ОБЩИ КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ ОТ ГАУСОВ ТИП

от Любомир Чакалов

Под обща квадратурна формула разбираме приближена формула от вида

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k), \quad (-\infty < a < b < \infty),$$

където $m>0$ и $r_k \geqq 0$ означават дадени цели числа. При това аргументите a_k на функцията $f(x)$ са различни един от друг; за тях се предполага обикновено, че са дадени отнапред, или пък се определят по подходящ начин, за да бъде формулата по възможност по-точна или по-удобна за прилагане. Колкото се отнася до коефициентите $A_{k\lambda}$, чийто брой е равен на $M=\sum_1^m (r_k+1)$, те най-често се определят независимо от $f(x)$ така, че формулата да бъде точна, когато заместим $f(x)$ с функциите $1, x, x^2, \ldots, x^{M-1}$; в такъв случай, както е лесно да се види, тя е точна и за произволен полином $f(x)$ от степен $<M$. Понеже броят M на неизвестните коефициенти $A_{k\lambda}$ е равен на броя на линейните уравнения, които се получават като заместим в (1) $f(x)$ последователно с $1, x, x^2, \ldots, x^{M-1}$, естествено е да очакваме, че проблемата за определяне на коефициентите $A_{k\lambda}$ има едно и само едно решение. Това заключение обаче не е строго обосновано, защото не е изключена a priori възможността така получената система уравнения относно коефициентите $A_{k\lambda}$ (в която аргументите a_k разглеждаме като известни) да е противоречива или пък неопределена. Както ще видим в параграф 1 на настоящата работа, тази система притежава (при фиксирани a_k) едно единствено решение. Приложеният от нас метод дава възможност не само да се отговори утвърдително на така поставения въпрос за съществуване и еднозначност на решението на проблемата, но и да се определят ефективно стойностите на коефициентите $A_{k\lambda}$ като се сведе съществено тяхното определяне към разлагането в сбор от елементарни дроби на една дробна рационална функция.

В параграф 2 си поставяме за решение друг по-общ въпрос, а именно: да се определят не само коефициентите $A_{k\lambda}$, но и аргументите a_k във формула (1) по такъв начин, че тя да бъде точна за алгебрични полиноми $f(x)$ от възможно висока степен. По-точно задачата, която си поставяме в параграф 2, може да се формулира така:

Дадени са целите неотрицателни числа $r_1, r_2, \ldots, r_m$ в определен ред; да се намери най-голямото цяло число N, на което могат да се съпоставят m реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и M коефициента $A_{k\lambda}$ тъй, че формула (1) да е точна за всеки полином $f(x)$ от степен по-ниска от N. След като се определи по този начин числото N, да се намери способ за ефективното определяне на числата a_k и $A_{k\lambda}$.

Когато квадратурната формула (1) отговаря на тези изисквания, ще казваме, че тя е от Гаусов тип, защото проблемата, която си поставяме в § 2, е очевидно обобщение на случая $r_1=r_2=\cdots=r_m=0$, разглеждан от Гаус. В 1950 г. се появи една работа [2] в Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged от унгарския математик P. Turán, в която той третира частния случай, когато всички r_k са четни и равни помежду си.

§ 1

Теорема 1. Да означим с $P(x)$ полинома от степен $M=\sum_{1}^{m}(r_k+1)$

$$P(x)=(x-a_1)^{r_1+1}(x-a_2)^{r_2+1}\cdots(x-a_m)^{r_m+1}, \tag{2}$$

където, $r_1, r_2, \ldots r_m$ са неотрицателни цели числа, а числата $a_1, a_2, \cdots, a_m$ са различни помежду си, и да си образуваме дробната рационална функция на z

$$R(z)=\frac{1}{P(z)}\int_a^b \frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,dx.$$

Квадратурната формула (1) е тогава и само тогава точна за всеки полином $f(x)$ от степен по-ниска от M, когато между коефициентите $A_{k\lambda}$ в тази формула и коефициентите $B_{k\lambda}$ в разлагането

$$R(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}$$

на функцията $R(z)$ в сбор от елементарни дроби съществува зависимостта $\lambda!A_{k\lambda}=B_{k\lambda}$.

Доказателство. Означаваме с $\Phi[f]$ дясната страна на (1). Очевидно операторът $\Phi[f]$ притежава следните свойства, каквито и да са коефициентите му:

1° $\Phi[f]$ е линеен функционал. Това значи, че ако $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ принадлежат на дефиниционната област на оператора Φ и c е някоя константа, то

$$\Phi[f+g]=\Phi[f]+\Phi[g], \qquad \Phi[cf]=c\Phi[f].$$

2^0 $\Phi[f]$ се анулира, ако $a_1, a_2, \cdots, a_m$ са корени на $f(x)$ с кратности съответно по-големи от $r_1, r_2, \cdots, r_m$.

