ВЪРХУ ПОЛЯРНИТЕ ОСОБЕНИ ТОЧКИ НА СТЕПЕННИТЕ РЕДОВЕ

От Любомир Чакалов

Теоремите, които доказваме в настоящата работа, дават възможност да съдим за съществуването на неполярни особени точки върху окръжността на сходимост на един Тейлоров ред при непосредственото продължение на представения чрез него елемент на аналитична функция. На първо място ще докажем следната

Теорема I. Ако редицата на коефициентите на степенния ред

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} c_n z^n, \text{ гдето } \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}=1, \tag{1}$$

е ограничена, възможни са два случая: или $f(z)$ има върху единичната окръжност $|z|=1$ поне една особена точка различна от полюс, или всички особени точки на $f(z)$ върху същата окръжност са прости полюси.

Достатъчно е да докажем, че ако всички особени точки на $f(z)$ върху окръжността $|z|=1$ са полюси, те са непременно прости. Да допуснем противното, а именно, че всички особени точки на $f(z)$ върху окръжността $|z|=1$ са полюси и че между тях има и многократни. В такъв случай техният брой е краен. Нека $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_q}$ да са полюсите върху тази окръжност от най-висока кратност, която ще означим с s. По допускане s е по-голямо от 1. Да означим още с $R(z)$ сумата от характеристичните функции, отговарящи на всички полюси на $f(z)$ върху окръжността $|z|=1$, включително и тези с кратност по-малка от s, тъй че $R(z)$ има вида

$$R(z)=\sum_{k=1}^{q}\frac{A_k}{(1-a_k z)^s}+\sum_{k=1}^{q_1}\frac{B_k}{(1-b_k z)^{s-1}}+\cdots+\sum_{k=1}^{q_{s-1}}\frac{P_k}{1-p_k z},$$

гдето

$$|a_k|=|b_k|=\cdots=|p_k|=1$$

и коефициентите A_k са всички различни от нула. Понеже разликата

$$(2) \qquad f(z)-R(z)=\sum_{0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$$

представя холоморфна функция на z в един кръг с център в точката 0 и с радиус по-голям от 1, то $\lim \varepsilon_n = 0$. Като сравним коефициентите пред еднаквите степени на z от двете страни на (2), получаваме:

$$(3) \qquad c_n=\binom{s+n-1}{n}\sum_{k=1}^{q} A_k a_k^n+$$

$$+\binom{s+n-2}{n}\sum_{k=1}^{q_1} B_k b_k^n+\cdots+\binom{n}{n}\sum_{k=1}^{q_{s-1}} P_k p_k^n+\varepsilon_n.$$

Тук редиците с n-ти членове

$$c_n, \quad \sum_{k=1}^{q} A_k a_k^n, \quad \sum_{k=1}^{q_1} B_k b_k^n, \ldots, \quad \sum_{k=1}^{q_{s-1}} P_k p_k^n$$

са ограничени; следователно като разделим почленно двете страни на (3) с $\binom{s+n-1}{n}$ и вземем предвид, че $\binom{l+n}{n}$ представя при $l=0, 1, 2, \ldots$ полином на n от степен l, получаваме чрез граничния преход $n \to \infty$

$$\lim \sum_{k=1}^{q} A_k a_k^n = 0.$$

Да положим

$$\sum_{k=1}^{q} A_k a_k^n = u_n, \quad \text{гдето} \quad \lim u_n = 0;$$

да означим освен това с V Вандермондовата детерминанта

$$V=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & a_q \\ & & & & \\ & & \cdot & & \cdot \\ a_1^{q-1} & a_2^{q-1} & \cdots & & a_q^{q-1} \end{vmatrix},$$

която, както е известно, е различна от 0, и с $V_k^{(m)}$ детерминантата, която се получава от V като заменим елементите от k-тия ѝ стълб с $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+q-1}$. Като решим относно A_k уравненията

$$A_1a_1^m+A_2a_2^m+\cdots+A_qa_q^m=u_m$$
$$A_1a_1^{m+1}+A_2a_2^{m+1}+\cdots+A_qa_q^{m+1}=u_{m+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_1a_1^{m+q-1}+A_2a_2^{m+q-1}+\cdots+A_qa_q^{m+q-1}=u_{m+q-1},$$

