ВЪРХУ АПРОКСИМАЦИЯТА НА ЛИНЕЙНИТЕ ФОРМИ

от Н. Обрешков

В тази работа установявам следната теорема:

Нека $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k$ са произволни $k+1$ реални числа, $k \geqq 1$ и n е произволно цяло положително число. Тогава съществуват $k+1$ цели числа

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k,$$

не всички равни на нула, които удовлетворяват неравенствата

$$(1) \qquad |\omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_k x_k| \leqq \frac{n}{(n+1)^{k+1}-1} \sum_{i=0}^{k} |\omega_i|,$$

$$|x_s| \leqq n, \ s = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Знак на равенство в (1) имаме само тогава, когато формата

$$\omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_k x_k$$

е равна на формата

$$(2) \qquad \lambda [x_0 \pm (n+1) x_1 \pm (n+1)^2 x_2 \pm \ldots \pm (n+1)^k x_k],$$

където λ е произволно, отлично от нула число, или е равна на някоя форма, получена от (2) с пермутиране на променливите.

Доказателството на неравенството (1) е късо и се основава на геометрични разглеждания. Изчерпателното разглеждане на случаите, когато в (1) имаме знак на равенство, е малко по-дълго. В работата са дадени и някои приложения на горната теорема.

1. Случай на две променливи

Ще установим следната теорема:

I. Нека ω е произволно реално число и n е произволно цяло положително число. Тогава съществуват две цели числа x и y, удовлетворяващи условията

$$(1) \qquad |\omega x - y| \leqq \frac{1+|\omega|}{n+2}, \ |x| \leqq n, \ |y| \leqq n, \ |x| + |y| > 0.$$

Знак на равенство в (1) имаме само тогава, когато ω е равно или на $\pm(n+1)$, или на $\pm\frac{1}{n+1}$.

Теоремата може да се докаже по различни начини. Ще следваме пътя, който може да се обобщи за повече от две променливи. Отначало ще отбележим, че можем да предполагаме числото ω положително, понеже, ако $\omega<0$, то разглеждаме линейната функция $-\omega(-x)-y$.

Да означим с K квадратната мрежа от точките $M_s(x_s, y_s)$, където x_s и y_s вземат стойностите $0, 1, 2, \ldots, n$. През всяка точка M_s прекарваме права L_s с уравнение $y-y_s=\omega(x-x_s)$ и нека $d_1, d_2, \ldots, d_m$, $m=(n+1)^2-1$, са разстоянията на съседните прави. Въпросните прави очевидно лежат в лентата, ограничена от крайните прави $y-n=\omega x$ и $y-n=\omega(x-n)$. Но разстоянието между тези прави е равно на $\frac{n(1+\omega)}{\sqrt{1+\omega^2}}=d$ и, следователно, ще имаме

$$d_1+d_2+\ldots+d_m=d.$$

Ако не всички разстояния $d_1, d_2, \ldots, d_m$ са равни помежду си, то ще има поне едно от тях, което да означим с d_p, по-малко от

$$\frac{d}{m}=\frac{n(1+\omega)}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Ако L_q и L_g са правите, между които разстоянието е равно на d_p, то ще имаме неравенството

$$(2) \qquad |(y_q-y_g)-\omega(x_q-x_g)|<\frac{n(1+\omega)}{m}=\frac{1+\omega}{n+2},$$

$$|y_q-y_g|\leq n,\ |x_q-x_g|\leq n,\ |y_q-y_g|+|x_q-x_g|>0.$$

В случая, когато всички d_s са равни помежду си, в (2) ще имаме равенство. Да изследваме сега, при какви условия ще имаме този случай. Трябва правите L_s да пресичат оста y в точки на равно разстояние, т. е. числата i дефинирани с

$$y-\omega x=-n\omega+hi,\ h=\frac{n(1+\omega)}{m},$$

да са числата $0, 1, 2, 3, \ldots, m$, когато x и y вземат стойностите $0, 1, 2, 3, \ldots, n$. Нека a е примитивен корен, например

$$a=e^{\frac{2\pi}{m+1}i}$$

на уравнението $x^{m+1}=1$. Тогава ще имаме

$$\sum_{i=0}^{m} a^i=\sum_{y=0}^{n} a^{\frac{y}{h}}\sum_{x=0}^{n} a^{-\frac{\omega x}{h}}=0.$$

