ВЪРХУ НЯКОИ ИНТЕГРАЛНИ ПРЕДСТАВЯНИЯ НА ФУНКЦИИ ВЪВ ВРЪЗКА С ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Н. Обрешков

В по-ранши работи [1], във връзка с класччните резултати на академик С. Н. Бернщейн разгледах въпроса за представяне на функции по реалната полуос с интеграли от вида

$$f(x)=\int_0^\infty \Phi(xt)\,d\omega(t), \tag{1}$$

$$f(x)=\int_0^\infty \Phi(xt)\,\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Тук $\Phi(x)$ е функция, удовлетворяваща линейно диференциално уравнение от втори ред. С настоящата работа разрешавам подобни въпр)си за представяния (1) и (2) за случай на функции $\Phi(x)$, удовлетворяваци специални линейни диференциални уравнения от трети ред. Отначало, във връзка с по-раншните ми работи за производните на функциите, доказвам няколко предложения за редици от функции, получени от дадена функция с прилагане многократно на специални линейни оператори. Използувайки след това получените резултати, намирам нови представяния от вида (1) и (2), в които $\Phi(x)$ е функцията

$$\Phi(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u-v-\frac{x}{uv}}\,u^{\alpha-1}\,v^{\delta-1}\,du\,dv, \tag{3}$$

която удовлетворява диференциалното уравнение

$$x^2y'''+(3-\alpha-\delta)\,xy''+(1-\alpha)(1-\delta)\,y'-y=0. \tag{4}$$

Доказвам, че необходимото и достатъчно условие, щото реалната функция $f(x)$ да се представя за $x\geqq 0$ с интеграла (1), където $\omega(x)$ е монотонно растяща функция за $x\geqq 0$ и ограничена, се състои в това, че за функциите $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x),\cdots$, получени с рекурентната формула $(0<\alpha,\ \delta<1)$

$$f_n(x)=x^2 f'''_{n-1}(x)+(3-\alpha-\delta)\,x f''_{n-1}(x)+(1-\alpha)(1-\delta)\,f'_{n-1}(x),\ n\geqq 1,$$

да имаме $(-1)^n f_n(x)\geqq 0$ за $x>0$, $f(+0)=f(0)$ и раницата $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

да съществува. За интегралното уравнение (2), където $\Phi(x)$ е функцията (3), намирам решението му при следните предположения: функцията $\varphi(x)$ е интегруема във всеки краен интервал $(0, x)$, $x>0$, и интегралът в (2) е сходящ за някое $x=d>0$. Тогава за всяка точка x_0, за която е изпълнено условието

$$\int_{x_0}^{x} |\varphi(t)-\varphi(x_0)|\,dt=o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

имаме граничното равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{2\pi})^3}\frac{e^{3n} f_n\left(\frac{n^3}{x_0}\right)}{n^{\alpha+\beta-3/2}x_0^{n+1}}=\varphi(x_0),$$

където $f_n(x)$ са функциите, дефинирани с релациите (4).

В работата са получени и някои интеграли на линейни диференциални уравнения, като се използуват представяния на специални оператори. Като пример разгледана е трансформацията

$$f(x)=\int_0^\infty g\left(\frac{x}{u}\right)e^{-u}u^\delta\,du.$$

При предположение за сходимост, получена е формулата

$$-x^{\delta+1}\frac{d}{dx}[x^{-\delta}f'(x)]=\int_0^\infty g'\left(\frac{x}{u}\right)e^{-u}u^\delta\,du,$$

т. е. прилагането на оператора в ляво води до подобна трансформация за производната на функцията $g(x)$.

Във връзка с по-раншните ми работи е направено изследване за възможното разширение на получените резултати за функции, удовлетворяващи линейни диференциални уравнения от втори ред. Между другото показвам, че теоремата на Бернщейн за абсолютно монотонните функции се съдържа в теоремата ми 2. от цитираната ми работа [1]. За функцията на Ханкел $K_\delta(x)$ за имагинерен аргумент получавам формулата

$$K_\delta(x)=\int_0^\infty e^{-x\,ch\,t}\,ch\,\delta t\,dt.$$

От настоящата ми работа и от предните ми работи в тази област се вижда, че резултатите в настоящата работа могат да се обобщат и за функциите от вида

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\cdots u_m^{\alpha_m}\exp\left(-u_1-u_2-\cdots-u_m-\frac{x}{u_1u_2\cdots u_m}\right)du_1du_2\cdots du_m,$$

удовлетворяващи линейни диференциални уравнения от $m+1$-ви ред. Това ще бъде направено в друга работа.

1. Някои предложения за производните на функциите

В направление на по-раншните ми работи ще установя някои предложения за диференциални оператори, които ще са необходими за установяване на следващи резултати.

1. Нека $f(x)$ е реална функция $3n$ пъти диференцируема за $x>a>0$. Да въведем редицата от функции $f_0(x)=f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$, дефинирани с

$$\varphi_k(x)=x^{\delta}(x^{1-\delta}f'_{k-1}(x))', \quad k=1, 2, 3, \cdots, n,$$

$$f_k(x)=x^{\alpha}(x^{1-\alpha}\varphi_k(x))', \quad k=1, 2, 3, \cdots, n,$$

и нека $(-1)^n f_n(x)\geqq 0$ за $x>a$. Предполагаме, че за една редица от неограничено растящи числа $y_1, y_2, y_3, \cdots$, имаме

a) $$\lim \frac{f(y_i)}{y_i^{\alpha+n-1}}=0 \quad \text{при } \alpha>\delta>0;$$

b) $$\lim \frac{f(y_i)}{y_i^{\alpha+n-1}\log y_i}=0 \quad \text{при } \alpha=\delta>0;$$

c) $$\lim \frac{f(y_i)}{y_i^{n-1}\log^2 y_i}=0 \quad \text{при } \alpha=\delta=0.$$

Тогава имаме $(-1)^n\varphi_n(x)\leqq 0$ за $x>a$ и $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1-\alpha}\varphi_n(x)=0$.

Нека $\alpha>\delta>0$. Понеже $(-1)^n(x^{1-\alpha}\varphi_n)'\geqq 0$, то функцията $(-1)^n x^{1-\alpha}\varphi_n(x)$ е растяща за $x>a$. Да предположим, че за $x=b>a$ тази функция взема положителна стойност c. Ще имаме тогава за $x>b$

$$(-1)^n(x^{1-\delta}f'_{n-1}(x))'>cx^{\alpha-\delta-1},$$

откъдето, с интегриране от b до x, получаваме неравенството

$$(-1)^n(x^{1-\delta}f'_{n-1}(x))>\frac{c}{\alpha-\delta}x^{\alpha-\delta}+c_0;$$

с ново опростяване и интегриране получаваме

$$(-1)^n f_{n-1}(x)>\frac{c}{\alpha(\alpha-\delta)}x^{\alpha}+d_0x^{\delta}+d_1,$$

където d_0, d_1 са константи. Ще установим общото неравенство

$$(-1)^n f_{n-k}(x)>cc_k x^{\alpha+k-1}+P_k(x),$$

където $P_k(x)$ е сума от краен брой членове от вида dx^{ν} с $\nu<\alpha+k-1$ и c_k е положително число. Предното неравенство може да се пише

$$(-1)^n(x^{1-\alpha}\varphi_{n-k}(x))'>cc_k x^{k-1}+P_k(x)x^{-\alpha}.$$

С интегриране и малки преобразования получаваме

$$(-1)^n \varphi_{n-k}(x) > \frac{c_k}{k} c x^{k+a-1} + Q_k(x),$$

където $Q_k(x)$ е сума от членове от вида $d_i x^{\lambda_i}$ с $\lambda_i < k+a-1$. Това неравенство се свежда на следното

$$(-1)^n (x^{1-\delta} f'_{n-k-1}(x))' > \frac{c_k}{k} c x^{k+a-\delta-1} + Q_k(x) x^{-\delta},$$

от което с интегриране получаваме неравенството

$$(-1)^n f'_{n-k-1}(x) > \frac{c_k}{k(k+a-\delta)} x^{k+a-1} + V_k(x),$$

с подобен на преди член $V_k(x)$, т. е. $V_k(x) = o(x^{k+a-1})$ при $x \to \infty$. Оттук, отново с интегриране и опростяване, получаваме

$$(-1)^n f_{n-k-1}(x) > c c_{k+1} x^{a+k} + P_{k+1}(x),$$

с $c_{k+1} > 0$, $P_{k+1}(x) = o(x^{a+k})$. Така неравенството (4) е установено за всяко k. При $k=n$ получаваме

$$(-1)^n f(x) > c c_n x^{a+n-1} + P_n(x),$$

което неравенство очевидно противоречи на условието а). Следователно, функцията $(-1)^n x^{1-a} \varphi_n(x)$ е неположителна за $x > a$ и понеже е растяща, то тя ще клони към определена граница, когато x расте неограничено. Ще докажем, че границата е равна на нула. Действително, да допуснем, че

$$\lim_{x \to \infty} x^{1-a} \varphi_n(x) = g;$$

имаме последователно $(x \to \infty)$

$$x^{1-\delta} f'_{n-1}(x) \sim \frac{g}{a-\delta} x^{a-\delta}, \quad f'_{n-1}(x) \sim \frac{g}{a-\delta} x^{a-1}, \quad f_{n-1}(x) \sim \frac{g}{a(a-\delta)} x^{a}.$$

Общо ще имаме

$$f_{n-k}(x) \sim g \lambda_k x^{a+k-1}, \tag{5}$$

където λ_k е константа, отлична от нула. При предположение, че това асимптотично равенство е вярно за едно k следва верността му за $k+1$ от формулите

$$(x^{1-a} \varphi_{n-k}(x))' \sim g \lambda_k x^{k-1}, \quad \varphi_{n-k}(x) \sim g \frac{\lambda_k}{k} x^{a+k-1},$$

$$(x^{1-\delta} f'_{n-k-1}(x))' \sim g \frac{\lambda_k}{k} x^{a+k-\delta-1}, \quad f'_{n-k-1}(x) \sim g \frac{\lambda_k}{k(k+a-\delta)} x^{a+k-1},$$

$$f_{n-k-1}(x) \sim g \frac{\lambda_k}{k(k+a-\delta)(a+k)} x^{a+k}.$$

При $k=n$ имаме

$$f(x) \sim g\lambda_n x^{a+n-1},$$

което показва, че $g=0$.