получаваме

$$A_ka_k^mV=V_k^{(m)}. \tag{4}$$

Но когато m расте, $V_k^{(m)}$ клони към 0 (понеже елементите на k-тия стълб на $V_k^{(m)}$ клонят към 0), докато модулът на лявата страна на (4) запазва постоянна стойност, различна от 0. Така допускането, че $f(z)$ притежава многократни полюси, ни доведе до противоречие. С това теорема I е доказана.

Сега ще докажем, че при предположенията на теорема I всеки полюс на $f(z)$ върху окръжността $|z|=1$ е прост независимо от това дали съществуват други особени точки върху същата окръжност и какъв е техният характер. Да допуснем именно, че

$$|c_n|<A \text{ за } n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

и че точката $z=z_0$ върху окръжността $|z|=1$ е полюс на функцията (1). Без ограничение на общността можем да приемем, че $z_0=1$. Тогава, ако a е някое реално число между 0 и 1, развитието $f(z)=\sum\limits_0^\infty \gamma_n(z-a)^n$ по степените на $z-a$ има радиус на сходимост $1-a$ и коефициентът γ_n се изразява чрез реда

$$\gamma_n=\sum_{k=0}^\infty \binom{n+k}{n}c_{n+k}a^k.$$

Следователно

$$|\gamma_n|<A\sum_{k=0}^\infty\binom{n+k}{n}a^k=A(1-a)^{-n-1}$$

откъдето се вижда, че $|(1-a)^n\gamma_n|<\dfrac{A}{1-a}$. Като приложим теорема I за реда

$$f(a+(1-a)z')=\sum_0^\infty(1-a)^n\gamma_nz'^n,$$

чиито коефициенти са ограничени и който няма други особени точки в своя кръг на сходимост $|z'|\leq 1$ освен полюса $z'=1$, получаваме

Теорема II. Ако редицата на коефициентите на реда Σc_nz^n е ограничена и радиусът му на сходимост е равен на 1, то всички (евентуални) полюси на $f(z)$ върху окръжността $|z|=1$ са прости.

Още по-точни резултати се получават, ако предположим допълнително, че съществува границата $\lim c_n$.

Теорема III. Ако $\lim c_n = 0$, функцията $f(z) = \Sigma c_n z^n$ няма полюси върху окръжността $|z| = 1$.

От условието $\lim c_n = 0$ следва именно, че радиусът на сходимост на дадения ред е най-малко 1. Очевидно достатъчно е да се докаже теоремата при предположение, че този радиус е равен на 1. Според теорема II всеки полюс на $f(z)$ върху окръжността $|z| = 1$ трябва да бъде прост. Да допуснем, че точката $z = 1$ е полюс на $f(z)$ и да означим, както и по-горе, с a едно реално число между 0 и 1. Тогава Тейлоровото развитие

$$\varphi(z') = f(a + (1-a)z') = \sum_0^\infty \beta_n z'^n \tag{5}$$

има радиус на сходимост равен на 1 и единствената особена точка на този ред върху окръжността $|z'| = 1$ е полюсът $z' = 1$. Но от $\lim c_n = 0$ следва $\lim \beta_n = 0$, защото ако си вземем произволно $\varepsilon > 0$, то за всички достатъчно големи n имаме $|c_n| < \varepsilon(1-a)$ и

$$|\beta_n| = \left| (1-a)^n \sum_{k=0}^\infty \binom{n+k}{n} c_{n+k} a^k \right| \leq (1-a)^n \sum_{k=0}^\infty \binom{n+k}{n} \varepsilon (1-a) a^k =$$