Оттук следват двете възможности

$$\sum_{y=0}^{n} a^{\frac{y}{h}}=0 \quad \text{и} \quad \sum_{x=0}^{n} a^{-\frac{\omega x}{h}}=0.$$

При първия случай ще имаме $a^{\frac{n+1}{h}}=1$ и, следователно,

$$\frac{n+1}{h}=K(m+1),$$

където K е цяло положително число. Оттук получаваме

$$\frac{n+2}{n+1}=K(1+\omega),$$

откъдето очевидно следва, че $K=1$ и, следователно, $\omega=\frac{1}{n+1}\cdot$

Във втория случай ще имаме

$$a^{-\frac{\omega}{h}(n+1)}=1,$$

откъдето заключаваме, че

$$\frac{\omega}{h}(n+1)=P(m+1),$$

където P е цяло положително число. Оттук имаме

$$1+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{P}\cdot\frac{n+2}{n+1}$$

и, следователно, числото P трябва да е равно на 1, т. е. $\omega=n+1$, с което теоремата е установена, като се вземе под внимание още факта, че при $\omega=0$ неравенството (1) е очевидно удовлетворено за $x=1$, $y=0$.

2. Случай на повече променливи

Ще установим сега общата теорема:

2. Нека $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ са произволни $k+1$ реални числа, $k\geqq1$ и n е произволно цяло положително число. Тогава съществуват $k+1$ цели числа, не всички равни на нула и удовлетворяващи условията

$$|x_i|\leqq n, \quad i=0,\ 1,\ 2,..k,$$

$$(1)\quad |\omega_0 x_0+\omega_1 x_1+\ldots+\omega_k x_k|\leqq\frac{n}{(n+1)^{k+1}-1}(|\omega_0|+|\omega_1|+\cdots+|\omega_k|).$$

Знак на равенство в (1) имаме само тогава, когато формата

$$\omega_0 x_0+\omega_1 x_1+\ldots+\omega_k x_k$$

е равна на формата

$$(2)\qquad \lambda\ [x_0\pm(n+1)x_1\pm(n+1)^2x_2\pm\ldots\pm(n+1)^k x_k],$$

където λ е произволно отлично от нула число, или на някоя форма, получена от (2) с пермутиране на променливите.

Нека отбележим отначало, че в случай, че някое от числата $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k$ е равно на нула, то теоремата е очевидна. Така, ако $\omega_0=0$, то достатъчно е да положим $x_0=1$, $x_1=x_2=\ldots=x_k=0$ и неравенството (1) ще бъде удовлетворено. Освен това знакът на числата ω_i, $0\leq i\leq k$, можем да вземем произволно.

С разделяне вместо формата $\omega_0 x_0+\omega_1 x_1+\cdots+\omega_k x_k$ ще разгледаме формата

$$\delta_1 x_1+\delta_2 x_2+\cdots+\delta_k x_k-x_0,$$

където числата $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k$ са положителни. В пространството от $k+1$ измерения да означим с K кубичната мрежа от точки M с координати (правоъгълни) $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$, като променливите $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$ вземат стойностите $0, 1, 2, 3, \ldots, n$. През всяка такава точка $x_0^{(s)}, x_1^{(s)}, \cdots, x_k^{(s)}, s=0, 1, 2, \cdots, m$, да прекараме хиперравнината L_s с уравнение

$$x_0-x_0^{(s)}=\delta_1(x_1-x_1^{(s)})+\delta_2(x_2-x_2^{(s)})+\cdots+\delta_k(x_k-x_k^{(s)}). \tag{3}$$

Лесно се вижда, че хиперравнините

$$\begin{aligned} x_0&=\delta_1(x_1-n)+\delta_2(x_2-n)+\cdots+\delta_k(x_k-n),\\ x_0-n&=\delta_1 x_1+\delta_2 x_2+\cdots+\delta_k x_k \end{aligned} \tag{4}$$

са крайни и останалите хиперравнини се съдържат между тях. Разстоянието между двете хиперравнини (4) е равно на

$$d=\frac{n(1+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k)}{\sqrt{1+\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_k^2}}, \quad m=(n+1)^{k+1}-1.$$

