

# КОНСТРУКТИВНО УСТАНОВЯВАНЕ НА ТРАЕКТОРИИТЕ НА АРТИЛЕРИЙСКИЯ СНАРЯД ПО ДАННИ ОТ СТРЕЛБИ НА ПОЛИГОНА

от Кирил Попов

Пресмятането на траекториите на даден артилерийски снаряд предполага познаването на съпротивлението на въздуха, като функция на скоростта, на известни коефициенти, които зависят от формата на снаряда, и на началната скорост на снаряда при изстрела. Всички тези данни се получават въз основа на различни хипотези и теоретични съображения, като резултат от престрелвания на дадено оръдие на полигона с даден снаряд при различни ъгли на изстрела.

Ние си задаваме за задача да построим траекториите на снаряда във въздуха за дадено оръдие и даден снаряд, при даден заряд, без да се грижим за закона на съпротивлението на въздуха на движението на снаряда и за началната скорост, като използваме прости конструкции, които лесно могат да се облекат в аналитична форма, изключително по попаденията при различни, напълно определени ъгли на изстрела, и си служим с афинните свойства на траекториите, установени от нас в нашите лекции по външна балистика в Сорбоната и наградени от Парижката академия на науките с премията Монтион за механика.

Основната мисъл на тези наши изследвания може да се формулира по следния начин: координатите на центъра на тежестта на снаряда при една координатна система, началото на която съвпада с устата на оръдието, оста  $Oy$  на която съвпада с началната скорост  $v_0$  и оста  $Oz$  на която е насочена надолу, в първо приближение, са независими от ъгъла на изстрела  $\alpha$  и зависят само от времето  $t$  на летенето и от различни параметри, които са постоянни при дадено оръдие, даден снаряд и даден заряд на оръдието.

## Теоретични основи на методата

Нека разгледаме предварително едно елементарно свойство на движението на една материална точка в безвъздушно пространство под действието на една постоянна сила, насочена към центъра на земята.

За простота на изложението ще вземем масата на материалната точка за единица, върху която действа земното привличане, като  $\gamma$  съобщава ускорение  $g$ .

Да отнесем движението на точката към една координатна система, оста  $Oy$  на която съвпада с началната скорост  $v_0$  на точката, скорост която сключва ъгъл  $\alpha$  с хоризонта, а оста  $Oz$  е насочена надолу към центъра на земята.

При този избор на координатната система, движението на точката може да се разглежда като геометричен сбор от движението на точката по оста  $Oy$ , с постоянна скорост  $v_0$ ,

$$y = v_0 t$$

и движението по оста  $Oz$ , с начална скорост нула и ускорение  $g$ ,

$$z = g \frac{t^2}{2}.$$

Тези два израза са независими от ъгъла  $\alpha$ , който началната скорост сключва с хоризонта, и зависят само от времето  $t$ , от  $g$  и от  $v_0$ , които са постоянни.

Траекториите на точката, при различните ъгли  $\alpha$ , могат да се изведат една от друга чрез една проста трансформация.

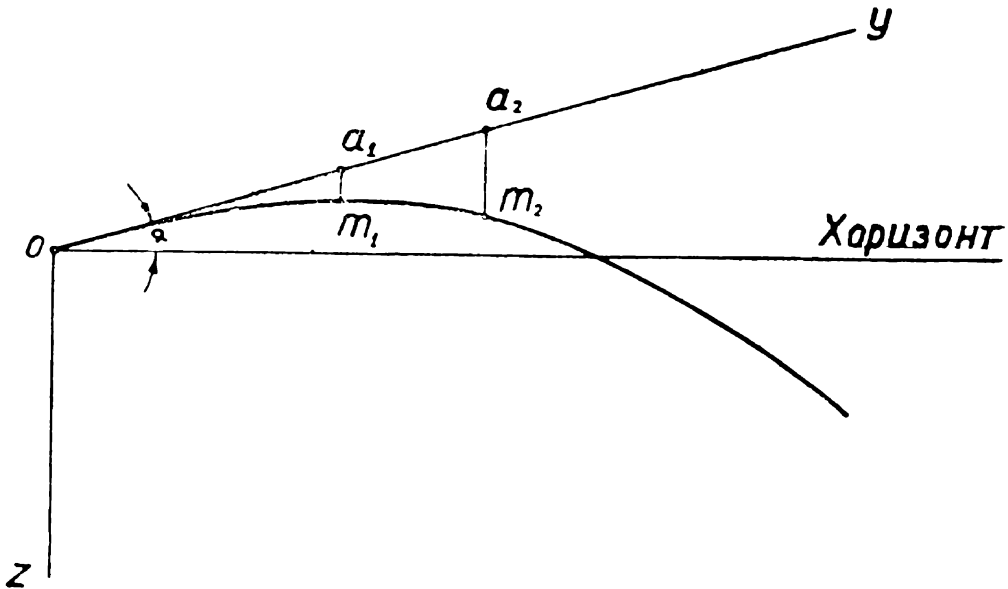
Да си изберем една деформируема рамка с постоянни, успоредни страни, ъглите между които могат да се менят и да вземат различни стойности. Да отбележим върху рамото  $AB$  на тази рамка точките  $a_1, a_2, a_3, \dots$  на разстояние  $v_0, 2v_0, 3v_0, \dots$  от началото  $A$ , а също и точките  $b_1, b_2, b_3, \dots$  върху рамото  $CD$  на същите разстояния от  $D$ . Да опънем между съответните точки  $a_i, b_i$  нишки  $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots$  и върху тях да нанесем точките  $m_1, m_2, m_3$  на разстояния  $\frac{g}{2}, g \frac{2^2}{2}, g \frac{3^2}{2}$ , от  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . При различните ъгли, които рамото  $AB$  сключва с хоризонта, точките  $m_1, m_2, m_3, \dots$  ще се редят по съответните траектории на точката  $m$ , хвърлена от върха  $A$  с начална скорост  $v_0$ , която по посока съвпада с рамото  $AB$ . При деформациите на рамката, като меням ъгъла  $\widehat{BAD}$ , ще се получат всички траектории, които отговарят на началната скорост  $v_0$  и на ъгли на хвърлянето  $\sphericalangle BAD - \frac{\pi}{2}$ .