$$= \varepsilon (1-a)^n (1-a)(1-a)^{-n-1} = \varepsilon.$$

Понеже от друга страна полюсът $z' = 1$ на $\varphi(z')$ е прост и характеристичната му функция има вида $\frac{A}{1-z'}$, то функцията $\varphi(z') - \frac{A}{1-z'}$ няма особена точка върху окръжността $|z'| = 1$ и вътре в нея, тъй че тя се развива в ред от вида $\Sigma b_n z'^n$, чийто радиус на сходимост е по-голям от 1. Следователно $\lim b_n = 0$. Но от

$$\varphi(z') - \frac{A}{1-z'} = \sum_0^\infty b_n z'^n$$

заключаваме, като развием и лявата страна в ред по степените на z', че $\beta_n - A = b_n$, което не е възможно, тъй като $\lim \beta_n = \lim b_n = 0$, докато резидуумът $-A$ е различен от 0. И така допускането, че точката $z = 1$ е полюс на $f(z) = \Sigma c_n z^n$, води непременно до противоречие. До също такова противоречие води и допускането, че друга някоя точка z_0 върху окръжността $|z| = 1$ е полюс на $f(z)$, защото чрез трансформацията $z' = \frac{z}{z_0}$ даденият степенен ред преминава в реда $\Sigma c'_n z'^n$, за който точката $z' = 1$ би била полюс. А това, както видяхме, не е възможно поради $\lim c'_n = \lim z_0^n c_n = 0$.

Теорема IV. Ако безкрайната редица

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

клони към някоя граница c, различна от 0, единственият полюс на $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ върху окръжността на сходимост може да бъде точката $z=1$. Ако тази точка е действително полюс на $f(z)$, съответната му характеристична функция е равна на $\frac{c}{1-z}$.

Доказателството на тази теорема се основава на теорема III. Да си образуваме именно разликата

$$g(z)=f(z)-\frac{c}{1-z}=\sum_{0}^{\infty} c'_n z^n$$

гдето $c'_n=c_n-c$, $\lim c'_n=0$. Според теорема III $g(z)$ няма полюси върху окръжността $|z|=1$, откъдето следва, че единственият полюс на $f(z)$ върху тази окръжност може да бъде точката $z=1$; в случай че тя е полюс на $f(z)$, съответната му характеристична функция е равна на $\frac{c}{1-z}$.

Примерите

$$f(z)=\sum_{1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)z^n \quad \text{и} \quad f(z)=\sum_{1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)z^n$$

показват, че е възможно при $\lim c_n=1$ точката $z=1$ да бъде или да не бъде полюс на $f(z)$.

Да разгледаме по-нататък случая, когато редицата $\{c_n\}$ на коефициентите не е ограничена, но $\lim\frac{c_n}{n}=0$. Методът който приложихме при доказването на теорема I, ни дава възможност да установим и в този случай, че $f(z)=\sum c_n z^n$ не притежава многократен полюс върху окръжността $|z|=1$. От друга страна всички особени точки на $f(z)$ по тази окръжност не могат да бъдат полюси, защото ако допуснем противното и означим с $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_q}$ различните полюси на $f(z)$ по окръжността $|z|=1$ и с $\frac{A_k}{1-a_k z}$ характеристичната функция за полюса $\frac{1}{a_k}$, то редът

$$\sum_{0}^{\infty}\varepsilon_n z^n = f(z)-\sum_{1}^{q}\frac{A_k}{1-a_k z}$$

трябва да има радиус на сходимост по-голям от 1, тъй че $\lim \varepsilon_n=0$. А това не е възможно, защото от равенството

$$c_n=\varepsilon_n+\sum_{1}^{q} A_k a_k^n \quad \text{би следвало, че} \quad |c_n|\leq|\varepsilon_n|+\sum_{1}^{\infty}|A_k|,$$

т. е. че редицата $\{c_n\}$ е ограничена — противно на нашето допускане. Така ние доказахме

Теорема V. Ако редицата $\{c_n\}$ на коефициентите на реда (1) не е ограничена, но $\lim \frac{c_n}{n} = 0$, то редът притежава поне една особена точка върху окръжността $|z| = 1$, която не е полюс.