Ако с $d_1, d_2, \cdots, d_m$ означим разстоянията между съседните хиперравнини, то ще имаме

$$d_1+d_2+\cdots+d_m=d,$$

откъдето следва, че ще имаме поне едно число d_p по-малко от d/m или всички $d_1, d_2, \cdots, d_m$ са равни помежду си. Ако $x_0', x_1', \cdots, x_k'$ и $x_0'', x_1'', \cdots, x_k''$ са точките, през които минават хиперравнините, на които разстоянието е равно на d_p, то ще имаме

$$|x_0'-x_0''-\delta_1(x_1'-x_1'')-\delta_2(x_2'-x_2'')-\cdots-\delta_k(x_k'-x_k'')|$$

$$<\frac{n(1+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k)}{(n+1)^{k+1}-1}, \quad |x_i'-x_i''|\leq n$$

и неравенството (1) в случая е удовлетворено със знак за неравенство. Във втория случай хиперравнините трябва да отсичат върху оста x_0 равни отсечки, което е еквивалентно, както лесно се вижда, на условието, числата i, дефинирани с равенството

$$x_0-\delta_1 x_1-\delta_2 x_2-\cdots-\delta_k x_k=-n\delta_1-n\delta_2-\cdots-n\delta_k+hi, \quad h=\frac{n(1+\delta_1+\cdots+\delta_m)}{m}$$

да вземат за стойности числата от редицата

$$0, 1, 2, \cdots, m,$$

когато променливите $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$ вземат стойностите $0, 1, 2, \ldots, n$. Като въведем променливите

$$y_0 = x_0, \quad y_s = n - x_s, \quad 1 \leqq s \leqq n,$$

които също вземат стойностите $0, 1, 2, \ldots, n$, то предното равенство става

(5) $$y_0 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \cdots + \delta_k y_k = hi.$$

Да означим с a един примитивен корен на $x^{m+1} = 1$, например

$$a = e^{\frac{2\pi}{m+1} i}.$$

Тогава равенството

$$\sum_{k=0}^{m} a^i = 0$$

става

$$\sum_{y_0=0}^{n} a^{\frac{y_0}{h}} \sum_{y_1=0}^{n} a^{\frac{\delta_1 y_1}{h}} \quad \sum_{yk=0}^{n} a^{\frac{\delta_k y}{h}} = 0$$

или

$$\left| a^{\frac{y_0}{h}(n+1)} - 1 \right| \left| a^{\frac{\delta_1 y_1}{h}(n+1)} - 1 \right| \cdots \left| a^{\frac{\delta_k y_k}{h}(n+1)} - 1 \right| = 0.$$

Нека имаме $a^{\frac{\delta_1}{h}(n+1)} - 1 = 0$. Тогава следва, че

$$\frac{\delta_1}{h}(n+1) = L(m+1),$$

където L е цяло положително число. Едно просто преобразование ни дава тогава

$$1 + \frac{1}{\delta_1} + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \frac{\delta_3}{\delta_1} + \cdots + \frac{\delta_k}{\delta_1} = \frac{1}{L}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^k}\right].$$

Понеже

$$1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^k} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \leqq 2$$

и числата δ_i са положитални, следва, че $L = 1$ и ще имаме

$$\delta_1 = h\,(n+1)^k, \frac{1}{\delta_1} + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \cdots + \frac{\delta_k}{\delta_1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^k}.$$

Така получаваме, че h е равно на

$$h = \frac{\delta_1}{(n+1)^k}$$

и от равенството (5) със заместване на едно от числата $y_0, y_2, \ldots, y_k$ с 1, а другите с нула, получаваме стойностите на числата

$$(6) \qquad 1=\delta_0=\frac{\delta_1}{(n+1)^k}\,t_0,\ \delta_2=\frac{\delta_1}{(n+1)^k}\,t_2,\ldots,\delta_k=\frac{\delta_1}{(n+1)^k}\,t_k,$$

$$(7) \qquad \frac{t_0}{(n+1)^k}+\frac{t_2}{(n+1)^k}+\cdots+\frac{t_k}{(n+1)^k}=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^k},$$