Нека сега си зададем въпроса до колко и при какви условия това афинно свойство на траекториите в безвъздушно пространство, да се извеждат една от друга чрез описаната деформируема рамка, се запазва при движението на материалната точка във въздуха, в една съпротивителна среда, и изобщо при движението на снаряда във въздуха.

На пръв поглед самото поставяне на въпроса изглежда абсурдно, тъй като, на една и съща начална скорост и при един и същи ъгъл на изстрела, траекториите във въздуха, в една съпротивителна среда, по размер, коренно се отличават от траекториите в безвъздушното пространство, особено ако съпротивлението на средата, нейната плътност, е много голямо. Но въпреки това много важни свойства на траекториите в безвъздушното пространство се запазват при траекториите на артилерийския снаряд във въздуха,

свойства, които могат да се използват при обикновените артилерийски стрелби.

Да допуснем сега, че материалната точка, с маса единица, е изстреляна с начална скорост  $v_0$ , която сключва ъгъл  $\alpha$  с хоризонта на устата на оръдието. Да изберем и в този случай устата на оръ-



Фиг. 1

дието за начало на координатната система, оста  $Oy$  на която съвпада с началната скорост  $v_0$ , а оста  $Oz$  е насочена по вертикалата към центъра на земята.

Да означим с  $t$  положението на материалната точка върху нейната траектория в момента  $t$  и с  $v$  — нейната скорост в този момент, скорост, насочена по тангентата на траекторията. Да означим с  $F(v)$  съпротивлението на средата при движението на точката, съпротивление отнесено към единица маса и насочено по тангентата на траекторията, в обратна посока на скоростта, съпротивление, което е функция на скоростта. Да означим с  $y'$  и  $z'$  компонентите на скоростта по координатните оси. Компонентите на съпротивлението по посока на осите  $Oy$  и  $Oz$  ще бъдат, като се вземе пред вид чертежа (фиг. 2),

$$y' \frac{F(v)}{v} \text{ и } z' \frac{F(v)}{v}.$$

Диференциалните уравнения на движението спрямо избраната координатна система ще бъдат следователно

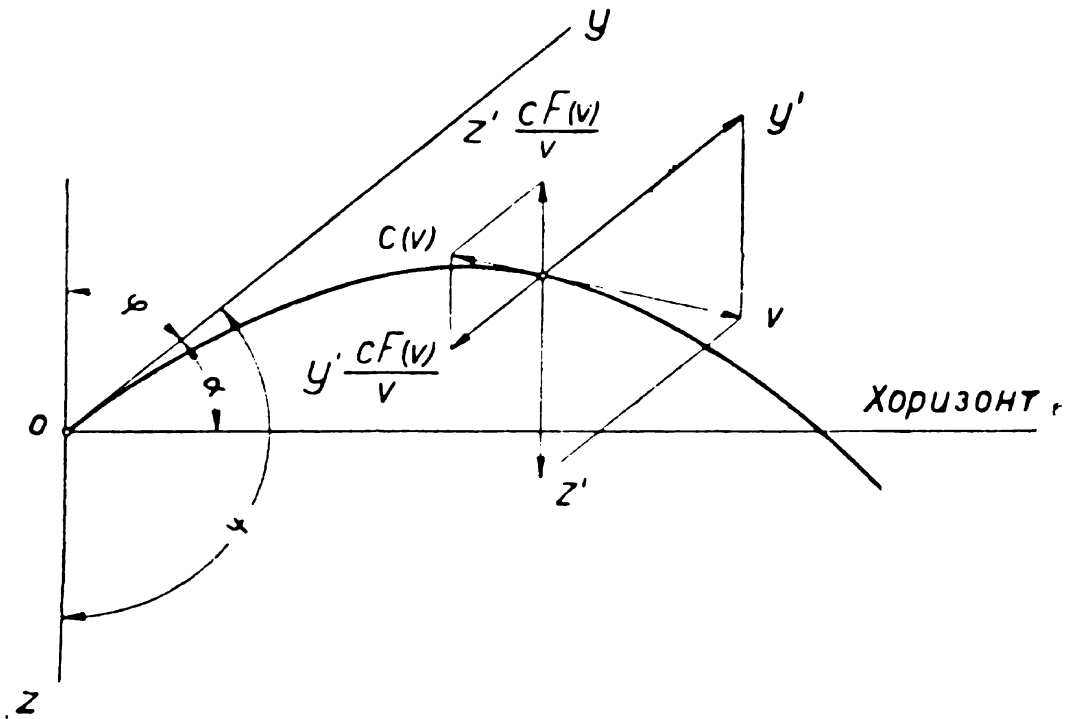
$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = -y' \frac{F(v)}{v} = -y' f(v), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = g - z' \frac{F(v)}{v} = g - z' f(v), \end{cases}$$

при начални условия  $t=0, y'=v_0, z'=0, y=z=0$ .

Тук

$$(3) \quad \begin{cases} v^2 = y'^2 + z'^2 - 2y'z' \sin \alpha \\ = (y' + z')^2 - 4y'z' \sin^2 \frac{\psi}{2} \\ = (y' - z')^2 + 4y'z' \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \end{cases}$$

гдето  $\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .



Фиг. 2

Оттук се вижда, че интегралите на уравненията (2), при началните условия  $t=0$ ,  $y=z=0$ ,  $y'=v_0$ ,  $z'=0$ , зависят от ъгъла  $\alpha$  само посредством  $v$  и ще бъдат независими от  $\alpha$ , ако

$$\frac{F(v)}{v}$$

се редуцира на една константа  $k$ , т. е. ако

$$F(v) = kv.$$

Каквато и да е стойността на константата  $k$ , при една и съща начална скорост  $v_0$ , както координатите  $y$  и  $z$ , тъй и компонентите на скоростта  $y'$  и  $z'$  по посока на осите ще бъдат независими от

ъгъла  $\alpha$ , който началната скорост  $v_0$  сключва с хоризонта, и ще зависят изключително от  $k$  и от времето  $t$ . Тъй ще имаме

$$(4) \quad \begin{cases} y = y(t, v_0, k), & y' = y'(t, v_0, k), \\ z = z(t, v_0, k), & z' = z'(t, v_0, k), \end{cases}$$

гдето производните са взети по времето  $t$ .

