $|\Phi(z)|>r$, то от (1,6) се вижда, че има едно N, така че при $n>N$ и произволно $R'\geqq R'_0$ за всяко z върху $\overline{C}_{1-\delta'}$ е изпълнено неравенството:

$$(1,7)\qquad |\Phi_n(z)| \leqq \frac{3}{2}|\Phi(z)|^n.$$

Да изберем сега $\overline{C}_{1-\delta'}$, $\delta'<\delta$, така че тя изцяло да съдържа във вътрешността си кривата $\overline{C}_{1-\delta}$, но същевременно толкова близко до $\overline{C}_{1-\delta}$, че $f(z)$ да остава и върху $\overline{C}_{1-\delta'}$ все още регулярна. Поради свойствата на изображението $w=\Phi(z)$, и кривата $\Gamma_{1-\delta'}$ ще съдържа във вътрешността си $\Gamma_{1-\delta}$. Нека $w_1=\Phi(z_1)$ и $w_2=\Phi(z_2)$ означават точките, в които $\Gamma_{1-\delta'}$ сече окръжността $|w|=1$. Тогава z_1 и z_2 означават точките, в които $\overline{C}_{1-\delta'}$ сече C_1.

За да установим (1,4) достатъчно е да докажем, че има едно число M_1 независещо от z и n, така че да е изпълнено неравенството

$$|\Delta_n(z)| = \left|\frac{f(z)-s_{n-1}(z)}{[\Phi(z)]^n}(\Phi(z)-\Phi(z_1))(\Phi(z)-\Phi(z_2))\right| < M_1$$

за всички z от $\overline{C}_{1-\delta'}$, щом $n>N$.

Нека $n>N$.

Върху дъгата от $\overline{C}_{1-\delta'}$, която съответствува на дъгата $|w|=$ $=1-\delta'$, получаваме, като вземем предвид (1,7):

$$|\Delta_n(z)| \leqq \frac{3}{2}C(1+|\Phi(z)|+|\Phi(z)|^2+\cdots)|\Phi(z)-\Phi(z_1)||\Phi(z)-\Phi(z_2)|$$

$$\leqq \frac{3}{2}C\frac{|\Phi(z)-\Phi(z_1)||\Phi(z)-\Phi(z_2)|}{1-|\Phi(z)|}.$$

Понеже $|w|=|\Phi(z)|=1-\delta'$, то

$$|\Delta_n(z)| < \frac{3}{2}\cdot C\cdot\frac{4}{\delta'}.$$

Върху частите на $C_{1-\delta'}$, които отговарят на праволинейните отсечки на $\Gamma_{1-\delta'}$, лежащи в $|w|<1-\delta'$, получаваме напълно аналогично:

$$|\Delta_n(z)| \leqq \frac{3}{2}C\frac{|\Phi(z)-\Phi(z_1)||\Phi(z)-\Phi(z_2)|}{1-|\Phi(z)|}.$$

Понеже върху първообраза на отсечката минаваща напр. през $\Phi(z_1)$ имаме $|\Phi(z)-\Phi(z_1)|=1-|\Phi(z)|$, то върху тия части на $\overline{C}_{1-\delta'}$ получаваме

$$|\Delta_n(z)| < 3\,C.$$

За външността на C_1 съществува едно число $S>0$, така че върху $\overline{C}_{1-\delta'}$ имаме $|f(z)|<S$. От друга страна от (1,6) при фиксирано $r<R'_0<1$ получаваме за всяко n (т. е. и за $n\leqq N$):

$$|\Phi_n(z)|<|\Phi(z)|^n+\frac{L_r}{2\pi\,\delta_{r,\,R'_0}}\,r^n=|\Phi(z)|^n+Ar^n \tag{1,6'}$$

гдето A не зависи от n и z.

Поради това върху $\overline{C}_{1-\delta'}$ вън от C_1, получаваме:

$$|f(z)-s_{n-1}(z)|<S+C\,\frac{|\Phi(z)|^n}{|\Phi(z)|-1}+\frac{A}{1-r}\,.$$

Ако $\overline{R}'$ е радиусът от голямата окръжност на $\Gamma_{1-\delta'}$ върху частите на $\overline{C}_{1-\delta'}$ вън от C_1, които отговарят на праволинейните отсечки на $\Gamma_{1-\delta'}$, намираме:

$$|\Delta_n(z)|<\frac{P(|\Phi(z)|-1)\,2\,|\Phi(z)|}{|\Phi(z)|^n}+C\,\frac{(|\Phi(z)|-1)\,2\,|\Phi(z)|}{|\Phi(z)|-1}$$

$$<P\,2\overline{R}'(\overline{R}'-1)+2C\overline{R}',$$

гдето $P=S+\dfrac{A}{1-r}$.