където $t_0, t_2, t_3, \ldots, t_k$ са цели числа. Равенството (5) добива тогава вида

$$(8) \qquad t_0\,y_0+(n+1)^k y_1+t_2y_2+\cdots+t_k\,y_k=i.$$

Знаем, че тази форма трябва да взема за стойности числата от 0 до $(n+1)^{k+1}-1$, когато всяко от променливите $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k$ взема стойностите $0, 1, 2, \ldots, n$. Но при $y_1 \geq 1$ числата i са $\geqq (n+1)^k$ и са на брой $n(n+1)^k-1=(n+1)^{k+1}-1-(n+1)^k$, когато $y_0, y_2, \ldots, y_k$ вземат стойностите $0, 1, 2, \ldots, n$. Следователно, числата, които са стойностите на формата

$$t_0\,y_0+t_2\,y_2+\cdots+t_k\,y_k=i',$$

когато променливите $y_0, y_2, y_3, \ldots, y_k$ вземат стойностите $0, 1, 2, \ldots, n$ трябва да са всички числа от 0 до $(n+1)^k-1=m'$. Ако a_1 е примитивен корен на уравнението $x^{m'+1}=1$, то ще имаме

$$\sum_{y_0=0}^{n} a_1^{t_0y_0} \sum_{y_2=0}^{n} a_1^{t_2y_2} \qquad \sum_{y_k=0}^{n} a_1^{t_ky_k}=0\,.$$

Нека например да имаме

$$a_1^{t_2(n+1)}=1.$$

Тогава трябва числото $t_2(n+1)$ да е кратно на $m'+1$, т. е. $t_2(n+1)= =L'(m'+1)$, и равенството (7) става

$$\frac{t_0}{(n+1)^k}+\frac{L'}{n+1}+\frac{t_3}{(n+1)^k}+\cdots+\frac{t_k}{(n+1)^k}=\frac{1}{n+1}+$$
$$+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^k}\,.$$

Понеже

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^k}<\frac{2}{n+1},$$

то следва оттук, че $L'=1$ и ще имаме

$$(9) \qquad t_2=(n+1)^{k-1},\ \frac{t_0}{(n+1)^k}+\frac{t_3}{(n+1)^k}+\cdots+\frac{t_k}{(n+1)^k}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\quad\cdot+\frac{1}{(n+1)^k}.$$

Равенството (8) добива формата

$$t_0 y_0+(n+1)^{k-1}y_2+t_3 y_3+\cdots+t_k y_k=i'.$$

Както по-горе заключаваме, че формата

(10) $$t_0 y_0+t_3 y_3+\cdots+t_k y_k=i''$$

трябва да има за стойности числата от 0 до $(n+1)^{k-1}-1=m''$, когато променливите $y_0, y_3,\ldots, y_k$ вземат за стойности числата 0, 1, 2, 3,..., n. Ако a_2 е примитивен корен на $x^{m''+1}=1$, то трябва да имаме

$$\sum_{y_0=0}^{n} a_2^{t_0 y_0} \sum_{y_3=0}^{n} a_2^{t_3 y_3} \quad \sum_{y_k=0}^{n} a_2^{t_k y_k}=0.$$

Нека тогава

$$a_2^{t_3(n+1)}=1.$$

Следователно, ще имаме $t_3(n+1)=L''(m''+1)$, където L'' е цяло положително число. Но равенството (9) става

$$\frac{t_0}{(n+1)^k}+\frac{L''}{(n+1)^2}+\frac{t_4}{(n+1)^k}+\cdots+\frac{t_k}{(n+1)^k}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^k}$$

и понеже

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^k}<\frac{2}{(n+1)^2}$$

следва, че $L''=1$, т. е. $t_3=(n+1)^{k-2}$. Продължавайки така, ще получим една редица от числа t като (абстрахирайки се от реда на означението по причина на симетрия) можем да пишем

$$t_1=(n+1)^k,\ t_2=(n+1)^{k-1},\ t_3=(n+1)^{k-2},\cdots,\ t_p=(n+1)^{k-p+1}.$$

Ако $p<k$, то от крайната форма

$$t_0 y_0+t_{p+1}y_{p+1}+\cdots+t_k y_k=i_p,$$

която трябва да има за стойности числата от 0 до $(n+1)^{k+1-p}-1=$ $=m_p$, когато променливите $y_0, y_{p+1},\cdots, y_k$ вземат стойностите 0, 1, 2, 3, $\cdots$, n, заключаваме, че ще имаме

$$\sum_{y_0=0}^{n} a_p^{t_0 y_0} \sum_{y_{p+1}=0}^{n} a_p^{t_{p+1} y_{p+1}}\cdots \sum_{y_k=0}^{n} a_p^{t_k y_k}=0,$$