Като имаме предвид това, да допуснем най-напред, че коефициентите $A_{k\lambda}$ са определени по такъв начин [независимо от $f(x)$], че формулата (1) да е точна за всеки полином $f(x)$ от степен по-ниска от M. Да заместим в (1) $f(x)$ с полинома от $(M-1)$-ва степен

$$f(x)=\frac{P(z)-P(x)}{z-x},$$

където z означава независещ от x параметър. Съгласно със свойствата 1^0 и 2^0

$$\Phi\left[\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\right]=P(z)\,\Phi\left[\frac{1}{z-x}\right]-\Phi\left[\frac{P(x)}{z-x}\right]$$

$$=P(z)\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{\lambda!\,A_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}},$$

т. е.

$$\int_a^b\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,dx=P(z)\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{\lambda!\,A_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}$$

или

$$\frac{1}{P(z)}\int_a^b\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,dx=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{\lambda!\,A_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}.$$

Лявата страна на последното равенство е рационалната функция, която означихме по-горе с $R(z)$, а дясната част представлява нейното разложение в сбор от елементарни дроби. С това е доказано, че решението на нашата задача (ако съществува такова) е единствено, защото коефициентите на разложението на една рационална функция в сбор от елементарни дроби са еднозначно определени и числата $A_{k\lambda}$ се различават от тези коефициенти с определени числени множители.

От друга страна нека

$$R(z)=\frac{1}{P(z)}\int_a^b\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,dx=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}$$

да е разложението на $R(z)$ в елементарни дроби. Да си образуваме израза

$$\Phi[f]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{\lambda!}f^{(\lambda)}(a_k).$$

Ще докажем, че формулата

$$\text{(3)}\qquad \int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{\lambda!}f^{(\lambda)}(a_k)$$

е точна за всеки полином $f(x)$ от степен $< M$. И наистина, както и по-горе имаме:

$$\Phi\left[\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\right] = P(z)\,\Phi\left[\frac{1}{z-x}\right] - \Phi\left[\frac{P(x)}{z-x}\right] = P(z)\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}$$

$$= P(z)R(z) = \int_a^b \frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,dx, \text{ т. е.}$$

$$\int_a^b \frac{P(z)-P(x)}{z-x}\,dx = \Phi\left[\frac{P(z)-P(x)}{z-x}\right]. \tag{4}$$

Ако наредим полинома $\dfrac{P(z)-P(x)}{z-x}$ по степените на z, получаваме $\dfrac{P(z)-P(x)}{z-x} = z^{M-1} + \varphi_1(x)z^{M-2} + \cdots + \varphi_{M-1}(x)$, където $\varphi_k(x) = x^k + c_1 x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_k$ означава полином на x от степен k, в който коефициентът на висшия член е 1. По този начин тождеството (4) приема вида

$$\sum_{k=0}^{M-1} z^{M-k-1}\int_a^b \varphi_k(x)dx = \sum_{k=0}^{M-1} z^{M-k-1}\,\Phi\,[\varphi_k(x)], \qquad (\varphi_0 = 1),$$

откъдето следва, понеже то е в сила за всяко z, че

$$\int_a^b \varphi_k(x)dx = \Phi\,[\varphi_k(x)], \quad k = 0, 1, \cdot \quad , M-1.$$

Но произволен полином на x от степен $< M$ може да се представи като линейна комбинация на полиномите $\varphi_k(x)$, откъдето следва, че равенство (3) е в сила за всеки такъв полином. С това теорема 1 е доказана напълно.

2. Формулата (1) изобщо не е точна, ако $f(x)$ не е полином от степен $< M$. В такъв случай важно е да се даде на разликата $\int_a^b f(x)dx - \Phi\,[f]$ удобен вид, който да ни даде възможност да преценим грешката при прилагането на формулата и в този случай. За тази цел ще предполагаме, че константите a, b, a_k са реални и подчинени на неравенствата $a \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leqq b$.

Нека $f(x)$ да е дефинирана и да притежава непрекъснати производни до M-ти ред включително в интервала $[a, b]$. Както е известно, M-тата производна на функцията

$$g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{M-1}}{(M-1)!}\,f^{(M)}(t)\,dt$$

е равна на $f^{(M)}(x)$, тъй че разликата $f(x)-g(x)$ представлява полином на x, чиято степен е по-малка от M. Според теорема 1

$$\int_a^b f(x)\,dx - \Phi[f] = \int_a^b g(x)dx - \Phi[g] =$$

$$= \int_a^b dx \int_a^x \frac{(x-t)^{M-1}}{(M-1)!} f^{(M)}(t)\,dt -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} \int_a^{a_k} \frac{(a_k-t)^{M-\lambda-1}}{(M-\lambda-1)!} f^{(M)}(t)\,dt.$$

Ако приложим формулата на Дирикле за размяна на реда на интегриранията в двойния интеграл отдясно, получаваме:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi[f] + \int_a^b \frac{(b-t)^M}{M!} f^{(M)}(t)dt -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} \int_a^{b} \frac{(a_k-t)^{M-\lambda-1}}{(M-\lambda-1)!} f^{(M)}(t)\,dt.$$