Нека сега $a=\delta>0$. Предположението $(-1)^n x^{1-a}\varphi_n(x)>c$ ни води до неравенствата

$$(-1)^n (x^{1-a} f'_{n-1}(x))'>\frac{c}{x}, \quad (-1)^n f'_{n-1}(x)>c x^{a-1}\log x+c_0 x^{a-1},$$

$$(-1)^n f_{n-1}(x)>\frac{c}{a} x^a \log x+\frac{c_0}{a} x^a+d_0.$$

Ще докажем, че

(6) $$(-1)^n f_{n-k}(x)>c\lambda_k x^{a+k-1}\log x+T_k(x),$$

където $\lambda_k>0$, $T_k(x)=o(x^{a+k-1})$. Получаваме последователно

$$(-1)^n \varphi_{n-k}(x)>c\frac{\lambda_k}{k}x^{a+k-1}\log x+U_k(x),\ U_k(x)=o(x^{a+k-1}\log x),$$

$$(-1)^n x^{1-\delta} f'_{n-k-1}(x)>c\frac{\lambda_k}{k(a+k-\delta)}x^{a+k-\delta}+V_k(x),$$

$$(-1)^n f_{n-k-1}(x)>\frac{c\lambda_k}{k(a+k-\delta)(a+k)}x^{a+k}+T_{k+1}(x),$$

от което се вижда, че (6) е вярно и за $k+1$, т. е. за всяко k.

При $k=n$ получаваме противоречие с b).

Подобно, от $x^{1-a}\varphi_n(x)\to d$ получаваме, че изобщо

$$f_{n-k}(x)\sim d\mu_k x^{a+k-1}\log x,$$

където μ_k е константа, отлична от нула. При $k=n$ имаме

$$f(x)\sim d\mu_n x^{a+n-1}\log x,$$

откъдето следва, че $d=0$.

При случая $a=\delta=0$ от $(-1)^n x\varphi_n(x)>c$ получаваме

$$(-1)^n f'_{n-1}(x)>c\frac{\log x}{x}+\frac{c_0}{x},$$

$$(-1)^n f_{n-1}(x)>c\log^2 x+c_0\log x+c_1.$$

Доказваме, по употребения индуктивен път, че за всяко k ще имаме

$$(-1)^n f_{n-k}(x)>c\nu_k x^{n-1}\log^2 x+G_k(x),\ G_k(x)=o(x^{n-1}\log^2 x).$$

При $k=n$ получаваме $(-1)^n f(x)>c\nu_n x^{n-1}\log^2 x(1+o(1))$, което противоречи на с).

2. Нека $f(x)$ е реална функция, $3n$ пъти диференцируема за $x>a$ и при същите означения както при

предната теорема да предположим, че $\varphi_n(x) \leqq 0$ при $x > a$. Освен това за една неограничена редица от растящи числа $y_1, y_2, y_3, \ldots, f(x)$ нека удовлетворява следните условия:

a) $$\lim \frac{f(y_i)}{y_i^{\delta+n-1}} = 0 \qquad \text{при} \qquad 0 < \delta \leqq a < \delta + 1,$$

b) $$\lim \frac{f(y_i)}{y_i^{\delta+n-1} \log y_i} \qquad \text{при} \qquad 0 < \delta = a - 1, \; n \geqq 2,$$

c) $$\lim \frac{f(y_i)}{y_i^{n-1} \log y_i} = 0 \quad \text{при} \quad 0 = \delta \leqq a < 1,$$

d) $$\lim \frac{f(y_i)}{y_i^{n-1} \log^2 y_i} \qquad \text{при} \quad \delta = 0, \; a = 1.$$

Тогава за $x > a$ имаме $f'_{n-1}(x) \geqq 0$ и $\lim x^{1-\delta} f'_{n-1}(x) = 0$.

Нека $0 < \delta \leqq a < \delta + 1$. Съгласно условието функцията $x^{1-\delta} f'_{n-1}(x)$ е намаляваща. Да предположим, че за едно $x = b > a$ тази функция взема отрицателната стойност $-d$. Тогава ще имаме $(x > b)$

$$x^{1-\delta} f'_{n-1}(x) < -d,$$

откъдето получаваме последователно

$$f'_{n-1}(x) < -d x^{\delta-1}, \qquad f_{n-1}(x) < -\frac{d}{\delta} x^{\delta} + d_0. \tag{7}$$

Изобщо ще имаме

$$f_{n-k}(x) < -d \lambda_k x^{\delta+k-1} + P_k(x), \tag{8}$$

където $\lambda_k > 0$, $P_k(x) = o(x^{\delta+k-1})$. Това равенство се свежда на (7) при $k = 1$.

Предполагаме, че (8) е вярно за едно k. Тогава ще имаме

$$(x^{1-a} \varphi_{n-k}(x))' < -d \lambda_k x^{\delta+k-1-a} + P_k(x) x^{-a},$$

$$\varphi_{n-k}(x) < -d \lambda_k \frac{x^{\delta+k-1}}{\delta+k-a} + Q_k(x),$$

$$(x^{1-\delta} f'_{n-k-1}(x))' < -d \lambda_k \frac{x^{k-1}}{\delta+k-a} + Q_k(x) x^{-\delta},$$

$$f'_{n-k-1} < -d \lambda_k \frac{x^{k+\delta-1}}{k(\delta+k-a)} + P_k(x),$$

$$f_{n-k-1}(x) < -d \lambda_{k+1} x^{\delta+k} + P_{k+1}(x)$$

с $P_{k+1}(x) = o(x^{\delta+k})$, с което е установена верността на (8) и за $k+1$

При $k = n$ от (8) получаваме противоречие с a). Следователно, $f'_{n-1}(x) \geqq 0$ при $x > a$.

Ако $0<\delta=a+1$, предположението $x^{1-\delta}f'_{n-1}(x)<-d$ ни води до неравенствата

$$f_{n-1}(x)<-\frac{d}{\delta}x^{\delta}+d_0,\quad (x^{1-a}\varphi_{n-1}(x))'<-\frac{d}{\delta}x^{-1}-\frac{d_0}{\delta}x^{-\delta},$$

$$\varphi_{n-1}(x)<-\frac{d}{\delta}x^{\delta}\log x-\frac{d_0}{\delta}+d_1x^{\delta},$$

$$f_{n-2}(x)<-\frac{d}{\delta(\delta+1)}x^{\delta+1}\log x+P(x),$$

$$P(x)=o(x^{\delta+1}\log x).$$

Както преди се убеждаваме, че за всяко $k\geqq 2$ имаме

$$f_{n-k}(x)<-d\mu_k x^{\delta+k-1}\log x+G_k(x),$$

където $G_k(x)=o(x^{\delta+k-1}\log x)$ и при $k=n$ получаваме противоречие с b).

При случая, когато $0=\delta\leqq a<1$, установяваме неравенството

$$f_{n-k}(x)<-d\nu_k x^{k-1}\log x+S_k(x),\quad S_k(x)=o(x^{k-1}\log x)$$

и при $\delta=0$, $a=1$ — неравенството

$$f_{n-k}(x)<-d\tau_k x^{k-1}\log^2 x+V_k(x),\quad V_k(x)=o(x^{k-1}\log^2 x),$$

с което доказателството на неравенството $f'_{n-1}(x)\geqq 0$ за $x>a$ е привършено.

За да докажем граничното равенство $\lim x^{1-\delta}f'_{n-1}(x)=0$ следваме аналогичен път. Понеже функцията $-x^{1-\delta}f'_{n-1}(x)$ е ненамаляваща и неположителна, то тя клони към определена граница, когато x расте неограничено, т. е. $\lim x^{1-\delta}f'_{n-1}(x)=g$. Тогава за $f_{n-k}(x)$ очевидно ще имаме напълно подобни асимптотични равенства на неравенствата (8), като в последните сменим знака на неравенство със знака $\sim$ на асимптотично равенство и премахнем допълнителните членове. От така получените асимптотични равенства следва веднага, че $g=0$, с което теорема 2. е установена напълно.