При  $F(v) = kv$  диференциалните уравнения (2) вземат вид

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky', \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = g - kz'. \end{cases}$$

Интегрирани при начални условия

$$t=0, y=z=0, y'=v_0, z'=0$$

те дават

$$(6) \quad \begin{cases} y = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}), & y' = v_0 e^{-kt}, \\ z = \frac{g}{k} \left( t - \frac{1}{k} + \frac{e^{-kt}}{k} \right), & z' = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}). \end{cases}$$

Лесно е да се види, че при  $\lim k=0$  тези изрази преминават в съответните изрази за безвъздушното пространство. От формулите (6), за  $t=+\infty$ , получаваме

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y = \frac{v_0}{k}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y' = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z' = 0.$$

Следователно, както и да избираме константата  $k \neq 0$ , всяка траектория, при  $F(v) = kv$ , асимптотично се приближава до една вертикална права, уравнението в избраната координатна система на която е

$$y = \frac{v_0}{k}.$$

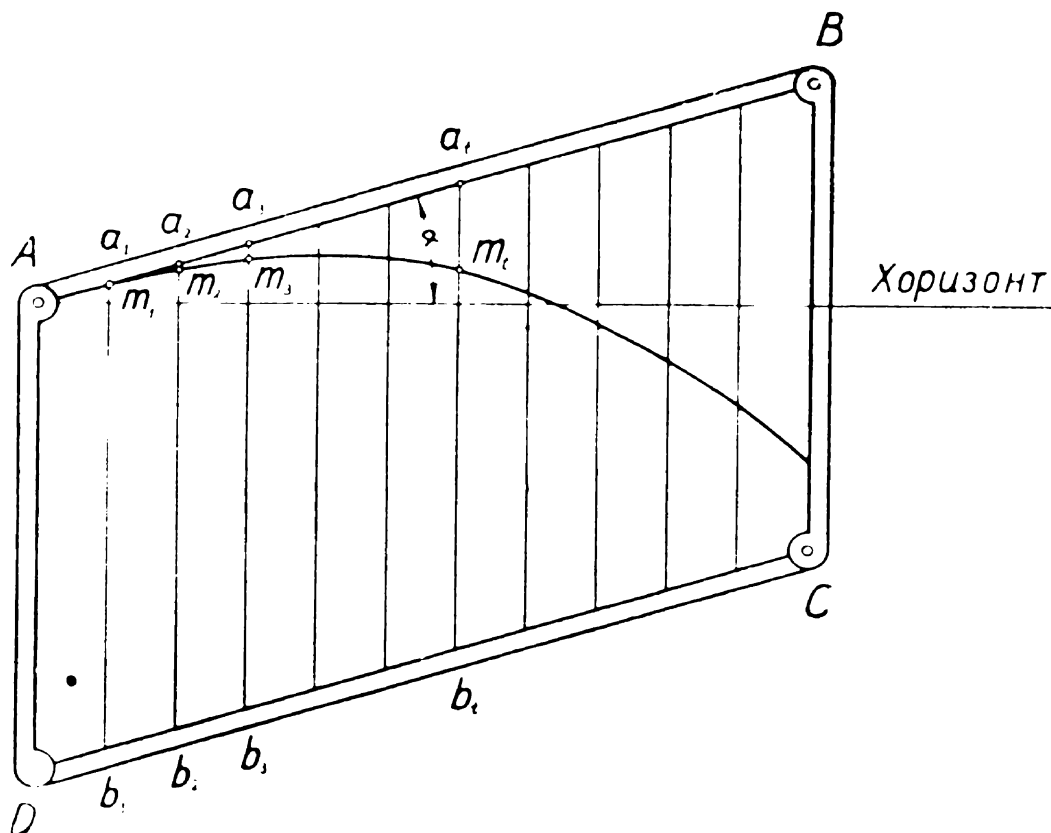
Да се обърнем сега към нашия паралелограм, по рамената  $AB$  и  $DC$  на който от  $A$  и  $D$  на разстояния

$$y = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}), \text{ при } t = 1, 2, 3, \dots$$

да нанесем съответно точките  $a_1, a_2, a_3, \dots$  и  $b_1, b_2, b_3, \dots$ . Да съединим съответните точки  $a_i, c_i$  с нишки  $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots$  по които от точките  $a_1, a_2, a_3, \dots$  на разстояния

$$z = \frac{g}{k} \left( t - \frac{1}{k} + e^{-kt} \right), \text{ при } t = 1, 2, 3, \dots$$

да нанесем точките  $m_1, m_2, m_3, \dots$ . При всяко положение на рамката тези точки ще се нареждат по една траектория, която отговаря на началната скорост  $v_0$ , при  $\alpha = \angle BAD - \frac{\pi}{2}$ . При деформацията на



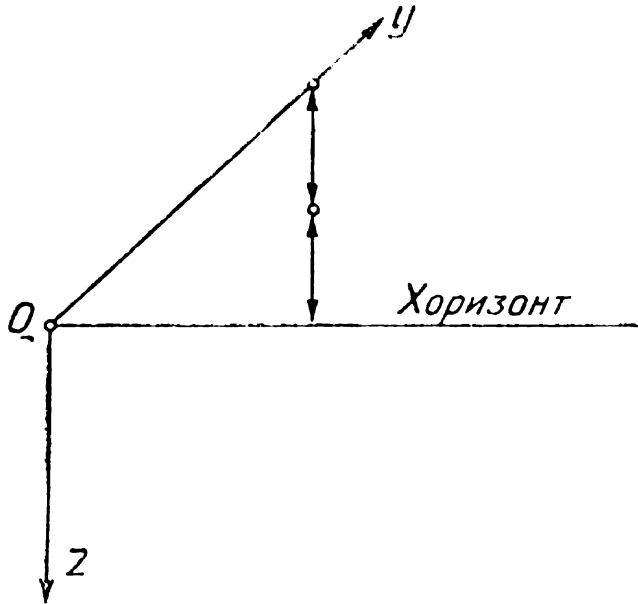
Фиг. 3

рамката кривата  $Am_1, m_2, m_3, \dots$  ще съвпада последователно с всички траектории на фамилията траектории, характеризирани с параметрите  $v_0$  и  $k$ . Пресмятането на една от тези траектории води до познаването на всички останали. По аналогичен начин, когато вместо  $y$  и  $z$  вземем  $y'$  и  $z'$  ще получим и ходографа, кривата на скоростите.