Последният член може да се представи в по-прост вид, ако въведем функцията $u(t)$, дефинирана по следния начин в $[a, b]$:

$$u(t) = \sum_{k=s}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} \frac{(a_k-t)^{M-\lambda-1}}{(M-\lambda-1)!} \quad \text{в подинтервала}$$

$$a_{s-1} \leq t \leq a_s, \quad s=1, 2, \cdots, m, \quad a_0 = a;$$

$$u(t) = 0 \text{ за } a_m \leq t \leq b.$$

Така получаваме окончателно формулата

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k) + \int_a^b \left\{\frac{(b-t)^M}{M!} - u(t)\right\} f^{(M)}(t)\,dt,$$

в която множителът $\dfrac{(b-t)^M}{M!} - u(t)$ под последния интегрален знак представлява непрекъсната функция на t, независеща от $f(x)$.

§ 2

В този параграф ще предполагаме, че както коефициентите $A_{k\lambda}$, тъй и аргументите a_k са неизвестни и ще се стремим да ги определим по такъв начин, че квадратурната формула (1) да е точна ако заместим $f(x)$ с функциите $1, x, x^2, \cdots, x^{N-1}$, чийто брой N подчиняваме на условието да е възможно голям. При това ще търсим реалните решения на тази задача, защото очевидно те представляват по-голям интерес от гледището на приложенията. Не е мъчно да се види, че равенството (1) не може да бъде удовлетворено, и то каквито и да са реалните аргументи a_k и коефициентите $A_{k\lambda}$ ако положим

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} (x-a_k)^{2s_k},$$

където четните показатели $2s_k$ са по-големи от съответните числа r_k; и наистина, в такъв случай дясната част на (1) е равна на нула, докато интегралът отляво е положителен. Тъй като неравенствата $r_k<2s_k$ са удовлетворени при $s_k = 1+\left[\frac{r_k}{2}\right]$, то оттук следва, че $N \leq \sum\limits_{k=1}^{m} \left(2\left[\frac{r_k}{2}\right]+2\right)$. Както ще видим, в тази релация е в сила знакът равенство.

Ние ще разгледаме най-напред случая, когато целите числа r_k са всички четни (и неотрицателни, разбира се). Ще докажем, че в този случай $N=\sum\limits_{1}^{m}(r_k+2)$, т. е. че могат да се определят реалните числа a_k и $A_{k\lambda}$ във формула (1) тъй, че тя да е точна за всеки полином $f(x)$ от степен $< \sum\limits_{1}^{m}(r_k+2)$. Да си образуваме полинома $P(x)$ от степен $M=\sum\limits_{k=1}^{m}(r_k+1)$, дефиниран чрез (2). За да се удовлетворява равенството (1) от всеки полином $f(x)$ от степен по-малка от $\sum\limits_{k=1}^{m}(r_k+2)=M+m$, трябва да имаме

$$\int_a^b P(x)\,x^l dx=0 \quad \text{при} \quad l=0, 1,\cdots, m-1. \tag{5}$$

Така получаваме системата (5) от m алгебрични уравнения относно неизвестните $a_1, a_2, \cdots, a_m$. За да докажем, че тя притежава реално решение ще си послужим със следната

Помощна теорема. Ако са дадени неотрицателните четни числа $r_1, r_2, \cdots, r_m$ в определен ред, на тях могат винаги да се съпоставят съответно m различни реални числа $a_1<a_2<\cdots<a_m$ от отворения интервал, (a, b), тъй че полиномът (2) да е ортогонален всъщия интервал на всеки полином от степен по-малка от m.

Доказателство. Да си образуваме функцията

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m)= \int_a^b \prod_{k=1}^{m}(x-x_k)^{r_k+2}\,dx \tag{6}$$

на реалните независими променливи $x_1, x_2, \cdots, x_m$, която приема само положителни значения, защото показателите r_k+2 са четни. Ще докажем, че тази функция притежава минимум в неограничената област

$$D_m: \qquad -\infty < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m < +\infty$$

на m-мерното пространство R_m. Да разгледаме за тази цел оназн част от областта D_m, която принадлежи на m-мерния куб

$$C_m: \qquad a-\omega \leq x_k \leq b+\omega, \quad k=1, 2, \cdots, m,$$

където ω е някое положително число. Тази част представлява ограничено и затворено множество от точки на R_m и следователно, непрекъснатата функция (6) притежава в нея минимум μ, който бива достигнат в някоя точка

$$(a_1, a_2, \cdots, a_m), \qquad a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m,$$