Методите, които приложихме дотук, ни дават възможност да получим много по-общи резултати. Един от тези резултати е

Теорема VI. Ако функцията $f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n$ е холоморфна в кръга $|z| < 1$ и няма други особени точки върху периферията на този кръг освен полюси, то редицата на коефициентите c_n удовлетворява следните условия:

1) Числото $\lambda = \overline{\lim} \frac{\log |c_n|}{\log n}$ е цяло и неотрицателно;

2) $$0 < \overline{\lim} \frac{|c_n|}{n^\lambda} < \infty.$$

Едва ли е нужно да добавим, че в първата от тези формули n пробягва само такива цели значения по-големи от 1, за които c_n е различно от нула. От това ограничение обаче можем да се освободим, ако се условим да приписваме на $\log |c_n|$ стойността $-\infty$, когато $c_n = 0$.

Допускайки, че функцията $f(z)$ е холоморфна в кръга $|z| < 1$ и че тя няма други особени точки върху периферията му освен полюси, ще означим с $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_q}$ онези от полюсите върху окръжността $|z| = 1$, които имат най-висока кратност $s \geqq 1$ и с $R(z)$ сумата от характеристичните функции, отговарящи на всевъзможните полюси на $f(z)$ върху тази окръжност, включително и на полюсите с кратност по-малка от s, ако има такива. Очевидно функцията $R(z)$ има вида

$$R(z) = \sum_{1}^{q} \frac{A_k}{(1 - a_k z)^s} + \sum_{1}^{q_1} \frac{B_k}{(1 - b_k z)^{s-1}} + \cdots + \sum_{1}^{q_{s-1}} \frac{P_k}{1 - p_k z},$$

гдето $|a_k| = |b_k| = \cdots = |p_k| = 1$ и освен това коефициентите A_k са всички различни от 0. Понеже разликата $f(z) - R(z)$ представя холоморфна функция в кръг с център в точката 0 и с радиус по-голям от 1, то коефициентите на Тейлоровото развитие

$$f(z) - R(z) = \sum_{0}^{\infty} \varepsilon_n z^n \tag{6}$$

клонят към 0 ($\lim \varepsilon_n = 0$). Като развием в редове по степените на z отделните събираеми на $R(z)$ и сравним коефициентите пред z^n от двете страни на равенство (6), получаваме

$$(7) \qquad c_n = \binom{n+s-1}{n} \sum_1^q A_k a_k^n +$$

$$+\binom{n+s-2}{n} \sum_1^{q_1} B_k b_k^n + \cdots + \binom{n}{n} \sum_1^{q_{s-1}} P_k p_k^n + \varepsilon_n.$$

Да разгледаме безкрайната редица

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots$$

с n-ти член

$$u_n = \sum_{k=1}^{q} A_k a_k^n.$$

Ще докажем, че за тази редица е в сила следната

Помощна теорема. *Ако $a_1, a_2, \ldots, a_q$ са q различни числа с модули равни на 1 и ако числата $A_1, A_2, \ldots, A_q$ са всички различни от 0, то безкрайната редица с n-ти член $u_n = \sum_{k=1}^{q} A_k a_n^k$ е ограничена, но не клони към 0.*

И наистина от $|u_n| \leqq \sum_1^q |A_k|$ се вижда, че редицата $\{u_n\}$ е ограничена. Освен това, както видяхме при доказателството на теорема I, допускането, че $\lim u_n = 0$, води към противоречие.

Като следствие от току що доказаната помощна теорема заключаваме, че $\overline{\lim} |u_n| = \mu$ е крайно положително число.