Най-сетне върху първообраза на $|w|=\overline{R}'$ имаме

$$|\Delta_n(z)|<\left(\frac{P}{\overline{R}'^n}+\frac{C}{\overline{R}'-1}\right)4\overline{R}'^2<\left(P+\frac{C}{\overline{R}'-1}\right)4\overline{R}'^2.$$

Като второ помощно средство ще използваме следния резултат на Szegö:

Помощна теорема II. Има едно $\eta>0$ и един полином

$$Q\left(\frac{1}{w}\right)=a_0+\frac{a_1}{w}+\cdots+\frac{1}{w^q}$$

от подходяща степен $q=q(\eta)$, така че върху всяка крива $\Gamma_{1-\delta}$ при фиксирана външна кръгова дъга и $\delta<\eta$ е изпълнено неравенството

$$\left|Q\left(\frac{1}{w}\right)\right|<\frac{1}{2}\,.$$

Нека

$$|d_\lambda-d_\mu|\geqq d>0$$

щом $\lambda\neq\mu$. Да изберем $\delta>0$ така малко щото полиномът, който по абсолютна стойност остава по-малък от $\frac{1}{2}$ върху кривата Γ_1, да има това свойство и върху кривата $\Gamma_{1-\delta}$. Нека върху и във вътрешността на образа $\overline{C}_{1-\delta}$ на една така избрана, но по-нататък оставаща постоянна крива $\Gamma_{1-\delta}$, съгласно нашето предположение, функцията $f(z)$ да е регулярна. Ако $\varepsilon>0$ е произволно число да повдигнем $Q\left(\frac{1}{w}\right)$ в такава степен, щото за получения полином

$$R\left(\frac{1}{w}\right)=a_0+\frac{a_1}{w}+\cdots+\frac{1}{w^n}$$

да имаме

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{1-\delta}}\left|R\left(\frac{1}{w}\right)\right||dw|<\frac{\varepsilon}{2M},$$

гдето M е числото от помощна теорема I.

Понеже $f(z)$ е регулярна върху и във вътрешността на $\overline{C}_{1-\delta}$, получаваме

$$f(z)-s_{n-1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{C}_{1-\delta}}\frac{f(\zeta)-s_{n-1}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{1-\delta}}\frac{f[\psi(\omega)]-s_{n-1}[\psi(w)]}{\psi(w)-z}\,\psi'(\omega)dw,$$

гдето $\psi(w)$ е обратната функция на $\Phi(z)$.

Като вземем предвид, че

$$\frac{\psi'(\omega)}{\psi(\omega)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}}$$

и, че разложението

$$f(z)-s_{n-1}(z)=c_n\Phi_n(z)+c_{n+1}\Phi_{n+1}(z)+\cdots$$

на функцията $f(z)-s_{n-1}(z)$ в C_1 е еднозначно, то:

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{1-\delta}}\frac{f[\psi(\omega)]-s_{n-1}[\psi(\omega)]}{w^{k+1}}\,dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{C}_{1-\delta}}\frac{f(z)-s_{n-1}(z)}{[\Phi(z)]^{k+1}}\,dw,$$

$w=\Phi(z)$, $k\geq n$.

Но в такъв случай, при $n>N$ получаваме:

$$|a_0c_n+a_1c_{n+1}+\cdots+a_{r-1}c_{n+r-1}+c_{n+r}|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\overline{C}_{1-\delta}}\frac{f(z)-s_{n-1}(z)}{[\Phi(z)]^{n+1}}R\left(\frac{1}{w}\right)dw\right|$$

$$< \frac{M}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{1-\delta}} \left| R\left(\frac{1}{w}\right) \right| |dw| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ако $\varepsilon = d$ от последното неравенство следва, че за всяко $n > N$ е валидно неравенството

$$|a_0 c_n + a_1 c_{n+1} + \cdots + a_{r-1} c_{n+r-1} + c_{n+r}| < \frac{d}{2}.$$

Както показва обаче Szegö, ако коефициентите c_n вземат само стойностите $d_1, d_2, \ldots, d_s$, от този резултат следва, че стойностите на c_n след известен индекс се повтарят периодично. С това теоремата е установена.

2. От частните случаи, които съдържа получената теорема ще се спрем на следните два:

а) Както обърнахме внимание, полиномите на Фабер относно кръга $|z| \leq r_0$ са: $\Phi_n(z) = z^n$. От теорема I в тоя случай следва цитираната теорема на Szegö, тъй като, ако коефициентите на развитието

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

след известен индекс следват периодично, то очевидно тоя ред представя една рационална функция.

б) Фаберовите полиноми относно интервала $-1 \leq x \leq 1$ са полиномите на Чебишев $T_n(z)$. Кравата C_1 в случая е елипсата

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1. \tag{1,e}$$

От теорема I в случая се получава следния интересен резултат:

Ако коефициентите на реда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(z)$$

гдето $T_n(z)$ е n-я полином на Чебишев, вземат краен брой стойности $d_1, d_2, \ldots, d_s$, то елипсата (1,e) е естествена граница на функцията $f(z)$, (която е аналитична във вътрешността на тази елипса) щом стойностите на коефициентите c_n следват след всеки индекс непериодично.

3. В точка 1 на тоя параграф установихме, че ако редът

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z) \tag{1,8}$$

коефициентите на който са ограничени, е продължим вън от кривата C_1, то при всяко $\varepsilon>0$ има едно N, така че при $n>N$ е изпълнено неравенството

$$(1,\varepsilon)\qquad |a_0c_n+a_1c_{n+1}+\cdots+a_{r-1}c_{n+r-1}+c_{n+r}|<\varepsilon$$

гдето $a_0, a_1,\ldots,a_{r-1}$ зависят само от избора на ε, но не и от n.

Този резултат позволява да се изведат няколко нови теореми.