3. **Нека $f(x)$ е реална функция $3n$ пъти диференцируема за $x>a>0$ и при въведените означения в теорема 1. функцията $f'_{n-1}(x)$ да е неотрицателна за $x>a$. Нека освен това за една неограничена растяща редица от числа $y_1, y_2, y_3, \ldots$ функцията $f(x)$ да удовлетворява следните условия:**

1) $\lim \dfrac{f(y_i)}{y_i^{n-1}}=0$ при $a<1$, $\delta<1$,

2) $\lim \dfrac{f(y_i)}{y_i^{n-1}\log y_i}=0$ при $a<1$, $\delta=1$ или $a=1$, $\delta<1$,

3) $\lim \dfrac{f(y_i)}{y_i^{n-1}\log^2 y_i}=0$ при $a=1$, $\delta=1$.

Тогава $f_{n-1}(x) \leq 0$ за $x > a$.

По условие функцията $f_{n-1}(x)$ е ненамаляваща за $x > a$. Нека $f_{n-1}(b) > 0$.

Разглеждаме отначало случая, когато $\alpha < 1$, $\delta < 1$. Получаваме последователно

$$x^{\alpha}(x^{1-\alpha}\varphi_{n-1}(x))' > c, \quad x^{1-\alpha}\varphi_{n-1}(x) > c\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c_0,$$

$$(x^{1-\delta}f'_{n-2}(x))' > \frac{c}{1-\alpha}x^{-\delta} + c_0 x^{\alpha-\delta-1}.$$

При $\alpha \neq \delta$ имаме по-нататък

$$f_{n-2}(x) > \frac{cx}{(1-\alpha)(1-\delta)} + \frac{c_0 x^{\alpha}}{\alpha(1-\delta)} + \frac{c_1 x^{\delta}}{\delta} + c_2$$

и при $\alpha = \delta$ имаме

$$f_{n-2}(x) > \frac{cx}{(1-\alpha)(1-\delta)} + \frac{c_0 x^{\delta}\log x}{\delta} + c_1' x^{\delta} + c_2 .$$

Изобщо получаваме

$$f_{n-k}(x) > c\lambda_k x^{k-1} + S_k(x), \quad \lambda_k > 0, \quad S_k(x) = o(x^{k-1}) \, (x \to \infty).$$

Оттук, при $k = n$, получаваме противоречие с 1).

При $\alpha = 1$, $\delta < 1$ получаваме

$$\varphi_{n-1}(x) > c\log x + c_0, \quad f'_{n-2}(x) > \frac{c\log x}{1-\delta} + \frac{c_0}{1-\delta} + c_1 x^{\delta-1} + c_2$$

и изобщо имаме

$$f_{n-k}(x) > c\mu_k x^{k-1}\log x + o(x^{k-1}\log x), \quad \mu_k > 0,$$

откъдето при $k = n$ получаваме противоречие с 2).

При $\alpha < 1$, $\delta = 1$ получаваме аналогично

$$f_{n-k}(x) > c\nu_k x^{k-1}\log x + o(x^{k-1}\log x)$$

и при $\alpha = \delta = 1$ получаваме

$$\varphi'_{n-1}(x) > \frac{c}{x}, \quad \varphi_{n-1}(x) > c\log x + c_0, \quad f''_{n-2}(x) > c\frac{\log x}{x} + \frac{c_0}{x},$$

$$f'_{n-2}(x) > c\log^2 x + c'\log x + c'', \quad f_{n-2}(x) > cx\log^2 x + o(x\log^2 x).$$

Изобщо имаме в този случай

$$f_{n-k}(x) > c\,x^{k-1}\log^2 x + o(x^{k-1}\log^2 x).$$

Така предложението 3. е установено напълно.

От предните предложения следва следното предложение, което ще прилагаме в по-следващите теореми:

4. Нека $f(x)$ е $3n$ пъти диференцируема функция за $x>a\geqq 0$ и α, δ са произволни числа, $0\leqq\delta\leqq\alpha\leqq 1$. Да въведем редицата от функции $f_0(x)=f(x), f_1(x),\cdots,f_n(x)$, дефинирани с релациите

$$f_k(x)=x^{\alpha}(x^{1-\alpha}\varphi_k(x))',\ 1\leqq k\leqq n,$$
$$\varphi_k(x)=x^{\delta}(x^{1-\delta}f'_{k-1}(x))',\ 1\leqq k\leqq n.$$

Нека $(-1)^n f_n(x)\geqq 0$ за $x>a$ и за една неограничено растяща редица от числа $y_1, y_2, y_3,\cdots$ границата $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=c$ да съществува. Тогава ще имаме

$$\begin{array}{lll}
(-1)^k f_k(x)\geqq 0, & 1\leqq k\leqq n, & x>a, \\
(-1)^{k-1} f'_k(x)\geqq 0, & 0\leqq k\leqq n-1, & x>a, \\
(-1)^k \varphi_k(x)\leqq 0, & 1\leqq k\leqq n, & x>a. \\
\lim\limits_{x\to\infty} x^{1-\delta} f'_{k-1}(x)=0, & 0\leqq k\leqq n-1, & \\
\lim\limits_{x\to\infty} x^{1-\alpha}\varphi_k(x)=0. & 1\leqq k\leqq n. &
\end{array}$$

2. Частни интеграли на някои линейни диференциални уравнения

Да разгледаме диференциалното уравнение

$$(1)\qquad x^2y'''+(3-\alpha-\delta)xy''+(1-\alpha)(1-\delta)y'+y=0,$$

което може да се напише и така

$$x^{\alpha}\frac{d}{dx}\left[x^{1-\alpha+\delta}\frac{d}{dx}\left(x^{1-\delta}\frac{dy}{dx}\right)\right]+y=0.$$

Ще установим, че функцията

$$g(x)=\int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\lambda}}d\lambda\int\limits_0^\infty e^{-u-\frac{\lambda}{u}}\frac{du}{u^{\alpha-\delta+1}}=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty u^{\delta-1}v^{\alpha-1}e^{-u-v-\frac{x}{uv}}du\,dv$$

е един интеграл на уравнението (1). Имаме

$$g'(x)=-\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty u^{\delta-2}v^{\alpha-2}e^{-u-v-\frac{x}{uv}}du\,dv.$$

Като извършим смяната $u=x\tau$, получаваме

$$x^{1-\delta}g'(x)=-\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\tau^{\delta-2}v^{\alpha-2}e^{-x\tau-v-\frac{1}{v\tau}}dv\,d\tau,$$

откъдето имаме

$$(x^{1-\delta}g'(x))'=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\tau^{\delta-1}v^{\alpha-2}e^{-x\tau-v-\frac{1}{\tau v}}dv\,d\tau.$$

Като възстановим променливото $u=x\tau$, получаваме

$$\psi(x)=x^{\delta}(x^{1-\delta}g'(x))'=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{\delta-1}v^{\alpha-2}e^{-u-v-\frac{x}{uv}}\,du\,dv.$$

Оттук, със смяната $v=xt$, получаваме

$$x^{1-\alpha}\psi(x)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{\delta-1}t^{\alpha-2}e^{-u-xt-\frac{1}{ut}}\,du\,dt,$$

откъдето имаме

$$(x^{1-\alpha}\psi(x))'=-\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{\delta-1}t^{\alpha-1}e^{-u-xt-\frac{1}{ut}}\,du\,dt.$$

С възстановяване на променливото $v=xt$, получаваме

$$x^{\alpha}(x^{1-\alpha}\psi(x))'=-\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{\delta-1}v^{\alpha-1}e^{-u-v-\frac{x}{uv}}\,du\,dv=-g(x),$$

с което е установено, че $g(x)$ удовлетворява уравнението (1).

Във връзка с предните резултати да разгледаме трансформацията

$$f(x)=\int_0^{\infty}\Phi\left(\frac{x}{u}\right)e^{-u}u^{\delta}\,du, \tag{2}$$

при дадена функция, като предполагаме, че влизащите интеграли са сходящи за разглежданите стойности на x и функциите са диференцируеми от съответен ред. С диференциране получаваме

$$f'(x)=\int_0^{\infty}\Phi'\left(\frac{x}{u}\right)e^{-u}u^{\delta-1}\,du.$$

Като направим смяната $u=xv$, ще имаме

$$f'(x)=x^{\delta}\int_0^{\infty}\Phi'\left(\frac{1}{v}\right)e^{-xv}v^{\delta-1}\,dv,$$

откъдето имаме

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\delta}f'(x)\right]=-\int_0^{\infty}\Phi'\left(\frac{1}{v}\right)e^{-xv}v^{\delta}\,dv.$$

С възстановяване на променливото $u=xv$ получаваме

$$x^{1+\delta}\frac{d}{dx}\left[x^{-\delta}f'(x)\right]=-\int_0^{\infty}\Phi'\left(\frac{x}{u}\right)e^{-u}u^{\delta}\,du. \tag{3}$$

Да означим с Lf оператора

$$Lf=x^{1+\delta}\frac{d}{dx}\left[x^{-\delta}\frac{d}{dx}f\right].$$

Тогава от (3) следва, че въобще ще имаме

$$L_n f=(-1)^n\int_0^\infty \Phi^{(n)}\left(\frac{x}{v}\right)e^{-u}u^\delta\,du,\quad L_2 f=L(Lf),\quad L_3 f=L(L_2 f),\ldots \tag{4}$$

Лесно можем да намерим, като приложение примерно, интеграли на линейни диференциални уравнения от вида

$$\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu L_\mu y=0,\quad L_0 y=y, \tag{5}$$

където a_μ са константи. Ако поставим

$$y=\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{u}\right)e^{-u}\,u^\delta\,du,$$

получаваме

$$\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu L_\mu y=\int_0^\infty e^{-u}\,u^\delta\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^\mu a_\mu\,\Phi^{(\mu)}\left(\frac{x}{u}\right)du.$$

Ако $\Phi(x)$ е интеграл на диференциалното уравнение

$$\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^\mu a_\mu y^{(\mu)}=0, \tag{6}$$

то съответната функция (2), при сходящ интеграл, ще бъде интеграл на уравнението (5).