Тъй като стойностите на дадена холоморфна функция  $F(v)$ , в даден интервал върху положителната ос на комплексната равнина  $v$ , може да се заключат между стойностите на  $kv$ , при същия интервал за  $v$ , които отговарят на две близки стойности на  $k$ , би могло да се допусне, че установеното свойство на траекториите при  $F(v) = kv$ , с голямо приближение, ще бъде практически удовлетворено и при всеки физически допустим закон на съпротивление  $F(v)$  на въздуха.

В най-общия случай съпротивлението на средата зависи от нейната плътност, в дадения случай от плътността на атмосферния

слой, през който снарядът преминава, а тази плътност намаля с височината  $h$ , над хоризонта, височина, която при нашия избор на координатната система е  $h = y \sin \alpha - z$ .



Фиг. 4

Изобщо съпротивлението, което средата оказва на движението на снаряда, е функция от  $v$  и от  $h$  и съдържа един фактор  $c$ , който зависи от формата на снаряда. Да означим с  $cF(v)$  съпротивлението, което средата оказва на движението на единица маса на даден снаряд при хоризонта на устата на оръдието, и с  $c\Phi(h)F(v)$  — съпротивлението на височина  $h$ . Тук  $\Phi(h)$  е една монотонна намаляща се функция, която, при  $h=0$ , има стойност единица,  $\Phi(0)=1$ .

Диференциалните уравнения на движението, при нашия избор на координатната система, са

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = -y'c\Phi(y \sin \alpha - z)\frac{F(v)}{v}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = g - z'c\Phi(y \sin \alpha - z)\frac{F(v)}{v} \end{cases}$$

при начални условия

$$t=0, y=z=0, y'=v_0, z'=0.$$

Ние допускаме, че  $F(v)$  е една цяла растяща функция на  $v$  и че  $F(0)=0$ . Това, практически, не представлява никакво ограничение при конкретния случай, тъй като всяка непрекъсната функция може да се апроксимира с полиноми. Също, без съществени в дадения случай ограничения, можем да приемем, че  $\Phi(h)$  е една хомоморфна функция на  $h$ .

При тези допускания, като вземем пред вид изразите на  $v$  посредством  $\sin \alpha$ ,  $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $\sin^2 \frac{\psi}{2}$ , една основна теорема на Поанкаре ни показва, че  $y, y', z, z'$  са холоморфни функции на  $\sin \alpha$ ,  $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $\sin^2 \frac{\psi}{2}$  и могат да се развият в редове по целите положителни степени на кой да е от тези параметри; при това коефициентите пред различните степени на тези параметри са холоморфни функции на  $t$ . Тъй интегралите на тези уравнения могат да се представят в една от следните форми

$$(9) \quad \begin{cases} y = y_0(t) + y_1(t) \sin \alpha + y_2(t) \sin^2 \alpha + \dots, \\ z = z_0(t) + z_1(t) \sin \alpha + z_2(t) \sin^2 \alpha + \dots, \\ y' = y_0'(t) + y_1'(t) \sin \alpha + y_2'(t) \sin^2 \alpha + \dots \\ z' = z_0'(t) + z_1'(t) \sin \alpha + z_2'(t) \sin^2 \alpha + \dots, \end{cases}$$

или

$$(10) \quad \begin{cases} y = y_0(t) + y_1(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + y_2(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots \\ z = z_0(t) + z_1(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + z_2(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots, \\ y' = y_0'(t) + y_1'(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + y_2'(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots \\ z' = z_0'(t) + z_1'(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + z_2'(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots \end{cases}$$

или едно аналогично трето развитие по степените на  $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ .

Лесно е да се види, че редовете (9) и (10) са бързо сходящи. Да се ограничим със случая при движението в среда с постоянна плътност, в който случай  $\Phi(h) = 1$ , и да положим  $c = 1$ .

Диференциалните уравнения на движението в този случай ще бъдат, като изберем например формата (10)

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = -y' \frac{F(v)}{v}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = g - z' \frac{F(v)}{v}, \end{cases}$$

гдето

$$v = \sqrt{(y' + z')^2 - 4y'z' \sin^2 \frac{\psi}{2}} = (y' + z') \sqrt{1 - \frac{4y'z'}{(y' + z')^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}}.$$

Тъй като при движението  $y'$  и  $z'$  са винаги положителни, имаме

$$1 \geq \frac{4y'z'}{(y' + z')^2} \geq 0,$$



гдето само в един единствен момент горната дроб добива стойност единица. За големи стойности на  $z'$ , т. е. при  $t = +\infty$ , имаме  $\lim y' = 0$  и следователно

$$\frac{4 y' z'}{(y' + z')^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

е от реда на

$$\frac{4 y'}{z'} \sin^2 \frac{\psi}{2}.$$

За големи стойности на  $y'$ , т. е. около началото на движението, гдето  $y' = v_0$ , горният израз взема малки стойности от реда на

$$\frac{4 z'}{y'} \sin^2 \frac{\psi}{2}.$$

В един единствен момент, в който  $y'$  при намалението си и  $z'$  при растежа си се изравняват, имаме

$$\frac{4 y' z'}{(y' + z')^2} \sin^2 \frac{\psi}{2} = \sin^2 \frac{\psi}{2}.$$

Оттук става ясно, че можем да развием  $v$  в ред по степените на

$$\frac{4 y' z'}{(y' + z')^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

за всички стойности на  $t \geq 0$  и че това развитие е бързо сходящо, отгдето следва бързата сходимост на развитието и на интегралите на горните диференциални уравнения по степените на  $\sin^2 \frac{\psi}{2}$ .

