НЯКОИ АЛГЕБРИЧНИ ТЪЖДЕСТВА

Ло-кен Хуа

Целта на настоящото съобщение е да се докажат някои елементарни алгебрични тъждества, които имат приложение в теорията на представянията на линейни групи. Подходът с помощта на тези тъждества е по-прост от този на Thrall, който установява независимо съответната теорема със средства на теорията на представянията. Освен това тези тъждества изглежда да имат и самостоятелен интерес.

Нека

$$D(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j).$$

С $\delta^{j_1,\dots,j_n}_{i_1,\dots}$ означаваме $+1$, ако $i_1,\dots,i_n$ е четна пермутация на $j_1,\dots,j_n$, и -1, ако е нечетна пермутация.

Тъждествата, които ще докажем, са следните:

$$\text{(I)}\qquad \sum \delta^{1,\dots,}_{i_1,\dots,i}\,\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\dots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1})(1-x_{i_1}x_{i_2})\dots(1-x_{i_1}\dots x_{i_n})}=$$

$$=\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod\limits_{1\le i<j\le n}(1-x_ix_j)},$$

$$\text{(II)}\qquad \sum \delta^{1,\dots,}_{i_1,\dots}\,\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\dots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\dots(1-x_{i_1}^2\dots x_{i_n}^2)}=$$

$$=\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{\prod\limits_{j\le n}(1-x_ix_j)},$$

$$\text{(III)}\qquad \sum \delta^{1,\dots,}_{i}\,\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\dots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\dots(1-x_{i_1}\dots x_{i_{2\nu}})}=$$

$$=\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(1-x_ix_j)},$$

където сумирането е разпространено върху всички пермутации $(i_1, \ldots, i_n)$ на $(1, 2, \ldots, n)$ и в (III) ν означава цялата част на $\frac{1}{2}n$.

За да докажем тези тъждества, се нуждаем от няколко добре познати тъждества:

$$(1)\qquad D(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(Vandermonde). Нека $D_l = D(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, тогава получаваме лесно, че

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^l D_i = \begin{cases} D(x_1, \ldots, x_n) & \text{за } l = 0 \\ 0 & \text{за } 1 \leq l \leq n-1 \\ (-1)^{n-1} D(x_1, \ldots, x_n)\, x_1 \ldots x_n & \text{за } l = n \end{cases}$$

Тъй като

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{x_1}{1-x_1} & \frac{x_2}{1-x_2} & & \frac{x_n}{1-x_n} \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ & & & \\ x_1^{n-1} & x^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & & x_n \\ x_1(1-x_1) & x_2(1-x_2) & & x_n(1-x_n) \\ & & & \\ x_1^{n-1}(1-x_1) & x_2^{n-1}(1-x_2) & & x_n^{n-1}(1-x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1+\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)} D(x_1, \ldots, x_n),$$

имаме

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{n} D_l \frac{x_l}{1-x_l} = (-1)^{n-1} D(x_1, \ldots, x_n) \frac{x_1 \ldots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}.$$

Сменяйки x_i с $-x_i$, имаме

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{x_i}{1+x_i} = D(x_1, \ldots, x_n) \frac{x_1 \ldots x_n}{\prod_{i=1}^{n} (1+x_i)} . \tag{5}$$

Прибавяйки (2) с $l=0$ към (4), получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{1}{1-x_i} = D(x_1, \ldots, x_n) \left\{ 1+(-1)^{n-1} \frac{x_1 \ldots x_n}{\prod_{i=1}^{n} (1-x_i)} \right\} \tag{6}$$

и също

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{1}{1+x_i} = D(x_1, \ldots, x_n) \left\{ 1 - \frac{x_1 \ldots x_n}{\prod_{i=1}^{n} (1+x_i)} \right\} . \tag{7}$$

Ще наредим доказателствата на тъждествата (I) — (III) по тяхната трудност.

Доказателство на (II). За $n=2$, лявата страна на (II) е равна на

$$\frac{x_1}{(1-x_1^2)(1-x_1^2 x_2^2)} - \frac{x_2}{(1-x_2^2)(1-x_1^2 x_2^2)} = \frac{(x_1-x_2)(1+x_1 x_2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_1^2 x_2^2)} ,$$

което е очевидно дясната страна на (II).

Сега ще докажем (II) индуктивно. Приемаме, че важи за $n-1$. Тогава лявата страна на (II) е равна на

$$\sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \sum_{, \ldots, i_n} \delta^{1, \ldots, a-1, a+1, \ldots, n}_{i_1, \ldots, i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} \ldots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \ldots (1-x_{i_1}^2 \ldots x_{i_n}^2)} =$$

$$= \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \frac{x_1 \ldots x_n}{x_a (1-x_1^2 \ldots x_n^2)} \times$$

$$\times \sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1, \ldots, a-1, a+1, \ldots, n}_{i_1, \ldots, i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} \ldots x_{i_{n-2}}^{1}}{(1-x_{i_1}^2) \ldots (1-x_{i_1}^2 \ldots x_{i_{n-1}}^2)} =$$

$$= \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \frac{x_1 \ldots x_n}{x_a (1-x_1^2 \ldots x_n^2)} \frac{D(x_1, \ldots, x_{a-1}, x_{a+1}, \ldots, x_n)}{\prod_{1 \le i \le j \le n} (1-x_i x_j)} \prod_{i=1}^{n} (1-x_i x_a) =$$

$$= \frac{1}{(1-x_1^2 \ldots x_n^2) \prod_{\le i < j \le n} (1-x_i x_j)} \sum_{a=1}^{n} D_a \prod_{i=1}^{n} (1-x_i x_a). \tag{8}$$