Да разделим на n^{s-1} двете страни на (7) и да оставим n да расте. Като вземем предвид, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{s-1}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{s-1}} \binom{n+l}{n} = 0 \quad \text{за} \quad 0 \leq l < s-1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{s-1}} \binom{n+s-1}{n} = \frac{1}{(s-1)!}, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{k=1}^{q} A_k a_k^n \right| = \mu > 0,$$

получаваме

$$(8) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|c_n|}{n^{s-1}} = \frac{\mu}{(s-1)!} = A,$$

гдето A е някое крайно положително число. Релацията (8) показва преди всичко, че редицата $\left\{ \frac{|c_n|}{n^{s-1}} \right\}$ е ограничена:

$$|c_n| < B n^{s-1},$$

откъдето следва

$$\log |c_n| < \log B + (s-1) \log n \quad \text{и}$$

(9) $$\overline{\lim}\frac{\log|c_n|}{\log n}=\lambda\leq s-1.$$

От друга страна пак от (8) се вижда, че при $0<C<A$ неравенството $\frac{|c_n|}{n^{s-1}}>C$ е удовлетворено за безброй значения на n. За такива значения на n имаме $\log|c_n|>(s-1)\log n+\log C$ и следователно

(10) $$\overline{\lim}\frac{\log|c_n|}{\log n}=\lambda\geq s-1.$$

От (9) и (10) заключаваме, че

$$\overline{\lim}\frac{\log|c_n|}{\log n}=\lambda=s-1.$$

С това теорема VI е доказана напълно, понеже $s-1$ е цяло неотрицателно число; същевременно от доказателството ѝ се вижда, че цялото число λ е равно на $s-1$, гдето s е най-високата кратност на полюсите върху единичната окръжност.

От теорема VI следва непосредствено, че при $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}=1$ функцията $f(z)=\sum\limits_0^\infty c_nz^n$ притежава върху окръжността $|z|=1$ поне една особена точка различна от полюс, ако числото $\lambda=\overline{\lim}\frac{\log|c_n|}{\log n}$ не е цяло неотрицателно число, или пък ако λ е цяло неотрицателно число, но редицата $\left\{\frac{|c_n|}{n^{s-1}}\right\}$ клони към нула или е неограничена.

Може да се докаже също едно обобщение на теореми II и III, което гласи така:

Теорема VII. Ако за някое цяло $\lambda\geq0$ редицата с n-ти член $\frac{|c_n|}{n^\lambda}$ е ограничена, то функцията $\sum\limits_0^\infty c_nz^n$ не може да притежава полюс с кратност по-голяма от $\lambda+1$. Ако освен това $\lim\frac{c_n}{n^\lambda}=0$, кратността на всеки полюс на $f(z)$ върху единичната окръжност е най-много равна на λ.

Нека забележим изрично, че условията на теорема VII не изключват възможността функцията $f(z)$ да има евентуално и други особени точки върху единичната окръжност освен полюси. От условията на теорема VII следва лесно, че $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}\leq1$, тъй че радиусът на сходимост на дадения ред е най-малко 1. Да допуснем, че $f(z)$ притежава s-кратния полюс z_0 върху окръжността $|z|=1$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $z_0=1$. Лесно е да се види тогава, че ако α е някое положително число между 0 и 1, функцията $\varphi(z)=f[\alpha+(1-\alpha)z]$ е холоморфна в кръга $|z|<1$ и няма други особени точки върху периферията му освен s-кратния полюс $z=1$. Тейлоровото развитие на $\varphi(z)$ по степените на z има вида:

$$\varphi(z)=\sum_{0}^{\infty}\beta_n z^n, \quad \text{където} \quad \beta_n=(1-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Ще докажем най-напред, че редицата $\left\{\frac{\beta_n}{n^\lambda}\right\}$ е също ограничена и че тя клони към нула, в случай че $\lim\frac{c_n}{n^\lambda}=0$. По допускане съществува положително число M тъй, че да имаме

$$|c_n|<M\binom{n+\lambda}{n} \quad \text{за} \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Но

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}c_{n+k}a^k,$$

$$\frac{1}{n!}|f^{(n)}(a)|\leq M\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}\binom{n+k+\lambda}{n+k}a^k=$$

$$=M\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+\lambda}{n}\binom{n+k+\lambda}{k}a^k=M\binom{n+\lambda}{n}(1-a)^{-n-\lambda},$$

$$|\beta_n|\leq M(1-a)^{-\lambda}\binom{n+\lambda}{n},$$

откъдето заключаваме, че редицата $\left\{\frac{\beta_n}{n^\lambda}\right\}$ е ограничена. Ако освен това $\lim\frac{c_n}{n^\lambda}=0$, то за числото M в горната оценка за $|\beta_n|$ можем да вземем какво да е положително число, стига n да е достатъчно голямо. Лесно следва оттук, че тогава границата $\lim\frac{\beta_n}{n^\lambda}$ съществува и е равна на нула.