Също от

$$v = \sqrt{y'^2 + z'^2 - 2y'z' \sin \alpha} = \sqrt{y'^2 + z'^2} \sqrt{1 - \frac{2 y' z'}{y'^2 + z'^2} \sin \alpha},$$

гдето

$$1 \geq \frac{2 y' z'}{y'^2 + z'^2} \geq 0$$

следва бързата сходимост на развитието на интегралите на диференциалните уравнения на движението в редове по целите положителни степени на  $\sin \alpha$ . Следователно, можем да се ограничим с първите членове на тези развития и да пишем

$$y' = y_0'(t), \quad z' = z_0'(t), \quad y = y_0(t), \quad z = z_0(t),$$

т. е. при избраната координатна система, и в най-общия случай, координатите на снаряда и компонентите на неговата скорост по избраните оси са почти независими от ъгъла на изстрела  $\alpha$  и траекториите обладават свойството да могат да се получават една от друга чрез описания вече деформирующ се паралелограм.

До това заключение може да се дойде и по следующия път. Лесно е да се види, че траекториите при даден закон на съпротивлението

$$F(v) = av + bv^2 + cv^3 + \dots$$

могат да се заключат между траекториите, установени за закона на съпротивлението  $F(v) = kv$ , за който вече установихме горното афинно свойство. Да означим с  $y$  и  $z$ , координатите при съпротивление  $F(v)$  и с  $\eta$ ,  $\zeta$  координатите при съпротивление на средата  $kv$ . Диференциалните уравнения на движението при единия и другия случай, интегрирани при същите начални условия ще бъдат

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} = -y' \frac{F(v)}{v} = -y'(a + bv + cv^2 + \dots), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dz'}{dt} = g - z' \frac{F(v)}{v} = g - z'(a + bv + cv^2 + \dots), \\ \frac{d\eta'}{dt} = -k\eta', \\ \frac{d\zeta'}{dt} = g - k\zeta'. \end{cases}$$

Да положим  $k = a + \lambda$ . От тези две системи, чрез почленно изваждане, получаваме

$$\begin{cases} \frac{d(y' - \eta')}{dt} = -a(y' - \eta') - y'(bv + cv^2 + \dots) + \lambda\eta', \\ \frac{d(z' - \zeta')}{dt} = -a(z' - \zeta') - z'(bv + cv^2 + \dots) + \lambda\zeta'. \end{cases}$$

Интегрирани при начални условия

$$t = 0, y = \eta = z = \zeta = 0, y' = \eta' = v_0, z' = \zeta' = 0,$$

при което на  $y$ ,  $y'$ ,  $z$ ,  $z'$  даваме значения, отговарящи на първата система, получаваме

$$\begin{cases} y' - \eta' = e^{-at} \int_0^t [\lambda\eta' - y'(bv + cv^2 + \dots)] e^{at} dt, \\ z' - \zeta' = e^{-at} \int_0^t [\lambda\zeta' - z'(bv + cv^2 + \dots)] e^{at} dt. \end{cases}$$

Знакът на тези разлики зависи от знака на подинтегралните изрази. Чрез съответен избор на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  за стойностите на  $\lambda$  тези разлики могат да се направят едновременно положителни или отрицателни и, следователно, траекторията, която отговаря на  $F(v) = av + bv^2 + \dots$  може да се заключи между траекториите, които отговарят на  $F(v) = (a + \lambda_1)v$  и на  $F(v) = (a + \lambda_2)v$ , траектории, които обхващат установените вече за тях афинни свойства. Следователно,

при промяната на  $\alpha$  траекториите, които отговарят на общия закон на съпротивлението ще се възпроизведат една от друга чрез деформацията на описания паралелограм с голямо приближение.

### Конструиране на траекториите във въздуха по данни от стрелбите на полигона

Установените афинни свойства на траекториите при най-общия случай на закона на съпротивлението могат лесно да се използват за получаване, по конструктивен път, траекториите във въздуха по данни от стрелбата на полигона.

Да допуснем, че за дадена стойност  $\alpha$  на ъгъла на изстрела сме установили на полигона разстоянието  $d$  от устата на оръдието до мястото на падането на снаряда в хоризонта на оръдието и интервала време  $t$  от момента на изстрела до момента на попадението. С това ние имаме всички данни за определяне на координатите на точката на попадението в координатната система, при която осите  $Oy$  и  $Oz$  сключват ъгъл  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ .

Но тази точка е същевременно точка от траекторията, която отговаря на дадения ъгъл на изстрела  $\alpha$  с начална скорост  $v_0$ , познаването на която в дадения случай не е необходимо. Така ние имаме

$$z(t) = d \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad y(t) = \frac{d}{\cos \alpha}.$$

Познаваме ли координатите, за даден момент  $t$ , на една точка върху дадена траектория  $\alpha$ , с това ние познаваме координатите в съответната координатна система на съответната точка върху траекторията от фамилията траектории, които отговарят на същата начална скорост при най-различни ъгли  $\alpha$  на изстрела. Една точка върху дадена траектория води до познаването на съответните точки върху цялата фамилия траектории  $v_0$ .

Методата, която предлагаме, се състои в това: да се определят точно разстоянията на попадението в хоризонта на оръдието за ред траектории, които отговарят на една редица  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  на ъгли на изстрела. Всяка една такава точка води чрез прости конструкции, до съответните точки на избраната редица траектории.

За тази цел си избираме на полигона една добре нивелирана хоризонтална ивица, в посока на която се извършват всички опитни стрелби. Стреля се с едно и също оръдие, при един и същ снаряд и при един и същи заряд. С най-голямо старание и точност се определят както ъгъла на изстрела, тъй също и попадението в хоризонта на устата на оръдието. Определянето на времето не е необходимо, ако задачата се свежда само до определяне формата на траекториите във въздуха. То обаче е необходимо, ако искаме да знаем и момента, в който снарядът достига дадена точка на съответната траектория, както това е случая при снаряди, които трябва да експлодират на дадено място по траекторията.

Да означим с  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$  предварително избраните ъгли на изстрела и с  $A, B, C, D, \dots$  съответните траектории с  $a_1, b_2, c_3, d_4, \dots$  точките в хоризонта на тези траектории, определени и измерени на полигона.