принадлежаща и на куба C_m. От друга страна при достатъчно голямо ω функцията $F(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ приема значения по-големи от μ за всяка точка на D_m, която лежи вън от куба C_m. И наистина, ако например x_l лежи вън от интервала $[a-\omega, b+\omega]$, то за всяко x от интервала $[a, b]$ имаме

$$\int_a^b \prod_1^m (x-x_k)^{r_k+2}\, dx = \int_a^b (x-x_l)^2 \prod_1^m (x-x_k)^{r_k+2} \frac{1}{(x-x_l)^2}\, dx >$$

$$> \omega^2 \int_a^b \prod_1^m (x-x_k)^{r_k+2} \frac{dx}{(x-x_l)^2}\cdot$$

Да разделим интервала $[a, b]$ на m равни части. Явно е, че между тях има (поне) един подинтервал $[a', b']$, който не съдържа нито едно от числата x_k. Разделяме $[a', b']$ на три равни части и означаваме с $[\alpha, \beta]$ средния от така получените интервали с дължина $\beta-\alpha=\frac{b-a}{3m}\cdot$ Тогава

$$\int_a^b \frac{1}{(x-x_l)^2} \prod_1^m (x-x_k)^{r_k+2}\, dx > \int_a^\beta \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} \prod_1^m (\beta-\alpha)^{r_k+2} dx =$$

$$=(\beta-\alpha)^{M+m-1}.$$

И така ако поне една от координатите x_k на една точка от R_m лежи вън от интервала $[a-\omega, b+\omega]$, то функцията (6) приема стойности по-големи от $\omega^2(\beta-\alpha)^{M+m-1}$ и достатъчно е да вземем отнапред ω тъй голямо, че да имаме

$$\omega^2(\beta-\alpha)^{M+m-1} > F(c, c, \cdots, c), \qquad \left(c=\frac{a+b}{2}\right),$$

за да сме сигурни, че функцията (6) приема вън от куба C_m значения по-големи, отколкото в неговия център, а следователно, по-големи и от μ, тъй като центърът на куба принадлежи на D_m. Оттук заключаваме, че минимумът на функцията (6) в областта D_m е също равен на μ и бива достигнат поне в една крайна точка

$$(7) \qquad (a_1, a_2, \cdots, a_m), \qquad a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_m.$$

Необходимо е по-нататък да установим, че координатите a_k са различни една от друга. Да допуснем противното, че между числата (7) има и равни, и нека $a_l = a_{l+1} = \cdots = a_s$, при което $a_{l-1} < a_l$ (ако $l > 1$) и $a_s < a_{s+1}$ (ако $s < m$); да положим освен това за краткост

$$r_k + 2 = p_k, \quad a_l = a_{l+1} = \cdots = a_s = d,$$

$$Q(x) = (x-d)^{-p_l - p_s} \prod_{k=1}^{m} (x-a_k)^{p_k}$$

и да си образуваме функцията

$$\varphi(h) = \int_a^b Q(x) \ (x-d+p_s h)^{p_l} (x-d-p_l h)^{p_s} dx,$$

която приема очевидно стойност μ за $h=0$. За производните $\varphi'(0)$ и $\varphi''(0)$ получаваме:

$$\varphi'(0) = 0, \ \varphi''(0) = -p_l p_s \int_a^b Q(x) \, (x-d)^{p_l + p_s - 2} dx < 0.$$

Следователно, функцията $\varphi(h)$ за достатъчно малки положителни h приема значения по-малки от μ, което не е възможно, защото $\varphi(h)$ е равно на стойността на функцията $F(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, която се получава като заменим всяко x_k с a_k, с изключение на x_l и x_s, които заместваме съответно с $d - p_s h$ и $d + p_l h$. (Това заместване очевидно не нарушава наредбата на координатите a_k, дадена чрез (7), стига положителното число h да е достатъчно малко). И така числата a_k в редицата (7) трябва да бъдат различни едно от друго, тъй че трябва да имаме:

$$\frac{\partial F}{\partial a_q} = (r_q + 2) \int_a^b \prod_{k=1}^{m} (x-a_k)^{r_k + 2} \frac{dx}{a_q - x} = 0 \text{ или още}$$

$$(8) \qquad \int_a^b P(x) \, L_q(x) dx = 0, \quad q = 1, 2, \cdots, m,$$

където $P(x)$ е полиномът (2), а $L_1(x)$, $L_2(x), \cdots, L_m(x)$ са основните Лагранжови полиноми, отговарящи на абсцисите a_1, $a_2, \cdots, a_m$. Като вземем предвид, че всеки полином на x от степен по-ниска от m може да се представи като линейна комбинация на полиномите $L_q(x)$, от (8) заключаваме, че полиномът $P(x)$ е ортогонален на всеки полином от степен по-ниска от m.

Остава да докажем, че числата a_k се съдържат в отворения интервал (a, b). Това става, както е известно, по следния начин. Означаваме с b_1, $b_2, \cdots, b_\nu$ корените на полинома $P(x)$, заключени между a и b. Ако техният брой ν беше по-малък от m, би трябвало да имаме:

$$\int_a^b P(x)\,(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\nu)\,dx=0;$$

а това не е възможно, защото подинтегралната функция не мени знака си, когато x расте от a до b. Следователно, трябва да имаме $\nu=m$, което трябваше да докажем.