От друга страна върху окръжността $|z|=1$ функцията $\varphi(z)$ няма друга особена точка освен полюса $z=1$ със съответната характеристична функция

$$H(z)=\frac{A}{(1-z)^s}+\frac{B}{(1-z)^{s-1}}+\cdots+\frac{P}{1-z}, \quad \text{където} \quad A\neq 0,$$

и понеже разликата $\varphi(z)-H(z)$ е холоморфна в кръг с център в точката 0 и с радиус по-голям от 1, то коефициентът β_n има вида

$$\beta_n = \binom{n+s-1}{n} A + \binom{n+s-2}{n} B + \cdots + \binom{n}{n} P + \varepsilon_n, \quad \text{гдето } \lim \varepsilon_n = 0.$$

Явно е оттук че

$$\lim \frac{\beta_n}{n^{s-1}} = \frac{A}{(s-1)!} \neq 0. \tag{11}$$

Но тъй като редицата $\left\{ \frac{\beta_n}{n^\lambda} \right\}$ е ограничена (съгласно с доказаното по-горе), то λ не може да бъде по-малко от $s-1$, защото при $s-1 > \lambda$ бихме имали

$$\lim \frac{\beta_n}{n^{s-1}} = \lim \frac{\beta_n}{n^\lambda} \cdot \frac{1}{n^{s-1-\lambda}} = 0,$$

което противоречи на (11). И така $s \leq \lambda + 1$.

По-нататък, ако $\lim \frac{\beta_n}{n^\lambda} = 0$, то равенството $s = \lambda + 1$ е също изключено, защото, както видяхме, $\lim \frac{\beta_n}{n^{s-1}}$ съществува, но е различно от нула. Като вземем предвид, че s и λ са цели, очевидно трябва да имаме в този случай $s \leq \lambda$. С това доказателството на теорема VII е завършено.

Нека забележим тук, че условията 1) и 2) в теорема VI са само необходими за да няма функцията $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ върху окръжността $|z| = 1$ други особени точки освен полюси. В недостатъчността на тези условия можем да се убедим от следния пример.

Да разгледаме степенния ред

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos \ln n, \tag{12}$$

в който очевидно

$$c_0 = 0 \text{ и } c_n = \cos \ln n \quad \text{за} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

В този случай $\overline{\lim} |c_n| = 1$, тъй че радиусът на сходимост на реда (12) е равен на 1 и този ред е разходящ върху окръжността $|z| = 1$. Понеже $|c_n| < 1$, достатъчно е да установим съществуването на една редица от растещи индекси, тъй че да имаме

$$\lim |\cos \ln n_k| = 1. \tag{13}$$

Ако k е произволно естествено число и се условим да разбираме под n_k най-голямото цяло число, което се съдържа в $e^{k\pi}$, то от $e^{k\pi} - 1 < n_k < e^{k\pi}$ следва, че $\ln n_k - k\pi$ клони към нула, когато k расте безгранично, тъй че за така дефинираната редица $\{ n_k \}$ е в сила релацията (13). И така в разглеждания пример са изпълнени условията 1) и 2) на теорема VI при $\lambda = 0$; въпреки това функцията

$f(z)$ няма нито един полюс върху окръжността $|z|=1$. В това се убеждаваме като си образуваме функцията

$$(14) \qquad (1-z)f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-c_{n-1})z_n$$