В тая точка ние ще покажем, че ако числата c_n вместо да вземат краен брой стойности, притежават краен брой точки на сгъстяване $d_1, d_2,\ldots,d_s$, $s>1$ съществува следното обобщение на теорема I:

Ако членовете на подредиците на редицата c_n, които дефинират различните точки на сгъстяване на c_n не следват след никой индекс периодично, то редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(z)$ е непродължим вън от C_1.

По-точно, изказаното твърдение означава следното:

Нека коефициентите на реда

$$(1,9)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(z)$$

са ограничени и притежават краен брой точки на сгъстяване d_1. $d_2,\ldots,d_s$, $s>1$. Да разделим редицата $\{c_n\}$ точно на s подредици, така че

1. Всяко c_n да принадлежи на една и само една от тия подредици.
2. Всяка подредица да има само една точка на сгъстяване
3. Две различни подредици да имат различни точки на сгъстяване.

Да означим след това като r-та оная подредица на $\{c_n\}$, която има за единствена точка на сгъстяване числото d_r.

Нека c_n да принадлежи на k_n-тата подредица, гдето k_n е някое от числата $1, 2,\ldots,s$. Да си образуваме редицата

$$(1,10)\qquad k_1,\ k_2,\ k_3,\ldots$$

членовете на която могат да вземат само стойностите $1, 2,\ldots,s$

Обобщението на теорема I може да се изкаже така:

Теорема I'. Нека редицата на коефициентите на реда (1,9) е ограничена и има краен брой точки на сгъстяване $d_1, d_1,\ldots,d_s$, $s>1$. Ако членовете на редицата (1,10) следват след всеки индекс непериодично то редът (1,9) е непродължим аналитично вън от кривата C_1.

Доказателство. Нека

$$|d_i-d_j|\geqq d>0,\quad i\neq j$$

и

$$(1,11)\qquad c_\nu=d_{k_\nu}+\varepsilon_{k_\nu}.$$

Да разгледаме оная съвокупност M_p от индекси ν, за която $k_\nu = p$, гдето p е някое от числата $1, 2, \ldots, s$. Тогава, ако ν взема стойности само от съвокупността M_p, то

$$\lim_{\nu\to\infty} c_\nu = d_p$$

и следователно

$$(1,12) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_{k_\nu} = 0.$$

Да предположим, че редът (1,9) е продължим вън от C_1.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Има един индекс N, така че при $n > N$ е изпълнено неравенството $(1, \varepsilon)$. Съгласно (1,12) ще има един индекс N', така че при $n > N'$

$$(1,13) \qquad |a_0\varepsilon_{k_n} + a_1\varepsilon_{k_{n+1}} + \cdots + a_{r-1}\varepsilon_{k_{n+r-1}} + \varepsilon_{k_{n+r}}| < \varepsilon.$$

От $(1,\varepsilon)$, (1,11) и (1,13), при $\varepsilon = \frac{d}{4}$ следва, че за $n > \max(N', N)$ е изпълнено неравенството

$$|a_0 d_{k_n} + a_1 d_{k_{n+1}} + \cdots + a_{r-1} d_{k_{n+r-1}} + d_{k_{n+r}}| < \frac{d}{2}.$$

Тъй като числата d_{k_μ} вземат краен брой стойности, теоремата е установена.

Теорема I може да се изкаже още в следната форма, дадена от Szegö [12] на съответната теорема за степенните редове:

Теорема I' (*S*). Нека редицата от коефициентите на реда (1,9) е ограничена и има краен брой точки на сгъстяване, т. е. нека

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \Phi_n(z),$$

гдето членовете на редицата a_n вземат само краен брой стойности, докато редицата ε_n клони към нула. Ако функцията $f(z)$ е продължима вън от кривата C_1, то стойностите на a_n след известен индекс следват непериодично.

Изобщо, както ще видим, с помощта на резултата, изказан в началото на тая точка, за редовете по полиноми на Фабер, редицата от коефициентите на които е ограничена, могат да се пренесат почти всички теореми за степенните редове, установени в работите [7,8] и [13]. Това ще установим в следващия параграф.

§ 2. Развития по полиноми на Фабер с ограничени редици на коефициентите.

1. Нека $\varrho < 1$ и редицата на коефициентите на реда

$$(2,1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$$

е ограничена и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 1.$$

Тогава вътрешността на кривата C_1 е областта на сходимост на (2, 1).

Ще докажем следната

Теорема II. Нека редицата на коефициентите на реда (2, 1) е ограничена и притежава следното свойство:

Съществува една безкрайна редица от индекси

$$n_1, n_2, n_3, \ldots,$$

така, че

1. $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k} = a$

2. $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k-r} = \beta \neq a$

при всяко фиксирано, цяло, положително r.

В такъв случай редът (2, 1) е непродължим аналитично вън от кривата C_1.

Доказателство. Нека $|\beta - a| = 2\delta > 0$. Ако редът (2,1) е продължим вън от кривата C_1 за всяко $\varepsilon > 0$ съществува едно N и една редица от числа

$$a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$$

така, че при $n > N$ е изпълнено неравенство $(1, \varepsilon)$.