където a_p е примитивен корен на уравнението

$$x^{m_p+1}=1.$$

Нека тогава

$$a_p^{t_0(n+1)}=1.$$

Следователно, ще имаме $t_0(n+1)=k\ (m_p+1)$, където K е цяло положително число. От равенството

$$\frac{t_0}{(n+1)^k}+\frac{t_{p+1}}{(n+1)^k}+\cdots+\frac{t_k}{(n+1)^k}=\frac{1}{(n+1)^p}+$$
$$+\frac{1}{(n+1)^{p+1}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^k}$$

заключаваме, като преди, че $K=1$ и, следователно, ще имаме

$$t_0=(n+1)^{k-p},\ \frac{t_{p+1}}{(n+1)^k}+\cdots+\frac{t_k}{(n+1)^k}=\frac{1}{(n+1)^{p+1}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^k}.$$

Формата

$$t_{p+1}y_{p+1}+t_{p+2}y_{p+2}+\cdots+t_k y_k=i_{p+1},$$

трябва да има за стойности числата от 0 до $(n+1)^{k-p-1}-1$, когато променливите $y_{p+1},\cdots,y_k$ вземат стойностите $0, 1, 2, 3,\ldots,n$. Продължавайки по проведения начин, с подходящо разместване на променливите, можем да пишем

$$t_{p+1}=(n+1)^{k-p-1},\ t_{p+2}=(n+1)^{k-p-2},\cdots,t_k=1.$$

Като заместим получените стойности за числата $t_0, t_1,\ldots,t_k$ в равенствата (6), намираме, че числата $\delta_1, \delta_2, \delta_3,\ldots, \delta_k$ трябва да бъдат равни на числата $(n+1)^p, (n+1)^{p-1},\ldots, (n+1)^2,\ n+1,\ \frac{1}{n+1},\ \frac{1}{(n+1)^2},\ldots,$ $\frac{1}{(n+1)^{k-p}}$, с което теоремата е установена напълно.

3. Някои приложения

Ще изведем едно следствие от теоремата. По неравенството на Коши-Буняковски имаме

$$(1)\qquad 1+|\omega_1|+|\omega_2|+\cdots+|\omega_k|\leq\sqrt{k+1}\ \sqrt{1+\omega_1^2+\omega_2^2+\cdots+\omega_k^2}.$$

Следователно, ще имаме следното предложение:

Нека $\omega_1, \omega_2,\ldots,\omega_k$ са произволни реални числа и n е произволно цяло положително число. Тогава има $k+1$ цели числа x_i, $0\leq i\leq n$, не всички равни на нула, за които имаме

$$(2)\quad |x_0+\omega_1x_1+\omega_2x_2+\cdots+\omega_kx_k|<\frac{n\sqrt{k+1}}{(n+1)^{k+1}-1}\sqrt{1+\omega_1^2+\omega_2^2+\cdots+\omega_k^2}.$$

Тук имаме знака на неравенство, понеже в (1) имаме равенство само при $|\omega_1|=|\omega_2|=\cdots=|\omega_k|=1$, а тогава формата $x_0+\omega_1x_1+$ $+\omega_2x_2+\cdots+\omega_kx_k$ взема стойност нула, за подходящи стойности на променливите $x_0, x_1,\cdots,x_k$.

От (2) заключаваме, че съществува константа Θ_k, независеща от n такава, че неравенството

$$(3)\qquad |x_0+\omega_1 x_1+\cdots+\omega_k x_k| < \frac{\Theta_k}{n^k}\sqrt{1+\omega_1^2+\cdots+\omega_k^2}$$

е удовлетворено за някои цели числа, не всички нули, които удовлетворяват условията $|x_i|\leqq n$, $0\leqq i\leqq n$. При $k=2$ това предложение е изказано от Борел.

Във връзка с горното ние ще установим сега следната теорема.