Операторът $L_n f$ можем да получим направо. От (2) имаме

$$f^{(n)}(x)=\int_0^\infty \Phi^{(n)}\left(\frac{x}{u}\right)e^{-u}\,u^{\delta-n}\,du,$$

откъдето получаваме

$$x^{n-\delta-1}f^{(n)}(x)=\int_0^\infty \Phi^{(n)}\left(\frac{1}{v}\right)e^{-xv}\,v^{\delta-n}\,dv.$$

С диференциране n пъти получаваме

$$[x^{n-\delta-1}f^{(n)}(x)]^{(n)}=(-1)^n\int_0^\infty \Phi^{(n)}\left(\frac{1}{v}\right)e^{-xv}\,v^\delta\,dv,$$

откъдето имаме

$$x^{\delta+1}[x^{n-\delta-1}f^{(n)}(x)]^{(n)}=(-1)^n\int_0^\infty \Phi^{(n)}\left(\frac{x}{u}\right)u^\delta\,e^{-u}\,du.$$

Предните резултати могат лесно да се обобщат за многократни интеграли. Да разгледаме примерно интеграла

$$f(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{uvw}\right) u^\alpha v^\beta w^\gamma e^{-u-v-w}\, du\, dv\, dw.$$

Имаме за производната

$$f'(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi'\left(\frac{x}{uvw}\right) u^{\alpha-1} v^{\beta-1} w^{\gamma-1} e^{-u-v-w}\, du\, dv\, dw.$$

Заместваме u с $u=x\tau$ и получаваме

$$(x^{-\alpha} f')'=-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi'\left(\frac{1}{\tau vw}\right) \tau^\alpha v^{\beta-1} w^{\gamma-1} e^{-x\tau-v-w}\, d\tau\, dv\, dw.$$

Възстановяваме променливото $u=x\tau$

$$x^{1+\alpha}(x^{-\alpha} f')'=-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi'\left(\frac{x}{uvw}\right) u^\alpha v^{\beta-1} w^{\gamma-1} e^{-u-v-w}\, du\, dv\, dw$$

и със заместване на променливото $v=xh$ получаваме

$$[x^{1+\alpha-\beta}(x^{-\alpha} f')]'=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi'\left(\frac{1}{uhw}\right) u^\alpha h^\beta w^{\gamma-1} e^{-u-xh-w}\, du\, dh\, dw.$$

Като възстановим това променливо, с поставяне $t=\dfrac{w}{x}$, диференциране и възстановяване на w, получаваме окончателно формулата

$$x^\gamma \frac{d}{dx}\left\{x^{\beta+1-\gamma} \frac{d}{dx}\left[x^{1+\alpha-\beta} \frac{d}{dx}\left(x^{-\alpha} \frac{df}{ax}\right)\right]\right\}=$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi'\left(\frac{x}{uvw}\right) u^\alpha v^\beta w^\gamma e^{-u-v-w}\, du\, dv\, dw.$$

Така можем да намираме частни интеграли на редица линейни диференциални уравнения.

Едно обобщение на операторите получаваме, като вместо множителя e^{-u} употребим множител e^{-u^m}, т. е.

$$f(x)=\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{u}\right) e^{-u^m} u^\delta\, du,$$

където $m>0$ е цяло число. Ако например диференцираме m пъти, получаваме

$$f^{(m)}(x) = \int_0^\infty \Phi^{(m)}\left(\frac{x}{u}\right) e^{-u^m} u^{\delta-m}\, du.$$

и оттук, по вече употребения начин, със смяна на променливото $u = xt$, диференциране и възстановяване на променливото u, получаваме

$$x^{\delta+2-m}\left[x^{m-\delta-1} f^{(m)}(x)\right]^{(m)} = -m\int_0^\infty \Phi^{(m)}\left(\frac{x}{u}\right) e^{-u^m} u^{\delta}\, du$$

Предните резултати лесно се пренасят за функции на повече променливи. Например за функцията

$$f(x, y) = \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{v}\right) e^{-u-v} u^{\alpha-1} v^{\beta-1}\, du\, dv$$

получаваме

$$\frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} = \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi^{(n,m)}\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{v}\right) e^{-u-v} u^{\alpha-n-1} v^{\beta-m-1}\, du\, dv,$$

като с $\Phi^{(n,m)}(x, y)$ сме означили производната $\frac{\partial^{n+m}\Phi(x, y)}{\partial x^n \partial y^m}$. Със смяната $u = xt$, $v = yt$ имаме

$$x^{n-\alpha} y^{m-\beta} \frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} = \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi^{(n,m)}\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\tau}\right) e^{-xt-y\tau} t^{\alpha-n-1} \tau^{\beta-m-1} dt\, d\tau.$$

Като диференцираме и възстановим променливите $u = xt$ и $v = y\tau$, получаваме

$$x^{\alpha} y^{\beta} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}\left[x^{n-\alpha} y^{m-\beta} \frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m}\right] =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi^{(n,m)}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{v}\right) e^{-u-v} u^{\alpha-1} v^{\beta-1}\, du\, dv.$$

Подобно на преди могат да се въведат интеграли от по-висока кратност, като например

$$f(x, y) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{uv}, \frac{y}{t\tau}\right) e^{-u-v-t-\tau} u^{\alpha} v^{\beta} t^{\gamma} \tau^{\delta}\, du\, dv\, dt\, d\tau.$$

и т. н.

3. Някои асимптотични формули

В цитираната работа изведох асимптотична формула за функцията

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{u}-u}\, u^{\delta-1}\, du,$$

като сведох тази функция с подходяща трансформация към друга от типа на Лапласовия интеграл. Ще изведа сега въпросната формула по директен начин, като разгледам по-общата функция

$$(1) \qquad y(x)=\int_0^\infty e^{-\frac{x}{u^\mu}-u}\, u^\delta\, du, \quad \delta>-1, \ \mu>0.$$

Лесно намираме, че функцията

$$h(u)=\frac{x}{u^\mu}+u$$

има в интервала $(0, \infty)$ минимума $c\sqrt[\mu+1]{x}$, $c=\frac{\mu+1}{\sqrt[\mu+1]{\mu}}$, който получава за стойността $u=u_1=\sqrt[\mu+1]{\mu x}$. Нека ε е произволно малко число, $0<\varepsilon<1$. Да представим интеграла $y(x)$ в сума от три

$$y(x)=\int_0^{u_1(1-\varepsilon)} e^{-h(u)}\, u^\delta\, du+\int_{u_1(1-\varepsilon)}^{u_1(1+\varepsilon)} e^{-h(u)}\, u^\delta\, du+\int_{u_1(1+\varepsilon)}^{\infty} e^{-h(u)}\, u^\delta\, du=$$
$$=y_1(x)+y_2(x)+y_3(x).$$

Понеже

$$h(u)=h(u_1)+\frac{1}{2}(u-u_1)^2\,\frac{\mu(\mu+1)x}{\zeta^{\mu+2}}, \quad |\zeta-u_1|<|u-u_1|,$$

то получаваме, че

$$A\, u_1^\delta \int_{u_1(1-\varepsilon)}^{u_1(1+\varepsilon)} e^{-(u-u_1)^2\frac{\mu(\mu+1)x}{2[u_1(1-\varepsilon)]^{\mu+2}}}\, du<y_2(x)<$$
$$<B\, u_1^\delta \int_{u_1(1-\varepsilon)}^{u_1(1+\varepsilon)} e^{-(u-u_1)^2\frac{\mu(\mu+1)x}{2[u_1(1+\varepsilon)]^{\mu+2}}}\, du,$$

$$A=(1-\varepsilon)^\delta,\ B=(1+\varepsilon)^\delta \text{ при } \delta\geqq 0,\ A=(1+\varepsilon)^\delta,\ B=(1-\varepsilon)^\delta \text{ при } \delta<0.$$

С подходяща трансформация и минаване към граница за $x\to\infty$ получавам неравенствата

$$\mu^p A\sqrt{\frac{2(1-\varepsilon)^{\mu+2}}{\mu+1}} \leq \overline{\lim}\, \frac{y_2(x)}{x^p e^{-c\sqrt[\mu+1]{x}}} \leq \mu^p B\sqrt{\frac{2(1+\varepsilon)^{\mu+2}}{\mu+1}},$$

$$p=\frac{1}{\mu+1}\left(\delta+\frac{1}{2}\right).$$

Понеже функцията $-h(u)$ е растяща в интервала $0<u<u_1$, то

$$y_1(x)<e^{-h[u_1(1-\varepsilon)]}\int\limits_0^{u_1(1-\varepsilon)} u^\delta\, du< \frac{1}{\delta+1}u_1^\delta e^{-h[u_1(1-\varepsilon)]}.$$