При $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$ и $n_k - r > N$ от $(1, \varepsilon)$ получаваме:

$$|a_0 c_{n_k-r} + a_1 c_{n_k-r+1} + \cdots + a_{r-1} c_{n_k-1} + c_{n_k}| < \frac{\delta}{3} \tag{2,2}$$

а при $n_m - r - 1 > N$:

$$|a_0 c_{n_m-r-1} + a_1 c_{n_m-r} + \cdots + a_{r-1} c_{n_m-2} + c_{n_m-1}| < \frac{\delta}{3}. \tag{2,3}$$

Тъй като $\lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k} = a$, а $\lim\limits_{m\to\infty} c_{n_m-1} = \beta$, има един индекс N', така че при $n_k > N'$, $n_m > N'$

$$|c_{n_k} - c_{n_m-1}| > \delta. \tag{2,4}$$

От (2,2) и (2,3) следва, че

$$\begin{aligned} |c_{n_k} - c_{n_m-1} + a_0(c_{n_k-r} - c_{n_m-r-1}) + a_1(c_{n_k-r+1} - c_{n_m-r}) \\ + \cdots + a_{r-1}(c_{n_k-1} - c_{n_m-2})| < \frac{2}{3}\delta. \end{aligned} \tag{2,5}$$

Тъй като по условие 2. на теоремата при фиксирани $s > 0$ и $p > 0$ имаме:

$$\lim_{k\to\infty} c_{n_k-s} = \lim_{m\to\infty} c_{n_m-p}$$

то има един индекс N'', така че при $n_k > N''$ и $n > N''$

$$(2,6)\qquad \begin{vmatrix} a_0(c_{n_k-r}-c_{n_m-r-1})+ \\ +a_1(c_{n_k-r+1}-c_{n_m-r})+\cdots+a_{r-1}(c_{n_k-1}-c_{n_m-2}) \end{vmatrix} < \frac{\delta}{3}.$$

От (2,5) и (2,6) следва, че при $n>\max(N+r, N', N'')$ е изпълнено неравенството

$$| c_{n_k} - c_{n_m-1} | < \delta,$$

което противоречи нм (2,4). С това теорема II е установена.

2. Ако в теорема II числото β и числата, които клонят към β са равни на нула, получаваме

Следствие I. Ако в реда

$$(2,7)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_{\lambda_n}(z),$$

редицата от коефициентите на който е ограничена, съществува една безкрайна редица от индекси n_i, $i=1, 2,\ldots$ за която са изпълнени условията:

$$(2,8)\qquad \lim (\lambda_{n_i+1}-\lambda_{n_i})=\infty$$

и

$$(2,9)\qquad \lim_{i\to\infty} c_{n_i}\neq 0$$

то той е непродължим аналитично вън от кривата C_1

Получената теорема е теорема за празнини и се свързва с някои наши предишни резултати относно една теорема на Mandelbrojt [9]. Същественото в получените резултати обаче не са празнините. Така от теорема II при $\alpha=0$ се получава и следното следствие:

Следствие II. Ако в реда (2,1), редицата от коефициентите на който е ограничена, съществуват две безкрайни редици от индекси n_1, $n_2,\ldots$ и m_1, $m_2,\ldots$ така, че

1. $\lim\limits_{k\to\infty} (n_k-m_k)=\infty$
2. $a_{n_k}=0$, за всяко n_k
3. $a_n=\beta\neq 0$ за всяко n, за което $m_k\leq n<n_k$, то той е непродължим аналитично вън от C_1.

3. От получените до тук резултати следват и някои нови следствия.

Така от теорема I получаваме:

Ако редицата от коефициентите на реда (1,9) има краен брой крайни точки на сгъстяване и ако дефинираната от същия ред аналитична функция има върху кривата C_1 само алгебрични особености, то редицата (1,10) е периодична след някой индекс.

Наистина, в противен случай, според теорема I, всяка точка от кривата C_1 би била особена за функцията дефинирана с (1,9). По условие обаче тя има само изолирани особени точки.

Също така, получените резултати ни дават възможност в някои случаи да определим редицата ε_n от множители $+1$ и -1 в теоремата на Fatou-Pólya ефективно.

Нека пак редът (1,9) да има само краен брой (s) крайни точки на сгъстяване. Ако редицата (1,10) е непериодична след всеки индекс, редът (1,9) е непродължим и $\varepsilon_n=1$ за всяко n. Ако редицата (1,9) е периодична след някой индекс, да подберем една безкрайна редица от индекси

$$n_1,\ n_2,\ n_3\ldots$$

която има следните свойства:

а) За всяко n_i, $i=1, 2,\ldots$, $k_{n_i}=q$, гдето k_{n_i} е n_i-я член на редицата (1,10), а q е някое фиксирано число от 1 до s вкл.

б) Каквото и да е цялото положително число r, равенството $n_i = n_{i+r}$ е нарушено за безкрайно много цели положителни стойности на i.

Нека сега в редицата ε_n, $n=1, 2,\ldots$ да положим: $\varepsilon_{n_i}=-1$ за всяко i и $\varepsilon_n=1$ за $n\neq n_i$.

В такъв случай редицата от коефициентите на реда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n c_n \Phi_n(z)$$

е ограничена, има краен брой точки на сгъстяване и съответната ѝ редица (1,10) е непериодична. Според теорема I този ред е непродължим аналитично вън от C_1.

Установените в тоя параграф дотук резултати представят пренасяне на съответни теореми за степенните редове от нашите работи [7,8]. Сега ще пренесем един резултат на Szegő от [13].