Нека ω е произволно цяло число и n е произволно реално число. Тогава съществуват цели числа x и y, $|x|\leqq n$, $|y|\leqq n$, за които имаме

$$(4)\qquad |\omega x-y|\leqq\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(n+1)^2+1}},\quad |x|+|y|>0.$$

Знак на равенство имаме само тогава, когато $\omega=\pm(n+1)$ или $\pm\frac{1}{n+1}$.

Очевидно можем да се ограничим на $\omega>0$. Ако $\omega<\frac{1}{n+1}$, то неравенството (4) е очевидно изпълнено при $x=1, y=0$ със знак на неравенство. Ако $\omega=\frac{1}{n+1}$, то неравенството (4) е еквивалентно на

$$|x-(n+1)y|\leqq 1.$$

Понеже линейната функция при $x-(n+1)y$ е отлична от нула и при $x=n, y=1$ е равна на -1, то в (4) ще имаме знака равенство. Нека сега $\frac{1}{n+1}<\omega<1$. Използуваме следното предложение: нека ω е произволно положително число. Тогава има цели числа x_0 и y_0, за които имаме

$$|\omega x_0-y_0|\leqq\frac{1}{n+1},\quad 1\leqq x_0\leqq n.$$

Оттук получаваме за y_0,

$$y_0=\omega x_0-\frac{\Theta}{n+1},\quad |\Theta|\leqq 1,\ 0\leqq y_0<\omega n+\frac{1}{n+1},\quad 0\leqq y_0\leqq n\,.$$

Понеже

$$\frac{1}{n+1}<\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(n+1)^2+1}},$$

то (4) е в сила със знак на неравенство. Случаят $\omega=1$ е тривиален. Достатъчно е да положим $x=y=1$. Ако $\omega>1$, то по предното ще имаме

$$\left|\frac{1}{\omega}y-x\right|\leqq\frac{\sqrt{1+\omega^{-2}}}{\sqrt{(n+1)^2+1}},\quad |x|+|y|>0,$$

за две цели числа x,y, $|x|\leqq n$, $|y|\leqq n$ и знак на равенство ще имаме само тогава, когато $\frac{1}{\omega}=n+1$. Последното неравенство може да се пише така

$$|\omega x-y|\leqq\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(n+1)^2+1}},$$

с което теоремата е установена напълно.

Очевидно предната теорема може да се изкаже и така:

Нека ω е произволно положително число и n е произволно цяло положително число. Тогава съществуват неотрицателни цели числа x, y, които не надминават n и не са едновременно равни на нула и за които ще имаме

$$|\omega x-y|\leqq\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}.$$

Равенство имаме само в случая, когато ω е равно или на $n+1$, или на $\frac{1}{n+1}$.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Н. Обрешков

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе доказывается теорема о минимумах линейных форм вида

$$\omega_0 x_0 + \omega_1 x_2 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_k x_k$$

при предположении, что $x_p, 0 \leqq p \leqq k$, целые числа, удовлетворящие условиям

$$|x_p| \leqq n, \ 1 \leqq p \leqq k, \sum_{p=0}^{k} |x_p| > 0.$$

SUR L'APPROXIMATION DES FORMES LINEAIRES

N. Obrechkoff

RESUME

Nous démontrons le théorème suivant: soient $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_k$ des nombres réels arbitraires, $k \geq 1$, et n un nombre entier et positif. Alors ils existent $k+1$ nombres entiers $x_0, x_1, \cdots, x_k$, $\sum_{i=0}^{k} |x_i| > 0$, qui satisfont aux inégalités

$$(1) \qquad |\omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 + \cdots + \omega_k x_k| \leqslant \frac{n}{(n+1)^{k+1}-1}\Big(|\omega_0| + |\omega_1| + \cdots + |\omega_k|\Big)$$

$$|x_i| \leqslant n, \; i = 0, 1, 2, \cdots, k.$$

On a le signe d'égalité dans (1) seulement dans le cas, où la forme $\sum_{i=0}^{k} \omega_i x_i$ est égale à

$$(2) \qquad \lambda\,[x_0 \pm (n+1)x_1 \pm (n+1)^2 x_2 \pm \cdots \pm (n+1)^k x_k],\; \lambda \neq 0,$$

ou à une forme obtenue de (2) par une permutation des variables.