и вземем предвид, че $\lim(c_n-c_{n-1})=0$. И наистина, ако приложим за функцията $g(x)=\cos\ln x$ теоремата за крайните нараствания, получаваме при $n>1$:

$$c_n-c_{n-1}=g(n)-g(n-1)=-\frac{1}{n-\theta}\sin\ln(n-\theta),$$

$$|c_n-c_{n-1}|\leq\frac{1}{n-\theta}, \quad \text{гдето} \quad 0<\theta<1.$$

Съгласно с теорема III функцията $(1-z)f(z)$ не може да има полюси върху окръжността $|z|=1$. Оттук следва веднага, че никоя точка върху тази окръжност, различна от 1, не може да бъде полюс на $f(z)$. Но и точката 1 не може да бъде полюс на $f(z)$, защото в противен случай същата точка би била обикновена точка за функцията (14). А това не е възможно, защото от $\lim(c_n-c_{n-1})=0$ би следвало според една теорема на Фату — Рис [3,4], че редът $\Sigma(c_n-c_{n-1})$ е сходящ, което не е вярно, защото редицата $c_1, c_2, c_3\ldots$ в нашия случай е разходяща.

В 1923 год. С. Манделбройт [2] доказа в своята докторска теза една теорема за степенни редове с празнини, която гласи така:

Ако редицата $\{\lambda_n\}$ от показателите на степенния ред

$$(15) \qquad f(z)=\Sigma a_n z^{\lambda_n}$$

допуска безбройно много празнини с дължина поголяма или равна на p, т. е. ако неравенството $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq p$ е удовлетворено за безбройно значения на n, функцията $f(z)$ притежава или поне една особена точка върху съответната окръжност на сходимост, която точка не е полюс, или пък всички особени точки на $f(z)$ върху тази окръжност са полюси на брой не по-малко от p.

Приложените по-горе методи ни дават възможност да обобщим тази теорема за по-обширна класа от степенни редове и същевременно да допълним нейната заключителна част с едно твърдение относно минималния брой на полюсите от най-висока кратност. При това ще предполагаме, че радиусът на сходимост на реда (15) е равен на 1, което ограничение не е съществено.

Теорема VIII. *Да предположим, че степенният ред (15) има радиус на сходимост равен на 1 и че показателите му удовлетворяват неравенството $\lambda_{n+1}-\lambda_n>p$ за безбройно значения на n. Ако прибавим към $f(z)$ степенния ред $\varphi(z)=\Sigma c_n z^n$, гдето $\lim c_n=0$, и ако функ-*

цията $f(z)+\varphi(z)$ няма други особени точки върху окръжността $|z|=1$ освен полюси, то броят на полюсите от най-висока кратност не може да бъде по-малък от p.

По допускане съществува безкрайна редица от растещи индекси $n_1, n_2, n_3, \ldots$ тъй, че коефициентът пред z^n в реда (15) да е равен на нула за $n=n_r+1,\ n_r+2, \ldots, n_r+p-1$, каквото и да е r. Ако особените точки на $f(z)+\varphi(z)$ върху окръжността $|z|=1$ са само полюси и означим с

$$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_q}$$

тези от тях, чиято кратност s е най-голяма, трябва да докажем, че броят им q не може да бъде по-малък от p. Да допуснем, че $q<p$. Тогава при $n=n_r+1,\ n_r+2, \ldots, n_r+q$ коефициентът пред z^n в Тейлоровото развитие на $f(z)+\varphi(z)$ по степените на z е равен на c_n и за същия коефициент е в сила равенството (3), гдето $|a_k|=$ $=|b_k|=\cdots=|p_k|=1$ и коефициентите A_k са различни от 0. Когато n пробягва редицата

$$n_1+l,\quad n_2+l, \ldots, n_r+l, \ldots$$

гдето с l означаваме кое да е от числата $1, 2, \ldots, q$, то от равенство (3) получаваме чрез граничен преход, след като разделим предварително двете му части на $\binom{n+s-1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{q} A_k a_k^n = 0.$$