Теорема II. Нека коефициентите на реда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\Phi_n(z)$$

вземат краен брой стойности $d_1, d_2,\ldots, d_k$, с изключение на една редица от коефициенти

$$c_{n_1},\ c_{n_2},\ c_{n_3},\ldots$$

които удовлетворяват следните условия:

а) $\lim\limits_{\nu\to\infty} sup\ (n_\nu-n_{\nu-1})=\infty$

б) те образуват една ограничена редица

в) те имат едно отлично от нула разстояние от числата d_1, d_2, …, d_k.

В такъв случай функцията $f(z)$ е аналитично непродължима вън от кривата C_1.

Наистина, както показа Szegö [13], ако редицата c_n, $n=0, 1, 2,\ldots$ удовлетворява на условията в теорема II, то не е възможно да съществува неравенството от вида $(1,\varepsilon)$.

§ 3. *Други обобщения на теоремата на Szegö.*

1. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две положителни функции, дефинирани за $x>a$. Използувайки една аналогия, ние ще пишем

$$f(x)=\overline{O}(g(x))$$

ако при $x\to\infty$ отношението $\frac{f(x)}{g(x)}$ има крайни и отлични от нула точки на сгъстяване.

Теорема III. Нека коефициентите на реда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\gamma_n\Phi_n(z) \tag{3,1}$$

удовлетворяват на условията:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=1, \tag{a_0}$$

$$|\gamma_n|=\overline{O}(n^a), \tag{a}$$

гдето $a\geqq 0$ е произволно число,
(c) редицата $c_1, c_2,\ldots,c_n,\ldots$ взема само краен брой стойности $d_1, d_2,\ldots, d_k$, $k>1$.

Редът (3,1) е непродължим аналитично вън от кривата C_1, ако членовете на редицата $\{c_n\}$ след всеки индекс следват непериодично.

2. Преди да пристъпим към доказателството на теорема III ще получим като следствие от нея някои нови резултати.

Да означим с $n_s(\lambda)$ броя на членовете в отреза $c_0, c_1,..c_\lambda$ на редицата c_n от теорема III, които не са равни на числото d_s, гдето d_s е едно фиксирано число от редицата $d_1, d_2,\ldots,d_k$.

Да приемем, че редицата c_n, $n=0, 1, 2,\ldots$ е периодична за $n>N$ и нека за такива n да имаме: $\gamma_{n+r}=\gamma_n$. Нека между числата c_n, $c_{n+1},\ldots, c_{n+r-1}$ точно $m_s<r$ на брой да са равни на числото d_s. Ако тогава за $\lambda>N$:

$$\lambda=N+\lambda'=N+pr+q, \quad q<r$$

то

$$p(r-m_s)\leqq n_s(\lambda)<N+(p+1)(r-m_s)$$

и следователно

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{n_s(\lambda)}=\frac{r}{r-m_s}$$

за всяко s.

Т. е. изразът $\frac{\lambda}{n_s(\lambda)}$ клони при $\lambda\to\infty$ за всяко s към крайна, рационална граница щом членовете на c_n, $n=0, 1, 2,\ldots$ след някой индекс следват периодично.

Ако, следователно, за някое s

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{n_s(\lambda)}\neq\frac{p}{q}\quad\text{или}\quad\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{n_s(\lambda)}=\infty$$

гдето p и q са кои да са цели числа, то редицата c_n, $n=0, 1, 2,\ldots$ след всеки индекс ще бъде непериодична. От тук като вземем предвид теорема III получаваме

Теорема IV. Редът (3,1), който удовлетворява условията (a_0), (a) и (c) от теорема III е непродължим аналитично вън от кривата C_1, ако за някое s:

$$(\lambda)\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{n_s(\lambda)}\neq\frac{p}{q}\quad\text{или}\quad\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{n_s(\lambda)}=\infty$$

гдето p и q са кои да са цели положителни числа.

Ако в теорема IV положим $d_s=0$, получаваме

Следствие III. Нека редът

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_{\lambda_n}(z)$$

може да се представи във вида (3,1) за който са изпълнени условията (a_0), (a) и (c). Тогава той е непродължим аналитично вън от кривата C_1, ако е изпълнено условието

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n}\neq\frac{p}{q}$$

специално, ако

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n}=\infty,$$

гдето p и q са кои да са цели положителни числа.

Последният резултат представя пренасяне на теоремата на Fabry за класата от редове (3,1), които удовлетворяват условията (a_0), (a) и (c). Тъй като общата теорема за празнините на Fabry не е доказвана за разглежданите от нас развития, полученият резултат е нов.

3. Както при доказателството на теорема I, за да установим теорема III предварително ще докажем следната

Помощна теорема I'. Ако функцията

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(z)\tag{3,2}$$

гдето

$$|a_n|\leq a|\gamma_n|,\quad |\gamma_n|=\bar{O}(n^a),\tag{3,3}$$

$a>0$, $\alpha\geq0$, е регулярна в и върху някоя крива $\bar{C}_{1-\delta}$, и ако

$$s_n(z)=a_0+a_1\Phi_1(z)+\cdots+a_n\Phi_n(z)\tag{3,4}$$

то има един индекс N и едно число M, независящо от n и z, така щото върху $\overline{C}_{1-\delta}$ е изпълнено неравенството

$$(3,5) \qquad \left| \frac{g(z)-s_{n-1}(z)}{\gamma_n[\Phi(z)]^n} \right| < M.$$

Да изберем кривата $\overline{C}_{1-\delta'}$, $\delta'<\delta$, така че тя изцяло да съдържа във вътрешността си кривата $\overline{C}_{1-\delta}$, но същевременно толкова близо до $\overline{C}_{1-\delta}$, че $g(z)$ да остава и върху $\overline{C}_{1-\delta'}$, все още регулярна. Тогава и кривата $\Gamma_{1-\delta'}$ ще съдържа във вътрешността си $\Gamma_{1-\delta}$. Нека $w_1=\Phi(z_1)$ и $w_2=\Phi(z_2)$ означават точките, в които $\Gamma_{1-\delta'}$ сече окръжността $|w|=1$.