Обратно, ако реалните числа $a_1, a_2, \cdots, a_m$ са подбрани така, че полиномът $P(x)$ да е ортогонален относно интервала (a, b) на всеки полином от степен по-ниска от m, то 1) показателите r_k+1 са всички нечетни; 2) всички числа a_k лежат в интервала (a, b) и никои две от тях не са равни помежду си; 3) функцията, която означихме по-горе с $F(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, приема локален минимум в точката $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$. Твърденията 1) и 2) следват непосредствено от ортогоналността, а 3) се доказва също лесно (пак като следствие от ортогоналността) като вземем предвид, че в точката $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ имаме

$$\frac{\partial F}{\partial a_q}=0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial a_q da_s}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_q^2}=(r_q+2)\,(r_q+1)\int_a^b (x-a_q)^{-2}\prod_{k=1}^{m}(x-a_k)^{r_k+2}dx>0$$

$$q,\ s=1, 2, \cdots, m;\quad q\neq s.$$

Между другото от горното заключаваме, че функцията $F(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ няма нито една максимална стойност, приема обаче минимални стойности (в смисъл на локален минимум) най-малко в толкова различни точки, колкото различни пермутации (с повторение) можем да си образуваме от числата $r_1, r_2, \cdots, r_m$.

И така, ако са дадени m четни неотрицателни числа $r_1, r_2, \cdots, r_m$ в определен ред, системата (5) с неизвестните $a_1, a_2, \cdots, a_m$ притежава винаги реално решение, състоящо се от m числа, подчинени на неравенствата $a_1<a_2<\cdots<a_m$.

Веднъж определени по казания начин аргументите a_k, ние можем след това да определим (и то по единствен начин) и коефициентите A_{kl} във формула (1) тъй, че тя да бъде точна за всеки полином от степен $<M+m$. И наистина, произволен полином $f(x)$ от степен $<M+m$ може да се представи във вида

$$f(x)=P(x)\,Q(x)+R(x),$$

където степените на полиномите $Q(x)$ и $R(x)$ са съответно по-малки от m и M. По силата на уравненията (5) имаме

$$\int_a^b P(x)Q(x)dx=0$$

и съгласно с начина, по който се определят допълнително коефициентите $A_{k\lambda}$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b R(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} R^{(\lambda)}(a_k).$$

Като имаме още предвид, че a_k е корен на $P(x)$ от кратност r_k+1, явно е, че

$$f^{(\lambda)}(a_k) = R^{(\lambda)}(a_k) \text{ за } \lambda = 0,\ 1, \cdots, r_k,$$

тъй че действително

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k).$$

Да преминем по-нататък към общия случай, когато между числата r_k може да има и нечетни, и да означим с r_k' най-голямото четно число, което не надминава r_k $\left(\text{т. е. } r_k' = 2\left[\frac{r_k}{2}\right]\right)$. След като определим аргументите a_k и коефициентите $A_{k\lambda}$ тъй, че формулата

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k'} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k)$$

да е точна за всеки полином $f(x)$ от степен $< \sum_{k=1}^{m} (r_k'+2)$ и като положим $A_{kr_k} = 0$ винаги когато r_k е нечетно, формулата (1) ще бъде точна и за всеки полином $f(x)$, чиято степен е по-малка от

$$N = \sum_{k=1}^{m} \left(2\left[\frac{r_k}{2}\right]+2\right).$$

Напротив, тя не може да бъде точна за полиноми от степен N, както установихме в началото на този параграф. Следователно, във всички случаи трябва да имаме $N = \sum_{k=1}^{m} \left(2\left[\frac{r_k}{2}\right]+2\right)$. Така ние доказахме

Теорема II. Ако са дадени m цели неотрицателни числа $r_1, r_2, \cdots, r_m$ в определен ред, на тях отговарят m реални числа $a_1, a_2, \cdots, a_m$, подчинени на неравенствата $a < a_1 < a_2 < \cdots < a_m < b$, и $M = \sum_{k=1}^{m} (r_k+1)$ коефициенти $A_{k\lambda}$ по такъв начин, че квадратурната формула (1) да е точна за всеки полином $f(x)$, чиято степен е по-малка от $N = \sum_{k=1}^{m} \left(2\left[\frac{r_k}{2}\right]+2\right)$; напротив, каквито реални стойности и да даваме на буквите a_k и $A_{k\lambda}$ в тази формула, тя не може да бъде вярна за всеки полином от степен N.

За приложенията на квадратурната формула (1) е от важно значение да имаме удобен израз за грешката, която правим, когато прилагаме тази формула за каква да е функция $f(x)$. Касае се именно да дадем по-удобен вид на разликата между изразите от двете страни на тази формула. Ще предполагаме пак, че всички r_k са четни и че числата a_k и $A_{k\lambda}$ сме определили, както показахме в настоящия параграф. Нека $f(x)$ да е произволна функция на x, която е дефинирана и притежава непрекъснати производни до N-ти ред в интервала $[a, b]$. Двете функции

$$f(x) \text{ и } g(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N)}(t)\,dt$$

имат равни N-ти производни и следователно, разликата им $f(x)-g(x)=S(x)$ е полином на x най-много от $(N-1)$-ва степен. Ако означим за краткост с $\psi[f]$ линейния функционал

$$\psi[f]=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda} f^{(\lambda)}(a_k),$$