Понеже

$$u_1^\delta e^{-h[u_1(1-\delta)]}=o\left(e^{-c\sqrt[\mu]{x}}\, x^k\right),\ k>0,$$

следва, че $y_1(x)=o\left(e^{-c\sqrt[\mu]{x}}\, x^{\frac{1}{\mu+1}(\delta+\frac{1}{2})}\right)$. При $u>u_1$ функцията $-h(u)$ е намаляваща и за интеграла

$$j_1(x) = \int\limits_{u_1(1+\varepsilon)}^{x^{\frac{1}{\mu}}} e^{-h(u)}u^\delta\, du$$

ще имаме

$$j_1(x)<e^{-h[u_1(1+\varepsilon)]}\frac{1}{\delta+1}x^{\frac{\delta+1}{\mu}}=o\left(e^{-c\sqrt[\mu]{x}}\, x^p\right),\ p=\frac{1}{\mu+1}\left(\delta+\frac{1}{2}\right).$$

За интеграла

$$j_2(x)=\int\limits_{\sqrt[\mu]{x}}^{\infty} e^{-h(u)}u^\delta\, du$$

получаваме

$$j_2(x)=x^{\frac{\delta+1}{\mu}}\int\limits_1^\infty e^{-t\sqrt[\mu]{x}-t^{-\mu}}t^\delta dt<x^{\frac{\delta+1}{\mu}}\int\limits_1^\infty e^{-t\sqrt[\mu]{x}}\, t^\delta\, dt=$$

$$=x^{\frac{\delta+1}{\mu}}e^{-\sqrt[\mu]{x}}\int\limits_0^\infty e^{-\tau\sqrt[\mu]{x}}(1+\tau)^\delta\, d\tau<x^{\frac{\delta+1}{\mu}}e^{-\sqrt[\mu]{x}}\int\limits_0^\infty e^{-\tau}(1+\tau)^\delta d\tau=o\left(e^{-c\sqrt[\mu]{x}}\, x^p\right).$$

От предните равенства следва, че

$$\mu^p\sqrt{\frac{2(1-\varepsilon)^{\mu+2}}{\mu+1}}A< \overline{\lim}\frac{y(x)}{x^p e^{-c\sqrt[\mu+1]{x}}} \leq \mu^p\sqrt{\frac{2(1+\varepsilon)^{\mu+2}}{\mu+1}}B.$$

Понеже ε може да бъде избрано произволно малко, то така установяваме асимптотичната формула за $x\to\infty$

$$y(x) \sim \mu^p\sqrt{\frac{2\pi}{\mu+1}}x^p e^{-c\sqrt[\mu+1]{x}},\quad c=\frac{\mu+1}{\sqrt[\mu+1]{\mu}}.$$

Този начин може да се приложи за функции, дефинирани с многократни интеграли, като например разгледаната по-преди функция

$$g(x)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-u-v-\frac{x}{uv}}\, u^{\alpha} v^{\beta}\, du, dv, \quad \alpha>-1,\ \beta>-1.$$

Функцията $u+v+\dfrac{x}{uv}$ получава минималната си стойност $3\sqrt[3]{x}$ при $u=v=\sqrt[3]{x}$. Следвайки същия път на доказване, с по-сложни изчисления, получаваме асимптотичната формула за $x\to\infty$

(2) $$g(x)\sim\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\; x^{\frac{\alpha+\beta+1}{3}}\; e^{-3\sqrt[3]{x}}.$$

4. Представяне със Стилтесов интеграл

Ще установим следната теорема:

5. Необходимо и достатъчно условие реалната функция $f(x)$ да се представя за $x\geqq 0$ с интеграла

(1) $$f(x)=\int_0^{\infty} g(xt)\, d\omega(t), \qquad 1>\alpha,\ \delta>0,\ \alpha\neq\delta,$$

където $\omega(t)$ е монотонно растяща функция за $t\geqq 0$ с ограничена вариация за $t\geqq 0$, се състои в следното: $f(x)$ да клони към определена граница, когато x расте неограничено, да допуска за $x>0$ производни от произволен ред, $f(0)=f(+0)$ и редицата от функции

(2) $$f_0(x)=f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ldots,$$

дефинирани с рекурентната формула $(n\geqq 1)$

(3) $$f_n(x)=x^2 f'''_{n-1}(x)+(3-\alpha-\delta)\, x f''_{n-1}(x)+(1-\alpha)(1-\delta)\, f'_{n-1}(x),$$

да удовлетворява условието

(4) $$(-1)^n f_n(x)\geqq 0$$

за $x>0$.

Ще докажем отначало, че условията са необходими. От представянето (1) получаваме непосредствено

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=g(0)\,[\omega(+0)-\omega(0)].$$

От друга страна, с диференциране получаваме

$$f'(x)=\int_0^{\infty} t g'(xt)\, d\omega(t),$$

$$f''(x) = \int_0^\infty t^2 g''(xt)\, d\omega(t),$$

$$f'''(x) = \int_0^\infty t^3 g'''(xt)\, d\omega(t),$$

като интегралите са сходящи за $x > 0$. Оттук имаме

$$f_1(x) = \int_0^\infty t\,[(xt)^2 g''(xt) + (3-a-\delta)(xt) g''(xt) + (1-a)(1-\delta) g'(xt)]\, d\omega(t)$$

$$= -\int_0^\infty t g(xt)\, d\omega(t).$$

Следователно, ще имаме въобще

(5) $$f_n(x) = (-1)^n \int_x^\infty t^n g(xt)\, d\omega(t),\quad n \geqq 0,$$

с което необходимостта на условията в теоремата е установена.

Обратната част на теоремата се установява по-сложно. От равенството

$$x^a (x^{1-a} \varphi_n(x))' = f_n(x)$$

получаваме

$$A^{1-a} \varphi_n(A) - x^{1-a} \varphi_n(x) = \int_x^A t^{-a} f_n(t)\, dt,$$

откъдето, като поставим $A \to \infty$, на основание на теорема 4, получаваме

$$\varphi_n(x) = -x^{a-1} \int_x^\infty t^a f_n(t)\, dt.$$

Понеже $x^\delta (x^{1-\delta} f'_{n-1})' = \varphi_n$, аналогично получаваме

$$x^{1-\delta} f'_{n-1}(x) = \int_x^\infty t^{a-\delta-1}\, dt \int_t^\infty \tau^{-a} f_n(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_x^\infty \tau^{-a} f_n(\tau)\, d\tau \int_x^\tau t^{a-\delta-1}\, dt = \frac{1}{a-\delta} \int_x^\infty \tau^{-a} f_n(\tau) (\tau^{a-\delta} - x^{a-\delta})\, d\tau.$$

Оттук имаме

(6) $$f_{n-1}(x) = -\frac{1}{a-\delta} \int_x^\infty \tau^{-a} f_n(\tau)\, Q_1(\tau, x)\, d\tau,$$

където Q_1 се дава с

$$Q_1(\tau, x) = \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{a}\right) \tau^a - \frac{x^\delta \tau^{a-\delta}}{\delta} + \frac{x^a}{a}.$$

Изобщо нека поставим

$$f_{n-}\ (x)=\frac{(-1)^k}{a-\delta}\int_x^{\infty}\tau^{-a}f_n(\tau)\,Q_k(\tau,\ x)\,d\tau. \tag{7}$$

От $(x^{1-a}\varphi_{n-k})'=x^{-a}f_{n-k}$ получаваме

$$\varphi_{n-k}(x)=\frac{(-1)^{k+1}x^{a-1}}{a-\delta}\int_x^{\infty}\tau^{-a}f_n(\tau,\ x)P_k(\tau,x)\ a\tau, \tag{8}$$

като с $P_k(\tau,\ x)$ означаваме израза

$$P_k(\tau,\ x=\int_x^{\tau}t^{-a}\,Q_k(\tau,\ t)\,dt. \tag{9}$$

По-нататък от равенството $(x^{1-\delta}f'_{n-k-1})'=x^{-\delta}\varphi_{n-k}$ и (8) имаме

$$x^{1-\delta}f'_{n-k-1}(x)=\frac{(-1)^k}{a-\delta}\int_x^{\infty}\tau^{-a}f_n(\tau)\,R_k(\tau,\ x)\ d\tau, \tag{9'}$$

като $R_k(\tau,\ x)$ означава израза

$$R_k(\tau,\ x)=\int_x^{\tau}t^{a-\delta-1}P_k(\tau,\ t)\,dt. \tag{10}$$

От (9) имаме

$$f_{n-k-1}(x)=\frac{(-1)^{k+1}}{a-\delta}\int_x^{\infty}\tau^{-a}f_n(\tau)\,Q_{k+1}(\tau,\ x)\,d\tau,$$

като с $Q_{k+1}(\tau,\ x)$ сме означили функцията

$$Q_{k+1}(\tau,\ x)=\int_x^{\tau}R_k(\tau,\ t)\ t^{\delta-1}\,dt.$$

Със смяна на реда на интегриране получаваме

$$R_k(\tau,\ x)=\int_x^{\tau}t^{a-\delta-1}\,dt\int_t^{\tau}u^{-a}\,Q_k(\tau,\ u)\,du=$$

$$=\int_x^{\tau}u^{-a}\,Q_k(\tau,\ u)\,du\int_x^{u}t^{a-\delta-1}\,dt$$

$$=\int_x^{\tau}u^{a-1}\,Q_k(\tau,\ u)\ \frac{1}{a-\delta}(u^{a-\delta}-x^{a-\delta})\,du,$$

$$Q_{n+1}(\tau,x)=\frac{1}{a-\delta}\int_x^{\tau}u^{-a}\,Q_k(\tau,\ u)\,du\int_x^{u}t^{\delta-1}(u^{a-\delta}-t^{a-\delta})\,dt.$$