За да установим (3,5), достатъчно е да докажем, че има едно число M_1, независящо от z и n, така че върху $\overline{C}_{1-\delta'}$ да е изпълнено неравенството

$$|\Delta_n(z)| = \left| \frac{g(z)-s_{n-1}(z)}{\gamma_n[\Phi(z)]^n} (\Phi(z)-\Phi(z_1))^{\lambda+1} (\Phi(z)-\Phi(z_2))^{\lambda+1} \right| < M_1,$$

гдето $\lambda=[a]+1$, щом $n>N$.

Нека $n>N$. Ако положим $\gamma_n=\gamma'_n n^a$, то за всяко n ще имаме $|\gamma'_n|<L$, а за $n>N_1$, $|\gamma'_n|>l$, гдето L и l са независящи от n числа. Следователно, за произволни m и $n>N_1$, получаваме

$$(3,6) \qquad \left|\frac{\gamma'_m}{\gamma'_n}\right| < \frac{L}{l}.$$

Върху кривата $C_{1-\delta'}$ е валидно неравенството (1,7). Следователно като вземем предвид (3,6) върху дъгата от $\overline{C}_{1-\delta'}$, която съответствува на дъгата $|w|=1$, получаваме

$$|\Delta_n(z)| = \left| \frac{a_n\Phi(z)+a_{n+1}\Phi_{n+1}(z)+\cdots}{\gamma_n[\Phi(z)]^n} (\Phi(z)-\Phi(z_1))^{\lambda+1}(\Phi(z)-\Phi(z_2))^{\lambda+1} \right|$$

$$\leq \frac{3}{2}\, a \frac{L}{l}\left[1+\left(\frac{n+1}{n}\right)^a |\Phi(z)| + \left(\frac{n+2}{n}\right)^a |\Phi(z)|^2+\cdots\right].$$

$$|\Phi(z)-\Phi(z_1)|^{\lambda+1}\,|\Phi(z)-\Phi(z_2)|^{\lambda+1} < \frac{3}{2}\, a\, \frac{L}{l}[1+2^\lambda|\Phi(z)| +$$

$$3^\lambda|\Phi(z)|^2+\cdots]\,|\Phi(z)-\Phi(z_1)|^{\lambda+1}\,|\Phi(z)-\Phi(z_2)|^{\lambda+1}$$

$$< \frac{3}{2}\, a \frac{L}{l} \frac{P(|\Phi(z)|)}{(1-|\Phi(z)|)^{\lambda+1}} |\Phi(z)-\Phi(z_1)|^{\lambda+1}|\Phi(z)-\Phi(z_2)|^{\lambda+1},$$

гдето $P(x)$ е полином на x от степен $[a]$ с реални коефициенти, независящ от n. Следователно $P(|\Phi(z)|)$ остава изобщо върху $\overline{C}_{1-\delta'}$ под една постоянна граница $B>0$.

Понеже върху разглежданата дъга $|w|=|\Phi(z)|=1-\delta'$, то

$$|\Delta_n(z)|<\frac{3}{2}a\frac{L}{l}B\frac{4^\lambda}{\delta'^\lambda}.$$

Върху частите на $C_{1-\delta'}$, които отговарят на праволинейните отсечки на $\Gamma_{1-\delta'}$, лежащи в $|w|<1-\delta'$, като вземем предвид, че напр. върху първообраза през $\Phi(z_1)$ имаме

$$|\Phi(z)-\Phi(z_1)|=1-|\Phi(z)|,$$

получаваме

$$|\Delta_n(z)|<\frac{3}{2}a\frac{L}{l}B\,2^{\lambda+1}.$$

За външността на C_1 съществува едно число $S>0$, така че върху $\overline{C}_{1-\delta'}$ имаме $|g(z)|<S$.

Върху $\overline{C}_{1-\delta'}$, вън от C_1, получаваме, като вземем предвид (1,6')

$$\left|\frac{f(z)-s_{n-1}(z)}{\gamma_n[\Phi(z)]^n}\right|<\frac{S}{|\gamma_n|\,|\Phi(z)|^n}+$$

$$+\frac{a}{|\Phi(z)|}\left(\left|\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}\right|+\left|\frac{\gamma_{n-2}}{\gamma_n}\right|\frac{1}{|\Phi(z)|}+\cdots+\left|\frac{\gamma_0}{\gamma_n}\right|\frac{1}{|\Phi(z)|^{n-1}}\right)+$$

$$+\frac{a}{|\Phi(z)|}\left(\left|\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}\right|+\left|\frac{\gamma_{n-2}}{\gamma_n}\right|r+\cdots+\left|\frac{\gamma_0}{\gamma_n}\right|r^{n-1}\right)$$

$$<\frac{S}{l|\Phi(z)|^n}+\frac{a}{|\Phi(z)|}\frac{L}{l}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^a+\left(\frac{n-2}{n}\right)^a\frac{1+Ar}{|\Phi(z)|}+\cdots+\frac{1}{n^a}\frac{1+Ar^{n-1}}{|\Phi(z)|^{n-1}}\right]$$

$$<\frac{S}{l|\Phi(z)|^n}+a\frac{L}{l}\frac{1}{|\Phi(z)|-1}+a\frac{L}{l}\frac{A}{1-r}.$$