то

$$\psi[f]=\psi[g]+\psi[S]=\psi[g]=$$

$$=\int_a^b dx\int_a^x \frac{(x-t)^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N)}(t)dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda}\int_a^{a_k}\frac{(a_k-t)^{N-\lambda-1}}{(N-\lambda-1)!} f^{(N)}(t)\,dt.$$

Да си дефинираме непрекъснатата функция $u(t)$ по следния начин, независимо от $f(x)$:

$$(9)\qquad \begin{cases} u(t)=\displaystyle\sum_{k=s}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda}\frac{(a_k-t)^{N-\lambda-1}}{(N-\lambda-1)!} \text{ за } a_{s-1}\leq t\leq a_s, \quad s=1,2,\cdots,m; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a_0=a) \\ u(t)=0 \text{ за } a_m\leq t\leq b. \end{cases}$$

След някои идентични преобразувания $\psi[f]$ приема вида

$$\psi[f]=\int_a^b\frac{(b-t)^N}{N!} f^{(N)}(t)\,dt-\int_a^b u(t) f^{(N)}(t)\,dt,$$

откъдето получаваме

$$(10)\qquad \int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k} A_{k\lambda}f^{(\lambda)}(a_k)+\int_a^b\left\{\frac{(b-t)^N}{N!}-u(t)\right\}f^{(N)}(t)\,dt.$$

В така установената формула (10), валидна за произволна функция $f(x)$, която притежава непрекъснати производни до N-ти ред, интегралът

$$\int_a^b\left\{\frac{(b-t)^N}{N!}-u(t)\right\}f^{(N)}(t)dt$$

играе ролята на остатъчен член. Важно е да забележим тук, че функцията

$$v(t)=\frac{(b-t)^N}{N!}-u(t),$$

която фигурира като пръв множител под знака интеграл в остатъчния член, е съществено положителна в интервала (a, b). За да докажем това, ще използуваме някои свойства на обобщените Нютонови частни, които свойства установихме в [3] и които ще припомним накратко. Ако са дадени p различни реални числа $b_1, b_2, \cdots, b_p$ и съответни цели неотрицателни числа $s_1, s_2, \cdots, s_p$, да си образуваме израза

$$(11)\qquad \sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{s_k} B_{k\lambda}g^{(\lambda)}(b_k),$$

чиито коефициенти $B_{k\lambda}$ не зависят от функцията $g(x)$. В поменатата работа се доказва, че е възможно да се определят (и то по единствен начин) коефициентите $B_{k\lambda}$, тъй че изразът (11) да се анулира за $g(x)=1, x, x^2, \cdots, x^{P-2}$ и да приема стойност 1 за $g(x)=x^{P-1}$, където $P=\sum_{k=1}^{p}(s_k+1)$ е броят на въпросните коефициенти. Така образувания израз (11) ще означаваме с

$$N[g(x)] \text{ или по-подробно } N\left[g(x)\,\middle|\,\begin{matrix} b_1, b_2, \cdots, b_p\\ s_1, s_2, \cdots, s_p\end{matrix}\right]$$

и ще наричаме **Нютоново частно**, което отговаря на аргументите $b_1, b_2, \ldots, b_p$ със съответни „тегла“ $s_1+1, s_2+1, \ldots, s_p+1$. При допълнителното предположение $b_1<b_2<\cdots<b_p$ се доказва, че съществува една независима от $g(x)$ функция $v(t)$, дефинирана, непрекъсната и положителна в интервала (b_1, b_p), тъй че да имаме тождествено

$$N\left[g(x)\,\middle|\,\begin{matrix} b_1, b_2, \cdots, b_p\\ s_1, s_2, \cdots, s_p\end{matrix}\right]=\int_a^b v(t)g^{(P-1)}(t)\,dt;$$

при това функцията $v(t)$ е еднозначно определена.

Да положим във формулата (10) $f(x)=g'(x)$. Така получаваме тождеството

$$(12)\qquad g(b)-g(a)-\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}A_{k\lambda}\,g^{(\lambda+1)}(a_k)=\int_a^b v(t)g^{(N+1)}(t)\,dt,$$

лявата страна на което представлява линейна комбинация от вида (11) с $2+\sum_{k=1}^{m}(r_k+2)=N+2$ члена*. От (12) се вижда, че изразът отляво се анулира за $g(x)=1,\ x^1,\ x^2,\ldots,x^N$ и приема стойност различна от нула за $g(x)=x^{N+1}$. Следователно, (12) представлява (до един постоянен множител) Нютоново частно, отговарящо на аргументите $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_m$ със съответни тегла $1, 1, r_1+2, r_2+2,\cdots, r_m+2$. За да определим константата C, в която се обръщат двете страни на (12) когато заместим $g(x)$ с x^{N+1}, ще забележим, че резултатът от това заместване няма да се измени, ако прибавим към x^{N+1} произволен полином от степен $\leq N$. Ползувайки се от тази забележка, ние ще заместим $g(x)$ с $(N+1)\int_a^x\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{r_k+2}dt$; така получаваме за въпросната константа

$$C=(N+1)\int_a^b\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{r_k+2}dt=(N+1)!\int_a^b v(t)dt=C>0,$$

тъй че точното Нютоново частно се получава от (12) като умножим двете страни с $\frac{1}{C}\cdot$ Оттук следва, че еднозначно определената функция $v(t)$ е положителна в интервала (a, b).