От друга страна ако положим $\sum_{k=1}^{q} A_k a_k^n = u_n$ и дадем на n последователно значенията $n_r+1,\ n_r+2, \ldots, n_r+q$, получаваме както и при теорема I равенството

$$A_k a_k^{n_r+1} V = V_k^{(r)}, \quad (k=1,\ 2, \ldots, q) \tag{16}$$

гдето V има същото значение както и при поменатото доказателство, а детерминантата $V_k^{(r)}$ се получава от V като заменим елементите от k-тия стълб на V с $u_{n_r+1}, u_{n_r+2}, \ldots, u_{n_r+q}$. Явно е, че $\lim\limits_{r\to\infty} V_k^{(r)}=0$, защото всеки елемент от k-тия стълб на детерминантата $V_k^{(r)}$ клони към 0, докато останалите ѝ елементи остават неизменни при граничния преход. Също тъй не се мени при граничния преход и модулът на лявата страна на (16) и при това този модул е положителен, понеже $|A_k|$ и $|V|$ са положителни. Така допускането, че q е по-малко от p, ни доведе до противоречивото равенство (16), с което теорема VIII е доказана напълно.

О ПОЛЯРНЫХ ОСОБЕННЫХ ТОЧКАХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Л. Чакалов

В настоящей работе автор доказывает несколько теорем, которые позволяют судить о существовании неполярных точек на окружности сходимости степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{1}$$

при непосредственном продолжении представленного им элемента аналитической функции. Здесь мы приводим без доказательств некоторые из этих теорем.

1. Если последовательност $c_0, c_1, c_2, \ldots$ ограничена-то полюсы функции (1) на окружности $|z|=1$ (если таковые существуют) должны быть простыми.

2. Если $\lim c_n=0$, то функция (1) не может иметь полюсов на окружности $|z|=1$.

3. Если последовательность $\{c_n\}$ не ограничена, но $\lim \frac{c_n}{n}=0$, то $f(z)$ имеет по крайней мере одну особенную точку на окружности $|z|=1$, которая не является полюсом.

4. Если функция (1) голоморфна в круге $|z|<1$ и не имеет других особенных точек на периферии этого круга кроме полюсов, то последовательность коэффициентов c_n удовлетворяет следующим условиям:

1) Число $\lambda=\overline{\lim}\frac{\log|c_n|}{\log n}$ целое и неотрицательное;

2) $$0<\overline{\lim}\frac{|c_n|}{n^\lambda}<\infty.$$

5. Если при некотором целом $\lambda\geqq 0$ последовательность $\left\{\frac{c_n}{n^\lambda}\right\}$ ограничена, то функция (1) не может иметь на окружности $|z|=1$ полюсов кратности высшей $\lambda+1$. Если кроме того $\lim\frac{c_n}{n^\lambda}=0$, то кратность каждого полюса $f(z)$ на единичной окружности не превосходит λ.

6. (Обобщение одной теоремы С. Манделбройта) Предположим, что радиус сходимости степенного ряда с пустотами

$$f(z)=\Sigma a_n z^{\lambda_n}$$

равен 1 и что показатели удовлетворяют неравенство $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geqq p$ для бесконечного множества значений n. Прибавим к $f(z)$ степенный ряд $\varphi(z)=\Sigma c_n z^n$, где $\lim c_n=0$. Если функция $f(z)+\varphi(z)$ не имеет на окружности $|z|=1$ других особенных точек кроме полюсов, то число полюсов высшей кратности не меньше p.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hadamard, S. Mandelbrojt. La série de Taylor et son prolongement analytique, 2-ème édition. Paris 1926 (Scientia № 12).
2. S. Mandelbrojt. Sur les séries de Taylor qui représentent des lacunes (Thèse de doctorat). Paris, Gauthier-Villars, 1923.
3. P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Mathematica. T. 30 (1906), 389.
4. M. Riesz. Über einen Satz des Herrn Fatou. Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. 140 (1911), 89—99.
5. L. Tchakaloff. Sur les singularités polaires des séries entières. Comptes rendus de l'Académie Bulgare des Sciences. T. 1, № 1, 9—12.
6. A. Ostrowski. Über Singularitäten gewisser mit Lücken behafteten Potenzreihen. Jahresbericht der deutschen Mathematiker—Vereinigung. T. 35 (1926), 269—280.