### Конструкция

На един добре опънат чертежен лист означаваме устата  $O$  на оръдието, хоризонта  $OO'$  и правите  $OA, OB, OC, OD, \dots$ , които сключват с хоризонта ъгли  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ . Върху правата  $OO'$ , в избран мащаб, нанасяме точките  $a_1, b_2, c_3, d_4, \dots$ , точки от съответните траектории, и на разстояние от  $O$  съответно на наблюдаваните и измерни разстояния на полигона.

През точката  $a_1$ , която е точка в хоризонта на траекторията  $A$  прекарваме правата  $a_1A_1$ , успоредна на оста  $OZ$ , до пресичането ѝ  $A_1$  с правата  $OA$ . По такъв начин получаваме координатите  $y_1 = OA_1$  и  $z_1 = A_1a_1$  на точката  $a_1$  от траекторията  $A$ , в координатната система  $AOZ$ . За да получим съответните точки върху траекториите  $B, C, D$ , нанасяме върху правите  $OB, OC, OD$ , точките  $B_1, C_1, D_1$ , на разстояние от  $O$  равно на  $OA_1$  и по правите, теглени от тези точки успоредно на оста  $OZ$ , нанасяме надолу точките  $b_1, c_1, d_1, \dots$ , на разстояние  $A_1a_1$  от  $B_1, C_1, D_1, \dots$ . Тъй получените точки  $b_1, c_1, d_1, \dots$  са точки от траекториите  $B, C, D$ , които отговарят на точката  $a_1$  от  $A$ .

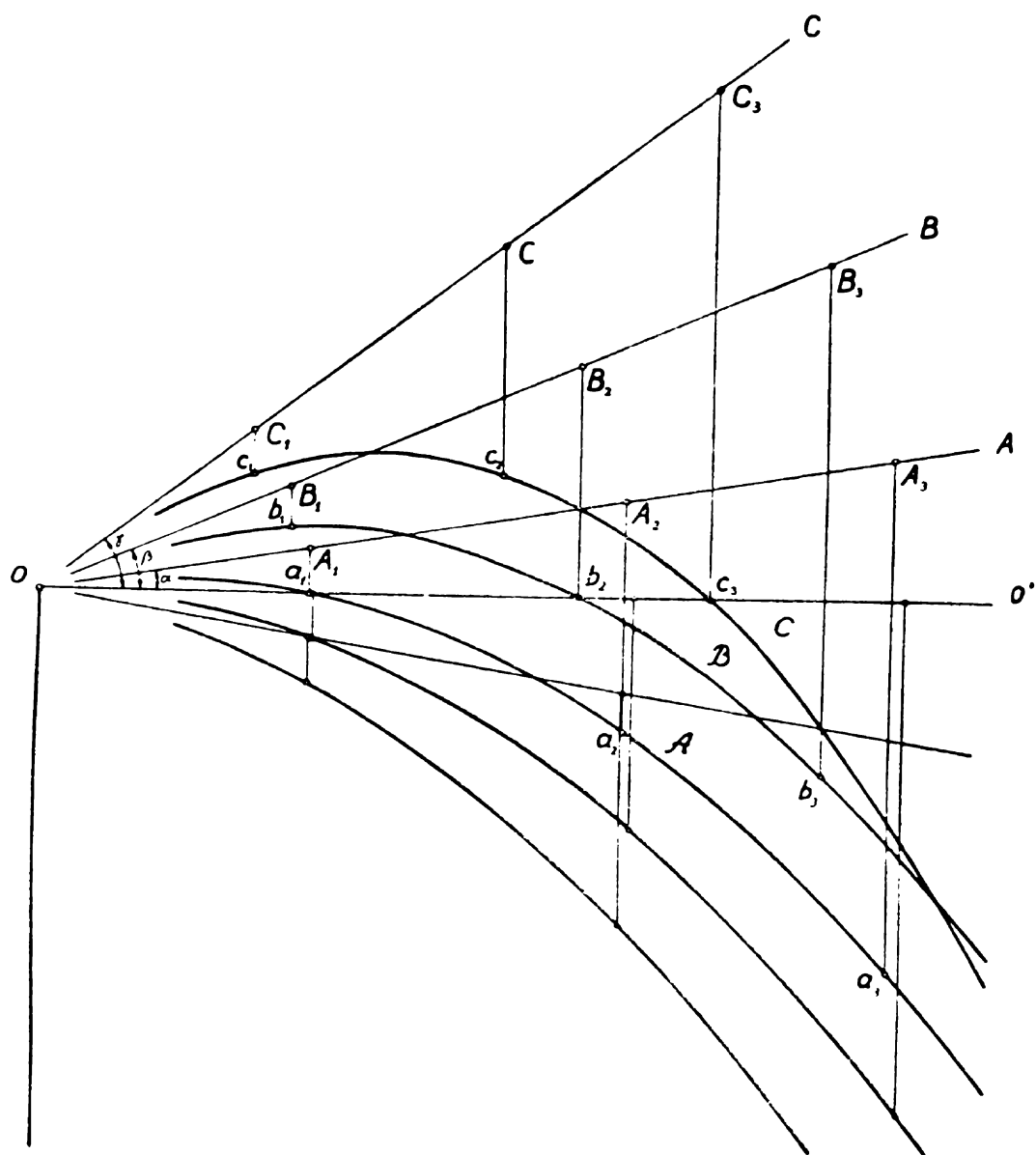
За да получим точки на траекториите, които отговарят на точката  $b_2$ , от траекторията  $B$ , прекарваме през  $b_2$  права, успоредна на  $OZ$ , до пресичането ѝ с правата  $OB$ . Да означим с  $B_2$  съответната точка на пресичането. Тъй получаваме в координатната система  $BOZ$  координатите на точката  $b_2$  от траекторията  $B$ ,

$$y_2 = OB_2, \quad z_2 = B_2b_2,$$

които са равни на координатите в съответните координатни системи на съответните точки  $a_2, c_2, d_2, \dots$ , върху траекториите  $A, C, D$ . За да получим тези точки, върху правите  $OA, OC, OD, \dots$  и от началото  $O$  нанасяме точките  $A_2, C_2, D_2, \dots$  на разстояние  $y_2$ , през които прекарваме прави, успоредни на  $OZ$  и върху които от  $A_2, C_2, D_2, \dots$ , нанасяме надолу на разстояние  $z_2$  точките  $a_2, c_2, d_2, \dots$ , които са точки от траекториите  $A, C, D, \dots$ , съответни на точката  $b_2$  от траекторията  $B$ .