От равенство (10) получаваме по-нататък, като държим сметка, че $v(t)$ е положително, и приложим теоремата за средната стойност,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}A_{k\lambda}f^{(\lambda)}(a_k)+R,$$

където

$$R=f^{(N)}(\xi)\int_a^b v(t)\,dt=\frac{1}{N!}f^{(N)}(\xi)\int_a^b\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{r_k+2}\,dt,$$

$$\left[a<\xi<b,\ N=\sum_{k=1}^{m}(r_k+2)\right]$$

Така ние установихме известна връзка между поставената в този параграф проблема за квадратурните формули от Гаусов тип и проблемата за интегралното представяне на Нютоновите частни, която връзка позволява да формулираме първата от тези проблеми

* При това броим и членовете с $g(a_1), g(a_2),\ldots, g(a_m)$, коефициентите на които са нули.

така: ако са дадени m неотрицателни числа $r_1, r_2, \cdots, r_m$, да се намерят m реални числа $a_1 < a_2 < \cdot \cdot, < a_m$ вътре в даден интервал (a, b) и коефицентите $A, B, C_{k\lambda}$ по такъв начин, че изразът

$$Ag(a) + Bg(b) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{r_k} C_{k\lambda}\, g^{(\lambda+1)}(a_k), \tag{13}$$

не съдържащ членове с $g(a_1), g(a_2), \cdots, g(a_m)$, да представлява Нютоново частно от ред $\sum_{k=1}^{m}(r_k + 2) + 2 = N + 2$. Лесно се вижда, че при тези условия трябва да имаме $A + B = 0$ и че задачата става определена при допълнителното условие $A = -1$. Тази проблема от своя страна, както показахме вече в цитираната статия [3], се свежда към следната: да се определят коефициентите $A, B, B_{k\lambda}$ в дробната функция

$$\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\lambda=0}^{rk} \frac{B_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}$$

по такъв начин, че резидуумите, отговарящи на полюсите $a_1, a_2, \cdots, a_m$, да бъдат всички нули и точката $z = \infty$ да бъде нула на тази функция от най-висока кратност $2 + \sum_{k=1}^{m}(r_k + 2)$. Директното доказателство обаче, че тъй формулираната задача притежава реално решение, изглежда много трудно.

Да приложим общите изводи в този параграф върху два примера; ще предполагаме при това, че границите на интеграла във формула (1) са $a = -1$, $b = 1$.

Пример 1. $m = 2$, $r_1 = r_2 = 2$, $N = 8$.
Аргументите a_1 и a_2 се определят от уравненията

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + px + q)^3\, dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} (x^2 + px + q)^3 x\, dx = 0,$$

където $p = -a_1 - a_2$, $q = a_1 a_2$. Второто от тези уравнения се редуцира на

$$p \int_{-1}^{1} \left\{ 3x^2(x^2 + q)^2 + p^2 x^4 \right\} dx = 0,$$

откъдето се вижда, че $p = 0$, тъй като последният интеграл е положителен, каквито и да са реалните числа p и q. Като заместим p с 0, за q получаваме уравнението

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + q)^3\, dx \quad 0 \text{ или } q^3 + q^2 + \frac{3}{5} q + \frac{1}{7} = 0,$$

което притежава само един реален (отрицателен) корен

$$q = -0{\cdot}39590664.$$

Аргументите a_1 и a_2 са корени на уравнението $y^2+q=0$. Като вземем предвид, че $a_1<a_2$, за тези аргументи намираме числените стойности

$$a_1=-0{\cdot}62921113, \quad a_2=+0{\cdot}62921113.$$

За да определим коефициентите във формулата

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A\,f(a)+Bf'(a)+Cf''(a)+A'f(-a)+B'f'(-a)+C'f''(-a),$$

ще заместим последователно $f(x)$ с нечетните полиноми

$$x,\ x(x^2-a^2)^2,\quad (x^2-a^2)\left(x^3-\frac{7}{3}a^2x\right).$$

Така получаваме

$$A-A'=0,\quad C-C'=0,\quad B+B'=0.$$

При $f(x)=1$ същата формула се обръща в $2=A+A'$, тъй че трябва да имаме

$$A'=A=1,\quad C'=C,\quad B'=-B$$

и въпросната формула приема вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=f(a)+f(-a)+B\,(f'(a)-f'(-a))+C\,(f''(a)+f''(-a)).$$

Коефициентите B и C се определят като заместим $f(x)$ с x^2 и x^4. По този начин намираме:

$$B=-\frac{1}{4a^3}(5a^2-1)^2=-0{\cdot}09629177,$$

$$C=\frac{1}{120a^2}(15a^4-10a^2+3)=0{\cdot}02930012.$$

Пример 2. $m=2$, $r_1=0$, $r_2=2$, $N=6$.