Ако $\overline{R}'$ е радиусът от голямата окръжност на $\Gamma_{1-\delta'}$, върху частите на $\overline{C}_{1-\delta'}$, вън от C_1, които отговарят на праволинейните отсечки на $\Gamma_{1-\delta'}$, намираме:

$$|\Delta_n(z)|<\frac{S}{l|\Phi(z)|^n}\cdot 2^\lambda(\overline{R}'-1)^{\lambda+1}+a\frac{L}{l}2^\lambda(\overline{R}'-1)^\lambda+a\frac{L}{l}\frac{A}{1-r}$$

$$<\frac{2^{\lambda+1}S(\overline{R}'-1)^{\lambda+1}}{l}+a\frac{L}{l}2^\lambda(\overline{R}'-1)^\lambda+a\frac{L}{l}\frac{A}{1-r}.$$

Върху първообраза на $|w|=\overline{R}'$ имаме

$$|\Delta_n(z)|<4^\lambda\left(\frac{S}{l}+\frac{aL}{(\overline{R}'-1)l}+a\frac{L}{l}\frac{1-r}{A}\right).$$

Както преди нека $\delta>0$ е така малко, че полиномът $Q\left(\frac{1}{w}\right)$ от помощна теорема II, който върху Γ_1 остава по абсолютна стойност по-малък от $\frac{1}{2}$ да има това свойство и върху $\Gamma_{1-\delta}$, като същевременно функцията $g(z)$ от (3,1) е регулярна върху $\overline{C}_{1-\delta}$. Ако $\varepsilon>0$ е произволно число, да повдигнем $Q\left(\frac{1}{w}\right)$ в такава степен, щото за получения полином

$$R\left(\frac{1}{w}\right)=a_0+\frac{a_1}{w}+\cdots+\frac{1}{w^r}.$$

да имаме

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{1-\delta}}\left|R\left(\frac{1}{w}\right)\right|\left|dw\right|<\frac{\varepsilon}{2M}, \tag{3,7}$$

гдето M е числото от помощна теорема I'.

Ако $\varepsilon_{n,k}=\frac{c_n}{c_{n+k}}$, $k=0,1,2,\ldots,r$, то от (a_0) следва, че $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_{n,k}=1$. Следователно, ако

$$R_n\left(\frac{1}{w}\right)=a_0\varepsilon_{n,0}+\frac{a_1\varepsilon_{n,1}}{w}+\cdots+\frac{\varepsilon_{n,r}}{w^r} \tag{3,8}$$

то върху $\Gamma_{1-\delta}$ имаме равномерно

$$\lim_{n\to\infty}R_n\left(\frac{1}{w}\right)=R\left(\frac{1}{w}\right) \tag{3,9}$$

От (3,9) и (3,7) следва. че има един индекс N', така че при $n>N'$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{1-\delta}}\left|R_n\left(\frac{1}{w}\right)\right|\left|dw\right|<\frac{\varepsilon}{2M}. \tag{3,7'}$$

Както преди, от (3,1) при $k\geqq n$, получаваме

$$c_k\gamma_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{C}_{1-\delta}}\frac{g(z)-s_{n-1}(z)}{[\Phi(z)]^{k+1}}\,dw,$$

$w=\Phi(z)$, от гдето, според (3,5) и (3,7'), получаваме:

$$\left|a_0c_n+a_1c_{n+1}+\cdots+a_{r-1}c_{n+r-1}+c_{n+r}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\overline{C}_{1-\delta}}\frac{g(z)-s_{n-1}(z)}{\gamma_n[\Phi(z)]^{n+1}}R_n\left(\frac{1}{w}\right)dw\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\overline{C}_{1-\delta}}\left|\frac{g(z)-s_{n-1}(z)}{\gamma_n[\Phi(z)]^{n+1}}\right|\left|R_n\left(\frac{1}{w}\right)\right|\left|dw\right|<\frac{M}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{1-\delta}}\left|R_n\left(\frac{1}{w}\right)\right|\left|dw\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

При $\varepsilon = \delta \geqq |d_j - d_i|$, $j \neq i$, както преди, от последното неравенство следва, че след известен индекс, членовете на редицата $\{c_n\}$ трябва да следват периодично, което противоречи на условието на теоремата.

4. Да означим с А класата на редовете от вида

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \gamma_n \Phi_n(z) \tag{A}$$

гдето

$$\lim \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 1 \tag{a_0}$$

$$\gamma_n = \overline{O}(n^a), \quad a \geqq 0, \tag{a}$$

а редицата $\{c_n\}$ е ограничена.

Изведеният в края на последната точка резултат, може да се изкаже така:

Ако $g(z) \varepsilon A$ е продължима вън от C_1, то при всяко $\varepsilon > 0$ съществува една редица от числа $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ и един индекс N, така, че при $n > N$ е изпълнено неравенството:

$$|a_0 c_n + a_1 c_{n+1} + \cdots + a_{r-1} c_{n+r-1} + c_{n+r}| < \varepsilon. \tag{3, ε}$$

Следователно условието, което трябва да изпълнява редицата $\{c_n\}$, за да бъде функцията $g(z) \varepsilon A$ продължима вън от кривата C_1 е същото, което трябва да изпълнява редицата $\{c_n\}$, за да бъде продължима функцията $f(z)$ от (1,8).