Следователно, ще имаме окончателната формула

$$(11) \quad Q_{n+1}(\tau, x)=\frac{1}{a-\delta}\int_x^\tau Q_n(\tau, u)\left[\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{a}\right)-\frac{x^\delta u^{-\delta}}{\delta}+\frac{x^a u^{-a}}{a}\right]du.$$

Не е трудно да се види (по индуктивен път), че $Q_n(\tau, x)$ е сума от краен брой членове от вида $A_{pq}\tau^{\lambda_q}x^{\mu_q}$

$$(12) \qquad Q_n(\tau, x)=\sum A_{pq}\tau^{\lambda_p}x^{\mu_q},$$

като $\lambda_p+\mu_q=a+n-1$. Като означим с $Q_n(y)$ израза

$$(13) \qquad Q_n(y)=\sum A_{pq}y^{\lambda_p},$$

получаваме лесно, че

$$Q_n(xy, x)=x^{a+n-1}Q_n(y),\ Q_n(xy,xv)=(yv)^{a+n-1}Q_n\left(\frac{y}{v}\right).$$

Със смяната $\tau=xy$, $t=xv$ получаваме от (11) формулата

$$Q_{n+1}(y)=\frac{1}{a-\delta}\int_1^y v^{a+n-1}Q_n\left(\frac{y}{v}\right)\left(\frac{a-\delta}{a\delta}-\frac{v^{-\delta}}{\delta}+\frac{v^{-a}}{a}\right)dv.$$

Като поставим тук $y=e^z$, $v=e^t$ получаваме за $Q_{n+1}(e^z)$ формулата

$$(14) \qquad Q_{n+1}(e^z)=g_{n+1}(z)=\frac{1}{a-\delta}\int_0^z g(z-t)\left[\frac{a-\delta}{a\delta}e^{(a+n)t}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\delta}e^{(a+n-\delta)t}+\frac{1}{a}e^{nt}\right]dt.$$

Да означим с $L(f)$ трансформацията на Лаплас

$$L(f)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx.$$

С просто пресмятане получаваме

$$L\left[\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{a}\right)e^{(a+n)t}-\frac{1}{\delta}e^{(a+n-\delta)t}+\frac{1}{a}e^{nt}\right]=\frac{a-\delta}{(s-n)(s-n-a)(s-n-a+\delta)}.$$

От (14) ще имаме тогава

$$(15) \quad L(g_{n+1})=L(g_n)\frac{1}{(s-n)\,(s-n-a)\,(s-n-a+\delta)}.$$

Понеже

$$L(g_1)=\frac{1}{s(s-a)(s-a+\delta)},$$

то от (15) ще имаме

$$L(g_{n+1})=\Phi(s)\,\psi(s)\,R(s),\ \Phi(s)=\frac{1}{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n)},$$

$$\psi(s)=\frac{1}{(s-a)(s-a-1)\cdots(s-a-n)},$$

$$R(s)=\frac{1}{(s-a+\delta)(s-a+\delta-1)\cdots(s-a+\delta-n)}.$$

С лесно пресмятане намираме формулата

$$\psi(s)=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{1}{s-a-\nu}.$$

Оттук следва, че

$$\psi(s)=L(h),$$

където функцията $h(t)$ се дава с

$$h(t)=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}e^{(a+\nu)t}=\frac{e^{at}}{n!}(e^t-1)^n.$$

На основание на тази формула, получаваме

$$\Phi(s)=L(h_0),\qquad h_0=\frac{1}{n!}(e^t-1)^n,$$

$$\psi(s)=L(h),\qquad h=\frac{e^{at}}{n!}(e^t-1)^n,$$

$$R(s)=L(h_1),\qquad h_1=\frac{1}{n!}e^{(a-\delta)t}(e^t-1)^n.$$

$$g_{n+1}(t)=\frac{1}{(n!)^3}\int_0^z e^{(a-\delta)(z-t)}(e^{z-t}-1)^n\,dt\int_0^t e^{au}(e^u-1)^n(e^{t-u}-1)^n\,du.$$

Като възстановим променливите $e^z=y$, $e^u=h$, получаваме

$$Q_{n+1}(y)=\frac{1}{(n!)^3}\int_1^y\left(\frac{y}{v}\right)^{a-\delta}\left(\frac{y}{v}-1\right)^n\frac{dv}{v}\int_1^v h^a(h-1)^n\left(\frac{v}{h}-1\right)^n\frac{dh}{h},$$

откъдето за $Q_{n+1}(\tau, x)$ имаме окончателната формула

$$Q_{n+1}(\tau,x)=\frac{\tau^{a-\delta}}{(n!)^3}\int_x^\tau \zeta^{a-n-1}(\zeta-x)^n\,d\zeta\int_\zeta^\tau(\tau-w)^n(w-\zeta)^n\frac{dw}{w^{a-\delta+n+1}}. \tag{16}$$

Но от (7) имаме $(\lim f(x)=c)$

$$f(x)=c+(-1)^{n+1}\int_x^\infty \tau^{-a}Q_{n+1}(\tau,x)\,f_{n+1}(\tau)\,d\tau \tag{17}$$

Предната формула можем да пишем така

(18)
$$f(x)=c+\int_x^\infty T_n(\tau, x)F_n(\tau)\,d\tau,$$

като сме въвели означението

$$T_n(\tau, x)=\frac{Q_{n+1}(\tau, x)}{Q_{n11}(\tau, 0)},\quad F_n(\tau)=(-1)^{n+1} f_{n+1}(\tau)\ \tau^{-a}\, Q_{n+1}(\tau, 0)>0.$$

При $x=0$ имаме

(19)
$$f(0)=c+\int_0^\infty F_n(\tau)\,d\tau.$$

За $Q_{n+1}(\tau, 0)$ получаваме лесно

(20)
$$Q_{n+1}(\tau, 0)=\frac{\tau^{a-\delta}}{(n!)^3}\int_0^\tau(\tau-w)^{-a+\delta-n-1}\,dw\int_0^w \zeta^{a-n-1+n}(w-\zeta)^n\,d\zeta=$$
$$=\frac{\tau^{a+n}}{(n!)^3}\cdot\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(\delta)\,\Gamma^2(n+1)}{\Gamma(a+n+1)\,\Gamma(\delta+n+1)}\,.$$

Със смяната $\tau=\dfrac{n^3}{t}$ формулата (18) става

$$f(x)=c+\int_0^{\frac{n^3}{x}} T_n\left(\frac{n^3}{t},\ x\right)v_n(t)\,dt$$

където

$$v_n(t)=F_n\left(\frac{n^3}{t}\right)\frac{n^3}{t^2},\qquad f(0)=c+\int_0^\infty v_n(t)\,dt.$$

Като въведем монотонно растящата функция $\omega_n(t)$, дефинирана с

$$\omega_n(\tau)=\int_0^\tau v_n(t)\,dt,\ \tau\leqq\frac{n^3}{x},\ \omega_n(\tau)=\omega_n\left(\frac{n^3}{x}\right),\ \tau>\frac{n^3}{x},$$

формулата (18) добива вида

(21)
$$f(x)=c+\int_0^\infty T_n\left(\frac{n^3}{t},\ x\right)d\omega_n(t).$$

Ще намерим границата на израза $T_n\left(\dfrac{n^3}{t},\ x\right)$ при фиксирани t и x.

Понеже при $n\to\infty$ имаме асимптотичните равенства

$$\frac{\Gamma^2(n+1)}{\Gamma(a+n+1)\,\Gamma(\delta+n+1)}\sim n^{-a-\delta},$$

то можем да разгледаме вместо $T_n\left(\frac{n^3}{t}, x\right)$ израза $\left(\tau = \frac{n^3}{t}\right)$

$$j_n = \frac{\tau^{-a-n}\, n^{a+\delta}}{\Gamma(a)\,\Gamma(\delta)} \int_x^\tau \zeta^{a-n-1}(\zeta - x)^n\, d\zeta \int_\zeta^\tau (\tau - u)^n (u-\zeta)^n \frac{du}{u^{a-\delta+n+1}}.$$

Със смяната на променливите $\zeta = \frac{n}{t}\lambda$, $u = \frac{n^2}{t}h$ и с несложни опростявания получаваме за j_n формулата

$$(22)\quad j_n = \frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(\delta)} \int_{\frac{xt}{n}}^{n^2} \lambda^{a-1}\left(1 - \frac{tx}{n\lambda}\right)^n d\lambda \int_{\frac{\lambda}{n}}^{n} \left(1 - \frac{h}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{nh}\right)^n \frac{dh}{h^{a-\delta+1}}.$$

С преминаване към граница при $n \to \infty$ получаваме

$$(23)\quad \lim j_n = \frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(\delta)} \int_0^\infty \lambda^{a-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} d\lambda \int_0^\infty h^{-a+\delta-1} e^{-h-\frac{\lambda}{h}} dh = \frac{g(xt)}{\Gamma(a)\,\Gamma(\delta)}.$$

Това формално преминаване към граница се лесно строго установява, като се следват добре познатите пътища на доказване и се използува факта, че интегралите в (23) са сходящи (абсолютно, по причина на положителност на интегруемите функции) и че $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqq e^{-x}$ при $x \leqq n$.