За определяне на a_1 и a_2 имаме уравненията

$$\int_{-1}^{1}(x-a_1)(x-a_2)^3dx=0, \qquad \int_{-1}^{1}(x-a_1)(x-a_2)^3x\,dx=0,$$

от които намираме

$$a_1=-\frac{1}{3}\sqrt{5},\quad a_2=\frac{1}{5}\sqrt{5};$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=A\,f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)+B\,f\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)+Cf'\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)+Df''\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)$$

при $A=\dfrac{81}{128}$, $B=\dfrac{175}{128}$, $C=-\dfrac{1}{16\sqrt{5}}$, $D=\dfrac{1}{12}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чакалов Л. Н. Об одной общей квадратурной формуле. Доклады АН СССР, т. **68** (1949), 233—236.
2. Turán P. On the theory of mechanical quadrature. Acta sci. math. Szeged, t. **12** (1950), 30—37.
3. Чакалов Л. Н. Върху едно представяне на Нютоновите частни в теорията на интерполациите и неговите приложения. Годишник на Софийския университет, Физико-мат. факултет, т. **34**, (1937/1938), кн. 1, стр. 353—405.

ОБЩИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ГАУССА

Л. Н. Чакалов

РЕЗЮМЕ

Общей квадратурной формулой называется приближенная формула вида

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}A_{k\lambda}f^{(\lambda)}(a_k)\quad(-\infty<a<b<\infty),$$

где через $m>0$ и $r_k\geqq 0$ обозначены данные целые числа. Узлы a_k различны между собой. Обычно они задаются заранее таким образом, чтобы формула была как можно точнее или удобнее для приложений. Коэффициенты $A_{k\lambda}$, число которых равно $M=\sum_1^m(r_k+1)$, чаще всего определяют независимо от $f(x)$ так, чтобы формула была точной для функций $1, x, x^2,\ldots,x^{M-1}$; в таком случае она является точной и для всех многочленов, степень которых ниже M.

В работе [1] автором была доказана следующая

Теорема 1. Пусть $P(x)$ многочлен степени M:

$$(2)\qquad P(x)=(x-a_1)^{r_1+1}(x-a_2)^{r_2+1}\cdots(x-a_m)^{r_m+1},$$

а $R(z)$ рациональная функция

$$R(z)=\frac{1}{P(z)}\int_a^b\frac{P(z)-P(x)}{z-x}dx.$$

Квадратурная формула (1) является точной для всех многочленов $f(x)$, степень которых меньше M, тогда и только тогда, если числа $A_{k\lambda}$ и коэффициенты $B_{k\lambda}$ разложения

$$R(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{r_k}\frac{B_{k\lambda}}{(z-a_k)^{\lambda+1}}$$

связаны зависимостью $A_{k\lambda}=\dfrac{B_{k\lambda}}{\lambda!}$.

В настоящей работе предполагается, что как коэффициенты $A_{k\lambda}$, так и действительные узлы a_k неизвестны. Цель автора опреде-

лить их так, чтобы формула (1) была точной для $f(x)=1,\ x,\ x^2,\ldots,$ x^{N-1}, где целое число N имеет возможно максимальное значение. Формулы, отвечающие этим требованиям, автор называет формулами типа Гаусса. Главные результаты этой работы, могут быт сформулированы следующим образом:

1) $$N=\sum_{k=1}^{m}\left(2\left[\frac{r_k}{2}\right]+2\right).$$

2) Если числа r_k чётные, существуют действительные числа $a_1<a_2<\cdots<a_m$ такие, что многочлен (2) ортогонален в интервале (a, b) всякому полиному, степень которого ниже m; эти числа принадлежат открытому интервалу (a, b) и в этом порядке являются координатами такой точки области

$$D:\qquad -\infty<x_1<x_2<\cdots<x_m<\infty$$

m — мерного пространства R_m, в которой

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\int_a^b (x-x_1)^{r_1+2}(x-x_2)^{r_2+2}\cdots(x-x_m)^{r_m+2}dx$$

имеет локальный минимум.

3) Определив таким образом узлы a_k, коэффициенты A_{kl} можно определить единственным образом так, чтобы формула была точной для всех многочленов $f(x)$, степень которых ниже M. Легко проверить, что при этом формула сохраняет силу и для всех многочленов, степень которых меньше $N=M+m$.

4) Если $f(x)$ произвольная функция, имеющая непрерывные производные порядка N в интервале $[a, b]$, то хотя формула (1) вообще и не является точной, но становится точной после прибавления остаточного члена

$$\int_a^b v(x)f^{(N)}(x)dx,$$

где $v(x)$ не зависящая от $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$ и положительная в его внутренних точках функция.

Случай, когда среди чисел r_k есть и нечётные, сводится к случаю чётных r_k.