От това следва, че едновременно със съответните резултати в § 1 и § 2 са доказани следните теореми:

Теорема II′. Нека $g(z) \varepsilon A$ и редицата $\{c_n\}$ удовлетворява следните условия:

Съществува една безкрайна редица от индекси $n_1, n_2, n_3, \ldots$, така че:

1. $\lim\limits_{k \to \infty} c_{n_k} = \alpha$
2. $\lim\limits_{k \to \infty} c_{n_k - r} = \beta \neq \alpha$

при всяко фиксирано, цяло, положително r.

В такъв случай $g(z)$ е непродължима вън от C_1.

Следствие I′. Ако редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n' \gamma_n' \Phi_{\lambda_n}(z),$$

гдето $c_n' = c_{\lambda_n}$ и $\gamma_n' = \gamma_{\lambda_n}$ принадлежи на класата А, то той е непродължим вън от C_1, ако съществува една редица индекси n_i, $i = 1, 2, \ldots$, за която

$$\lim_{i\to\infty} (\lambda_{n_{i+}} - \lambda_{n_i}) = \infty$$

и

$$\lim_{i\to\infty} c'_{n_i} \neq 0.$$

Следствие II'. Нека $g(z) \varepsilon A$. Ако съществуват две безкрайни редици от индекси m_i и n_i, така че

1. $\lim_{k\to\infty} (n_k - m_k) = \infty$
2. $c_{n_k} = 0$
3. $c_n = \beta \neq 0$, за всяко n за което $m_k \leq n < n_k$, то той е непродължим вън от C_1.

Теорема I''. Нека $g(z) \varepsilon A$ и редицата $\{c_n\}$ има краен брой точки на сгъстяване. Ако членовете на подредиците на $\{c_n\}$, които дефинират различните точки на сгъстяване на c_n не следват след никой индекс периодично, то $g(z)$ е непродължима вън от C_1.

Теорема V. Ако $g(z) \varepsilon A$ и редицата c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворява на условията в теорема III, то $g(z)$ е непродължима вън от кривата C_1.

Освен това, за функциите от класата А ще пренесем една друга теорема на Szegö от [12].

Предварително ще забележим, че ако $c_n = O(n^s)$ и $\lim \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 1$, $\gamma_n = \overline{O}(n^a)$, $a \geqq -s$, то функцията

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \gamma_n \Phi_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n' \gamma_n' \Phi_n(z)$$

където $c_n' = \frac{c_n}{n^s}$, $\gamma_n' = \gamma_n n^s$, $n = 1, 2, \ldots$ принадлежи на класата А.

Теорема VI. Ако $g(z) \varepsilon A$ и $c_n = O(n^s)$ с изключение на една безкрайна редица от коефициенти

$$c_{n_1}, \quad c_{n_2}, \ldots, c_{n_\nu}, \ldots$$

за които

а) $\lim_{\nu\to\infty} sup (n_\nu - n_{\nu-1}) = \infty$

б) $c_{n_\nu} = \overline{O}(n_\nu^s)$

то $g(z)$ е аналитично непродължима вън от C_1.

Доказателство. Тъй като $g(z)$ може да се напише във вида

$$\sum \frac{c_n}{n^s} \cdot n^s \gamma_n \Phi_n(z),$$

то ако е продължима вън от C_1 на всяко $\varepsilon > 0$ ще съответства една редица от числа $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ и един индекс N, така че при $n>N$ ще имаме

$$\left| a_0 \frac{c_n}{n^s} + \frac{c_{n+1}}{(n+1)^s} + \cdots + a_{r-1} \frac{c_{n+r-1}}{(n+r-1)^s} + \frac{c_{n+r}}{(n+r)^s} \right| < \varepsilon.$$

От последното неравенство и условията на теорема VI следва обаче, че $\lim sup \frac{|c_{n_\nu}|}{n_\nu^s} < \varepsilon$, което противоречи на условието б).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hadamard, S. Mandelbrojt. La Série de Taylor. „Scientia", № 41, avril 1926.
2. A. Ostrowski. Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften. 1921, стр. 557—565.
3. Fabry. Annales scientifiques de l'Ecole Normale superieure. T. 13, 1896, стр. 381—382.
4. Fatou. Acta mathematica. T. 30, стр, 335.
5. A. Hurwitz u. G. Pólya. Acta mathematica. T. 40, стр. 180.
6. G. Szegó Sitzungsberichte der prenssischen Akademie der Wissenschaften. 1922, стр. 88—91.
7. Л. Илиев Годишник на Соф. университет, физ. мат. фак. Т. 41, кн. 1, стр. 31—41.
8. Л. Илиев. Годишник на Соф. университет, физ. мат. фак. Т. 42, кн. 1, стр. 67—81.
9. Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete. T. 38, етр. 230, Boas, jr., R. P.
10. С. Я. Альпер. ДАН СССР.
11. Т. И. Краснощекова. ДАН СССР.
12. G. Szegö. Mathematische Annalen. T. 87, стр. 90—111.