Редицата $\omega_1(x)$, $\omega_2(x), \cdots$ се състои от монотонно растящи и ограничени равномерно функции. По известната теорема на Хелли съществува подредица

$$\omega_{n_1}(x),\ \omega_{n_2}(x),\ \omega_{n_3}(x), \cdots$$

която клони към една монотонно растяща функция $\omega(x)$ във всяка точка на непрекъснатост за нея. Функцията $\omega(x)$ ще бъде също ограничена за $x \geqq 0$. По друга теорема на Хелли за фиксирани a, b, които са точки на непрекъснатост на $\omega(x)$, ще имаме граничното равенство

$$(24)\quad \lim \int_a^b T_n\left(\frac{n^3}{t}, x\right) d\omega_{n_i}(t) = \int_a^b g(xt)\, d\omega(t).$$

Като представим интеграла

$$\int_0^\infty T_{n_i}\left(\frac{n^3}{t}, x\right) d\omega_{n_i}(t)$$

като сума от три

$$\int_0^a + \int_a^b + \int_b^\infty = i_1 + i_2 + i_3,$$

да направим същото за интеграла

$$\int_0^\infty g(xt)\, d\omega(t) = \int_0^a + \int_a^b + \int_b^\infty = j_1' + j_2' + j_3'.$$

Можем да изберем $a>0$ така малко и b така голямо, че интегралите i_1, i_3, j_1', j_3' да станат произволно малки. Като вземем тогава пред вид граничното равенство (24), получаваме

$$f(x)=c+\int_0^\infty g(xt)\,d\omega(t).$$

Понеже неотрицателната константа c може да се представи със Стилтесов интеграл от монотонно растяща ограничена функция, то с предната формула теоремата е установена напълно.

От самото доказателство се вижда, че при освобождаване от условието функцията $\omega(x)$ да бъде ограничена предната теорема остава в сила, като се премахне ограничението, че $f(0)=f(+0)$.

5. Решение на едно особено интегрално уравнение

В тази част ще разгледаме интегралното уравнение

$$f(x)=\int_0^\infty g(xt)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

където $g(x)$ е дефинираната по-преди функция

$$g(x)=\int_0^\infty e^{-u-v-\frac{x}{uv}}u^{\alpha-1}v^{\delta-1}\,du\,dv,\ \alpha>0,\ \delta>0.$$

Предполагаме, че функцията $\varphi(t)$ е интегруема във всеки краен интервал $(0, x)$. Като се основаваме на асимптотичната формула от т. 3, следвайки същия път на доказателство от предната ни работа, доказваме следните предложения:

1. Ако интегралът (1) е сходящ за едно $x=x_0>0$, то той е сходящ за всяко $x>x_0$.

2. Ако интегралът (1) е сходящ за едно $x=x_0>0$, то интегралът

$$\int_A^\infty \varphi(t)t^p\,e^{-3\sqrt[3]{xt}}\,dt,\ p=\frac{\alpha+\delta-1}{3}, \tag{2}$$

е сходящ за всяко $x>x_0$. Обратно, ако интегралът (2) е сходящ за едно $x=x_0>0$, то интегралът (1) е сходящ за всяко $x>x_0$.

Имаме следната теорема:

6. **Нека интегралът (1) да е сходящ за някое $x=c>0$. Образуваме последователно функциите $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x),\cdots$ (които съществуват сигурно за $x>c$) на основание на рекурентната формула**

$$f_n(x)=x^2 f'''_{n-1}(x)+(3-\alpha-\delta)\,xf''_{n-1}(x)+(1-\alpha)(1-\delta)f'_{n-1}(x),\ n\geqq 1. \tag{3}$$

Нека $x_0>0$ е точка на непрекъснатост на функцията $\varphi(t)$ или по-общо, точка, за която да имаме

$$\int_{x_0}^{x} |\varphi(t)-\varphi(x_0)|\,dt = o(x-x_0), \quad x \to x_0. \tag{4}$$

Тогава имаме граничното равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n e^{3n}}{(\sqrt{2\pi})^3 n^{\alpha+\delta-3/2} x_0^{n+1}} f_n\left(\frac{n^3}{x_0}\right) = \varphi(x_0). \tag{5}$$

Доказателството се основава на асимптотичната формула за функцията $g(x)$, на лесно изводимата такава формула за $g'(x)$ и става напълно аналогично на доказателството на теорема I. от цитираната ми по-раншна работа. По тази причина ще се огранича на едно късо скициране на доказателството.

Подобно на предната точка имаме за $f_n(x)$

$$(-1)^n f_n(x) = \int_0^\infty t^n g(xt)\varphi(t)\,dt.$$

Следователно

$$(-1)^n f_n\left(\frac{n^3}{x_0}\right) = \int_0^\infty t^n g\left(\frac{n^3}{x_0}t\right)\varphi(t)\,dt.$$

За интеграла

$$A_n = \int_0^\infty t^n g\left(\frac{n^3}{x_0}t\right)dt$$

с лесно пресмятане получаваме

$$A_n = \left(\frac{x_0}{n^3}\right)^{n+1} \Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\delta+n+1).$$

На основание на Стирлинговата формула получаваме за $n\to\infty$

$$\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\delta+n+1) \sim (\sqrt{2\pi})^3\, e^{-3n}\, n^{\alpha+\delta-3/2}.$$

Следователно, за числата $\frac{1}{A_n}$ ще имаме

$$\frac{1}{A_n} \sim g_n = \frac{e^{3n}}{(\sqrt{2\pi})^3 n^{\alpha+\delta-3/2} x_0^{n+1}}.$$

На основание на асимптотичната формула (2) § 3. за $t \geqq \Delta > 0$ имаме

$$\left|g\left(\frac{n^3}{x_0}t\right)\right| < M\left(\frac{n^3}{x_0}t\right)^p e^{-3n\sqrt[3]{\frac{t}{x_0}}} \qquad p = \frac{\alpha+\delta-1}{3},$$

като M е константа. За функцията

$$\psi(t) = t^{n+p} e^{-3n\sqrt[3]{\frac{t}{x_0}}}$$

получаваме

$$\psi'(t)=\psi(t)\left(\frac{n+p}{t}-\frac{n}{\sqrt[3]{t^2 x_0}}\right).$$

Производната $\psi'(t)$ се анулира при

$$t=x_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^3\sim x_0$$

и следователно, $\psi(t)$ е растяща функция (при големи n) в интервала $0<t\leqq x_0-\varepsilon$ и намаляваща в интервала $x_0+\varepsilon\leqq t<\infty$. Тогава доказваме, че при фиксирано ε и x_0 ще имаме равенствата

$$(6)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{A_n}\int_0^{x_0-\varepsilon} t^n g\left(\frac{n^2}{x_0}t\right)\varphi(t)\,dt=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{A_n}\int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} t^n g\left(\frac{n^3}{x_0}t\right)\varphi(t)\,dt=0.$$

От друга страна, на основание на условието (4), установяваме равенството

$$(7)\qquad \frac{1}{A_n}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} t^n g\left(\frac{n^3}{x_0}t\right)\varphi(t)\,dt=\frac{1}{A_n}\varphi(x_0)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} t^n g\left(\frac{n^3}{x_0}t\right)dt+o(1)+\lambda_n,$$

където $|\lambda_n|<M'r$, M' е константа, а $r>0$ е безкрайно малко заедно с ε. От граничните равенства (6) и (7) следва изказаната теорема.

6. Някои общи разглеждания

В предните ми работи и в настоящата работа установих теореми за особени интегрални уравнения при функции, удовлетворяващи на специални линейни диференциални уравнения. Естествено е да си поставим въпроса за възможното обобщение на получените резултати. Примерно ще се спрем на диференциални уравнения от втори ред. Лесно се вижда, че разширения на предните ни резултати могат да се постигнат за уравнения от вида

$$(1)\qquad x^m y''+Ax^{m-1}y'-By=0,\ m\neq 2,$$

където A и B са константи. Действително от равенството

$$(2)\qquad f(x)=\int_0^{\infty} g(xt)\varphi(t)\,dt,$$

при предположена сходимост и диференцируемост, получаваме

$$f'(x)=\int_0^{\infty} g'(xt)\,t\,\varphi(t)\,dt,\ f''(x)=\int_0^{\infty} g''(xt)\,t^2\varphi(t)\,dt,$$

$$f_1(x)=x^m f''(x)+Ax^{m-1}f'(x)=\int_0^{\infty}[(xt)^m g''(xt)+A(xt)^{m-1}g'(xt)]\,t^{2-m}\,dt.$$

Ако $g(x)$ е интеграл на уравнението (1), то последното равенство става

$$f_1(x) = B\int_0^\infty g(xt)\, t^{2-m}\, \varphi(t)\, dt.$$

Като продължаваме така, получаваме аналогично

$$f_2(x) = x^m f_1''(x) + Ax^{m-1} f_1'(x) = B^2 \int_0^\infty g(xt)\, t^{4-2m}\, \varphi(t)\, dt,$$

$$f_3(x) = x^m f_2''(x) + Ax^{m-1} f_2'(x) = B^3 \int_0^\infty g(xt)\, t^{6-3m}\, \varphi(t)\, dt,$$