По същия начин постъпваме с точката  $c_3$  от траекторията  $C$  и т. н. и т. н.

По този начин, по данни от стрелбите на полигона, ние можем да възстановим точка по точка фамилията траектории, които отговарят на една и съща начална скорост  $v_0$ .



Фиг. 5

## ЛИТЕРАТУРА

1. Popoff Kyrille. Les méthodes d'intégration de Poincaré et le problème général de la Balistique Extérieure. Leçons faites à la Sorbonne pendant l'année scolaire 1924—25. Gauthier Villars Paris 1925. Extrait du Mémorial de l'Artillerie Française.
2. Popoff Kyrill. Das Hauptproblem der äusseren Ballistik im Lichte der modernen Mathematik. Leipzig. Academische Verlagsgesellschaft. 1931.
3. Popoff Kyrille. Le mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité. Mémorial des sciences mathématiques № 117. Gauthier-Villars. Paris, 1951.
4. Popoff Kyrill. Die Hauptprobleme der äusseren Ballistik im Lichte der modernen Mathematik. Academische Verlagsgesellschaft Geest & Portig. Leipzig, 1954.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ТРАЕКТОРИЙ СНАРЯДА С  
ПОСТОЯННОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ НА ОСНОВАНИИ  
ДАННЫХ, ПОЛУЧАЕМЫХ НЕПОСРЕДСТВЕННО ПРИ СТРЕЛЬБЕ  
НА ПОЛИГОНАХ

Кирил Попов

РЕЗЮМЕ

В лекциях[1], удостоенных премии Парижской Академии Наук, которые мы читали в Сорбонне, мы изучали движение снаряда в сопротивляющейся среде под действием силы тяжести. Обозначим через  $cF(v)$  сопротивление среды (на единицу массы снаряда), предполагая  $F(v)$  аналитической функцией скорости  $v$  на положительной части действительной оси в плоскости комплексного переменного  $v$ , удовлетворяющей условию  $F(0)=0$ .

Будем относить движение к координатной системе, начало которой находится в конце орудия, ось  $Y$  направлена по начальной скорости  $v_0$  и ось  $Z$  направлена вертикально вниз. В таком случае уравнения движения будут

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y' \frac{cF(v)}{v}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g - z' \frac{cF(v)}{v},$$

при начальных условиях

$$t=0, \quad y=z=0, \quad y'=v_0, \quad z'=0.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{y'^2 + z'^2 - 2y'z' \sin \alpha} = \sqrt{y'^2 + z'^2} \sqrt{1 - \frac{2y'z'}{y'^2 + z'^2} \sin \alpha}, \\ &= \sqrt{(y' + z')^2 - 4y'z' \sin^2 \frac{\psi}{2}} = (y' + z') \sqrt{1 - \frac{4y'z'}{(y' + z')^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}} \end{aligned}$$

где через  $\alpha$  обозначен угол между начальной скоростью и горизонтом и  $\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha$ .

Можно установить, что при  $t > 0$ ,  $y'$  является монотонной функцией  $t$ , которая изменяется от  $v_0$  до 0 и  $z'$  является функцией мо-

нотонно возрастающей от 0 до некоторого большого предельного значения. Так как

$$1 \geq \frac{2y'z'}{y'^2+z'^2} \geq 0, \quad 1 \geq \frac{4y'z'}{(y'+z')^2} \geq 0,$$

и в начальный момент

$$y' = v_0, \quad z' = 0,$$

то верхние выражения являются малыми величинами порядка  $\frac{2z'}{y'}$ .

При больших значениях  $t$ , при которых  $y'$  имеет весьма малое, а  $z'$  весьма большое значение, эти выражения являются малыми величинами порядка  $\frac{2y'}{z'}$ .

Это обстоятельство позволяет разложить  $v$  в весьма быстро сходящийся ряд по целым неотрицательным степеням  $\sin \alpha$  или  $\sin^2 \frac{\psi}{2}$  и представить интегралы уравнений движения в виде

$$\begin{cases} y = y_0(t) + y_1(t) \sin \alpha + y_2(t) \sin^2 \alpha + \dots, \\ z = z_0(t) + z_1(t) \sin \alpha + z_2(t) \sin^2 \alpha + \dots, \\ y' = y'_0(t) + y'_1(t) \sin \alpha + y'_2(t) \sin^2 \alpha + \dots, \\ z' = z'_0(t) + z'_1(t) \sin \alpha + z'_2(t) \sin^2 \alpha + \dots, \end{cases}$$

или в виде

$$\begin{cases} y = y_0(t) + y_1(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + y_2(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots, \\ z = z_0(t) + z_1(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + z_2(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots, \\ y' = y'_0(t) + y'_1(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + y'_2(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots, \\ z' = z'_0(t) + z'_1(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + z'_2(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots \end{cases}$$

где  $y_n(t)$ ,  $z_n(t)$ ,  $y'_n(t)$ ,  $z'_n(t)$  аналитические функции  $t$  независимые от  $\alpha$  или  $\varphi$ .

В случае, когда  $cF(v) = kv$  эти ряды обрываются на первых членах. В общем случае они сходятся весьма быстро и практически можно положить

$$y = y_0(t), \quad z = z_0(t), \quad y' = y'_0(t), \quad z' = z'_0(t).$$

Таким образом, при нашем выборе координатных осей,  $y(t)$  и  $z(t)$  практически не зависят от угла  $\alpha$ . Следовательно зная координаты  $y$ ,  $z$  некоторой точки на одной из траекторий множества траекторий, соответствующих начальной скорости  $v_0$ , будем знать координаты точки соответствующей любой траектории рассматриваемого множества.