и изобщо

$$f_n(x) = B^n \int_0^\infty g(xt)\, t^{n(2-m)}\, \varphi(t)\, dt.$$

На основание на тази формула можем да докажем аналогични теореми за решение на особени интегрални уравнения (2) при дадена функция $f(x)$. От друга страна уравнението (1) може да се сведе към друго от разгледан вече от нас вид, като приложим подходяща трансформация. Действително, ако поставим

$$y(x) = F(\mu x^\beta),\ \beta = 2 - m,$$

то (1) се трансформира в уравнението

$$x^{2-m} F''(\mu x^\beta)\, \mu^2 \beta^2 + F'(\mu x^\beta)\,[\mu\beta(\beta-1) + A\mu\beta] - BF(\mu x^\beta) = 0,$$

т. е. функцията $F(x)$ удовлетворява уравнението

$$xF''(x) + (1-\delta_1)\, F'(x) - F(x) = 0$$

при подходящ параметър δ_1. Следователно, интегралът (2) става

$$f(x) = \int_0^\infty \Phi_{\delta_1}(\mu x^\beta t^\beta)\, \varphi(t)\, dt$$

или

$$f\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right) = h(x) = \int_0^\infty \Phi_{\delta_1}(xt)\, \varphi_1(t)\, dt \tag{3}$$

и при $\mu > 0$ решението на уравнението (2) се свежда към това на уравнението (3), което вече разгледахме в цитираната работа. При това трябва да се вземат тези интеграли на въпросните диференциални уравнения, които имат еднакво асимптотично отнасяне при $x \to \infty$. Така например за функцията на Уитекер получаваме релацията

$$(2x)^\delta\, W_{0,m}(2x) = \frac{4^\delta}{\sqrt{\pi}}\, \Phi_m\left(\frac{x^2}{4}\right),\ \delta = m - \frac{1}{2},$$

където $\Phi_m(x)$ е разгледаната по-рано от нас функция $\Phi(x)$ при параметър $\delta=m$. Представянията обаче със Стилтесов интеграл в двата случая не са еквивалентни.

Лесно се вижда, че теорема 2. от цитираната ни предна работа съдържа теоремата на Бернщейн. Така при $\delta=\frac{1}{2}$ функцията $\Phi(x)$ става

$$\Phi(x)=\int_0^\infty e^{-\frac{x}{u}-u}\frac{du}{\sqrt{u}}=\sqrt{\pi}\; e^{-2\sqrt{x}}$$

За една функция $f(x)$, представена с помощта на $\Phi(x)$, имаме

$$f(x)=\int_0^\infty \Phi(xt)\,d\omega(t)=\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-2\sqrt{xt}}\,d\omega(t)=\varphi(\sqrt{x}), \tag{4}$$

$$\varphi(x)=\int_0^\infty e^{-x\tau}\,d\omega_1(\tau). \tag{5}$$

С просто пресмятане виждаме, че функциите $f_n(x^2)$ от теорема 2 са равни на производните на $\varphi(x)$ до постоянен множител

$$f_n(x^2)=\frac{1}{4^n}\varphi^{(2n)}(x),\quad n\geqq 0.$$

Условията $f_n(x)\geqq 0$, $f(x)\to c\,(x\to\infty)$ за представянето (4) или, все едно, за (5) се свеждат на условията

$$\varphi(x)\to c\,(x\to\infty),\qquad \varphi^{(2n)}(x)\geqq 0,\quad x>0.$$

По една наша теорема за производните на функциите тези условия са еквивалентни на условията $(-1)^n\varphi^{(n)}(x)\geqq 0$, $n\geqq 0$, $x>0$, което е и теоремата на Бернщейн. От непрекъснатостта на $f(x)$ за $x=+0$ следва тази на $\varphi(x)$ за същата точка и обратно.

От изложеното в настоящата работа и в предните цитирани мои работи се вижда, че получените резултати могат да се обобщат за функции от вида

$$g(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty u_1^{a_1}u_2^{a_2}\cdots u_m^{a_m}\; e^{-\left(u_1+u_2+\cdots+u_m+\frac{x}{u_1u_2\cdots u_m}\right)}\,du_1\,du_2\cdots du_m.$$

Следвайки метода от § 2., не е трудно да се намери линейно диференциално уравнение от $m+1$-ви ред, което се удовлетворява от функцията $g(x)$. След това въпросът за представянията (2) и (4) с помощта на горната функция се третира по употребения вече от нас начин с, разбира се, превъзмогване на някои трудности, явяващи се следствие общността на задачата. След написването на тази работа ми стана известна работа [3], където с друг метод се доказват теореми от подобен тип на теоремите 5. и 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Обрешков. I. Върху някои свойства на реалните функции, дефинирани върху реалната полуос, Годишник на Соф. университет, т. 47, 1950/51—1951/52, стр. 109—134.
2. Н. Обрешков. Върху някои представяния с интеграли на реални функции, Известия на Математическия институт при БАН, т. I, 1953, стр. 83—109.
3. I. I. Hirschman and D. V. Widder. Trans. of the Amer. Mathem. Soc., 66, 1949, 135—201.

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ФУНКЦИЙ В СВЯЗИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Н. Обрешков

РЕЗЮМЕ

В этой работе мы рассмотрим решение уравнения

$$f(x)=\int_0^\infty g(xt)\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

в котором $g(x)$ обозначает функцию

$$g(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty u^{\alpha-1}v^{\beta-1}e^{-u-v-\frac{x}{uv}}\,du\,dv,\ \alpha>0,\ \beta>0, \tag{2}$$

удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$x^2y'''+(3-\alpha-\beta)xy''+(1-\alpha)(1-\beta)y'+y=0. \tag{3}$$

1. Пусть функция $\varphi(x)$ интегрируема в каждом интервале $(0, x)$, $x>0$, и интеграл (1) сходится для некоторого $x=c>0$. Строим функции

$$f_0(x)=f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\cdots,$$

определенные рекуррентной формулой

$$f_n(x)=x^2f'''_{n-1}(x)+(3-\alpha-\beta)xf''_{n-1}(x)+(1-\alpha)(1-\beta)f'_{n-1}(x),\ n\geq 1.$$

При $x>c$ эти функции существуют. Тогда для всякой точки x_0, для которой

$$\int_{x_0}^{x}|\varphi(t)-\varphi(x_0)|\,dt=o(x-x_0),\ x\to x_0,$$

будем иметь предельное равенство

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n \, e^{3n}}{(\sqrt{2\pi})^3 \, n^{\alpha+\beta-3/2} \, x_0^{n+1}} \, f_n\left(\frac{n^3}{x_0}\right) = \varphi(x_0). \tag{4}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$F(x) = \int_0^\infty g(xt)\, d\omega(t), \quad 0<\alpha<1, \; 0<\beta<1, \; \alpha \neq \beta, \tag{5}$$

где $\omega(t)$ — действительная монотонно возрастающая функция для $t>0$.

2. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $F(x)$ могла быть представлена интегралом (5), состоит в том, чтобы функция $F(x)$ стремилась к определенному пределу, если $x \to \infty$, и функции $F_0(x) = F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x), \cdots$, определенные рекуррентной формулой

$$F_n(x) = x^2 F'''_{n-1}(x) + (3-\alpha-\beta)\, x F''_{n-1}(x) + (1-\alpha)(1-\beta) F'_{n-1}(x),$$

были неотрицательны для $x>0$.

В случае ограниченности функции $\omega(x)$ добавляется условие $F(0) = F(+0)$.

Эты резултаты можно обобщит для функций вида

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty u_1^{\alpha_1-1} u_2^{\alpha_2-1} \cdots u_m^{\alpha_m-1} e^{-u_1-u_2-\cdots-u_m-\frac{x}{u_1 u_2 \cdots u_m}} \, du_1 \, du_2 \cdots du_m.$$

SUR QUELQUES REPRESENTATIONS INTEGRALES DE FONCTIONS EN LIAISON DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

N. Obrechkoff

RESUME

Nous démontrons d'abord que la fonction

$$\Phi(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t-u-\frac{x}{tu}}\, t^{\alpha-1} u^{\beta-1}\, dt, du, \quad \alpha>0,\ \beta>0$$

satisfait à l'équation

$$x^2 y'''+(3-\alpha-\beta)\, xy''+(1-\alpha)(1-\beta)\, y'+y=0.$$

Parmi les résultats obtenus, nous trouvons les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction réelle $f(x)$ puisse être représentée pour $x \geqq 0$ par l'intégrale

$$f(x)=\int_0^\infty \Phi(xt)\, d\omega(t), \quad 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1,\ \alpha \neq \beta,$$

où $\omega(x)$ est une fonction bornée non décroissante pour $x \geqq 0$.

Les conditions sont les suivantes: la limite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe, $f(0)=f(+0)$, $(-1)^n f_n(x) \geqq 0$, $n=0, 1, 2, 3, \cdots$ pour $x>0$, les fonctions $f_n(x)$ étant définies par

$$f_n(x)=x^2 f'''_{n-2}(x)+(3-\alpha-\beta)\, x f''_{n-1}(x)+(1-\alpha)(1-\beta) f'_{n-1}(x), \quad n \geqq 1,$$

$$f_0(x)=f(x).$$