С другой стороны координаты точки попадания, находящейся на высоте начального положения снаряда, соответствующей траектории угла  $\alpha$  имеют значения

$$y = \frac{d}{\cos \alpha}, \quad z = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

где  $d$  расстояние попадания орудия, соответствующее начальной скорости  $v_0$ , (данному заряду). Эти координаты практически являются одними и теми же для точек соответствующих каждой траектории с начальной скоростью  $v_0$ , если их отнести к координатной системе, соответствующей углу  $\alpha$ . Зная расстояние попадания для последовательности траекторий соответствующих последовательности углов  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , можем построить последовательность точек на любой траектории рассматриваемого множества.

Болгарский текст содержит так же некоторые теоретические развития, разработанные в наших публикациях, которые мы цитировали выше.

CONSTRUCTION DE LA FAMILLE DE TRAJECTOIRES D'UN  
PROJECTILE D'APRES LES DONNEES DIRECTES OBTENUES  
DES TIRS AUX POLYGONES

Kyrylle Popoff

RESUME

Dans nos leçons à la Sorbonne, couronnées par l'Académie des Sciences de Paris, nous avons étudié le mouvement d'un projectile dans un milieu résistant sous l'action de la pesanteur. Soit  $cF(v)$  la résistance du milieu, par unité de masse du projectile, en fonction de la vitesse  $v$ , qu'on suppose holomorphe sur l'axe positive du plan de la variable complexe  $v$ , et telle que  $F(0)=0$ .

En rapportant le mouvement à un système d'axes de coordonnées dont l'origine coïncide avec la bouche du canon, l'axe des  $y$  étant dirigée suivant la vitesse initiale  $v_0$  et l'axe des  $z$  coïncidant avec la verticale descendante, les équations du mouvement seront données par

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -y' \frac{cF(v)}{v}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = g - z' \frac{cF(v)}{v},$$

avec les conditions initiales

$$t=0, \quad y=z=0, \quad y'=v_0, \quad z'=0.$$

L'on a dans ce cas

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{y'^2 + z'^2 - 2y'z' \sin \alpha} = \sqrt{y'^2 + z'^2} \sqrt{1 - \frac{2y'z'}{y'^2 + z'^2} \sin \alpha}, \\ &= \sqrt{(y' + z')^2 - 4y'z' \sin^2 \frac{\psi}{2}} \quad (y' + z') \sqrt{1 - \frac{4y'z'}{(y' + z')^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}}, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  désigne l'angle de projection et  $\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha$ .

On démontre que, pour  $t \geq 0$ ,  $y'$  est une fonction monotonne de  $t$ , variant de  $v_0$  à 0, et  $z'$  — une fonction monotonne variant de 0 à une grande valeur limite. Comme

$$1 \gg \frac{2y'z'}{y'^2+z'^2} \gg 0 \text{ et } 1 \gg \frac{4y'z'}{(y'+z')^2} \gg 0,$$

et comme au début du mouvement

$$y' = v_0, \quad z' = 0$$

les expressions ci-dessus sont au début petites de l'ordre de  $\frac{2z'}{y'}$ . Pour des grandes valeurs de  $t$  au contraire, où  $y'$  est très petit et  $z'$  très grand, les valeurs de ces expressions sont petites de l'ordre de  $\frac{2y'}{z'}$ .

Cela permet de développer  $v$  en série, rapidement convergentes, suivant les puissances entières et positives de  $\sin \alpha$  ou de  $\sin^2 \frac{\psi}{2}$  et de mettre les intégrales des équations du mouvement sous la forme

$$\begin{cases} y = y_0(t) + y_1(t) \sin \alpha + y_2(t) \sin^2 \alpha + \dots \\ z = z_0(t) + z_1(t) \sin \alpha + z_2(t) \sin^2 \alpha + \dots \\ y' = y'_0(t) + y'_1(t) \sin \alpha + y'_2(t) \sin^2 \alpha + \dots \\ z' = z'_0(t) + z'_1(t) \sin \alpha + z'_2(t) \sin^2 \alpha + \dots \end{cases}$$

ou bien sous la forme

$$\begin{cases} y = y_0(t) + y_1(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + y_2(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots, \\ z = z_0(t) + z_1(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + z_2(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots, \\ y' = y'_0(t) + y'_1(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + y'_2(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots, \\ z' = z'_0(t) + z'_1(t) \sin^2 \frac{\psi}{2} + z'_2(t) \sin^4 \frac{\psi}{2} + \dots, \end{cases}$$

où les  $y_n(t)$ ,  $z_n(t)$ ,  $y'_n(t)$ ,  $z'_n(t)$  sont des fonctions holomorphes de  $t$  indépendantes de  $\alpha$  ou de  $\psi$ .

Dans le cas où  $cF(t) = kv$ , les séries ci-dessus se réduisent à leurs premiers termes et dans le cas général convergent très rapidement. En pratique on peut mettre

$$y = y_0(t), \quad z = z_0(t), \quad y' = y'_0(t), \quad z' = z'_0(t).$$

Ainsi dans le choix d'axes de coordonnées, adoptés par nous, les  $y(t)$  et les  $z(t)$  sont pratiquement indépendants de l'angle de projection  $\alpha$ . Par conséquent, si l'on connaît les coordonnées  $y, z$  d'un point quelconque d'une des trajectoires de la famille de trajectoires correspondante à la vitesse initiale  $v_0$ , l'on connaît par là les coor-

données du point correspondant de n'importe quelle autre trajectoire de la famille  $v_0$ .

Or les coordonnées  $y$  et  $z$  du point de chute, sur l'horizon de la bouche du canon, correspondant à la trajectoire de l'angle de projection  $\alpha$ , sont données par

$$y = \frac{d}{\cos \alpha}, \quad z = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

où  $d$  est la portée du canon, correspondante à la vitesse  $v_0$ , (à la charge donnée). Elles sont pratiquement les mêmes pour les points correspondants sur chacune des trajectoires de la famille  $v_0$ , rapportées aux axes de coordonnées correspondant à leur angle de projection respectifs. La connaissance des distances  $d$  de chute de la suite de trajectoires, correspondant à la suite  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  des angles de projection, permet de construire, point par point, la trajectoire correspondant à n'importe quel angle de projection.

Le texte bulgare donne aussi quelques développements théoriques, puisés dans nos publications citées.