Обаче

$$(9)\qquad \prod_{i=1}^{n}(1-x_i x_a)=\sum_{l=0}^{n}\sigma_l x_a^l,$$

където σ_l е l-тата елементарна симетрична функция на $x_1,\ldots,x_n$. От (2) извеждаме

$$\sum_{a=1}^{n} D_a \prod_{i=1}^{n}(1-x_i x_a)=\sum_{l=0}^{n}\sigma_l \sum_{a=1}^{n} D_a x_a^l=$$
$$=D(x_1,\ldots,x_n)(1+\sigma_n(-1)^{n-1}x_1\ldots x_n)=$$
$$=D(x_1,\ldots,x_n)(1-x_1^2\ldots x_n^2).$$

Заествайки в (8), получаваме тъждеството (II).

Доказателство на (I). Тъждеството е очевидно за $n=2$. Приемаме, че е валидно за $n-1$. Тогава лявата страна на (I) е равна на

$$\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\delta_{i_1,\qquad\qquad,i_{n-1}}^{1,\ldots,a-1,a+1,\ldots,}\times$$

$$\times\frac{x_{i_1}^{n-1}\ldots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1})(1-x_{i_1}x_{i_2})\ldots(1-x_{i_1}\ldots x_{i_n})}=$$

$$=\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\frac{x_1\ldots x_n}{x_a(1-x_1\ldots x_n)}\,\frac{D(x_1,\ldots,x_{a-1},x_{a+1},\ldots,x_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod\limits_{1\le i<j\le n}(1-x_i x_j)}\times$$

$$\times(1-x_a)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq a}}^{n}(1-x_i x_a)=$$

$$(10)=\frac{1}{(1-x_1\ldots x_n)\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod\limits_{1\le i<j\le n}(1-x_i x_j)}\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a}{1+x_a}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i x_a)$$

Понеже

$$\frac{x_a^l-(-1)^l}{1+x_a}=\sum_{t=0}^{l-1}(-1)^{l-t-1}x_a^t,$$

имаме от (2) за $1\quad l<n$, че

$$(11)\qquad \sum_{a=1}^{n} D_a\frac{x_a^l-(-1)^l}{1+x_a}=(-1)^{l-1}D(x_1,\ldots,x_n).$$

От (1) и (11) имаме, използувайки означенията на (9),

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{D_a}{1+x_a} \prod_{i=1}^{n} (1-x_i x_a) = \sum_{l=0}^{n} \sigma_l \sum_{a=1}^{n} \frac{D_a x_a^l}{1+x_a} =$$

$$= \sigma_0 \sum_{a=1}^{n} \frac{D_a}{1+x_a} + \sum_{l=1}^{n} \sigma_l \left(\sum_{a=1}^{n} \frac{(-1)^l D_a}{1+x_a} + \sum_{a=1}^{n} D_a \frac{x_a^l - (-1)^l}{1+x_a} \right) =$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \sigma_l \right) \sum_{a=1}^{n} \frac{D_a}{1+x_a} + \sum_{a=1}^{a} (-1)^{l-1} \sigma_l D(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n} (1+x_i) \left(1 - \frac{x_1 \ldots x_n}{\prod_{i=1}^{n} (1+x_i)} \right) - \left(\prod_{i=1}^{n} (1+x_i) - 1 \right) \right] D(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= (1 - x_1 \ldots x_n) \, D(x_1, \ldots, x_n).$$

Замествайки в (10), получаваме тъждеството (I).

Доказателство на (III). Тъждеството е очевидно при $n=3$. Приемаме, че е валидно за $n-1$. Тогава лявата страна на (III) е равна на

$$\sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \delta_{i_1, \ldots, i_{n-1}}^{1, \ldots, a-1, a+1, \ldots,} \frac{x_{i_1}^{n-1} \ldots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1} x_{i_2})(1-x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \ldots} =$$

$$= \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{x_1 \ldots x_n}{x_a (1 - \varepsilon x_1 \ldots x_n)} \times \tag{12}$$

$$\times \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \delta_{i_1, \ldots, i_{n-1}}^{1, \ldots, a-1, a+1 \ldots} \frac{x_{i_1}^{n-2} \ldots x_{i_{n-2}}^{1}}{(1-x_{i_1} x_{i_2})(1-x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \ldots},$$

където

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{ако } n \text{ е нечетно} \\ 1, & \text{ако } n \text{ е четно} \end{cases}$$

По индукционното предположение вътрешната сума на (12) е равна на

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_{a-1}, x_{a+1}, \ldots, x_n)}{\prod_{1 \le i < j \le n} (1 - x_i x_j)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i x_a)}{1 - x_a^2}.$$

Замествайки в (12), лявата страна на (III) е равна на

$$\frac{1}{1 - \varepsilon x_1 \ldots x_n} \frac{1}{\prod_{1 \le i < j \le n} (1 - x_i x_j)} \sum_{a=1}^{n} \frac{D_a}{1 - x_a^2} \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i x_a) =$$

$$(13)\qquad = \frac{1}{1-\varepsilon x_1\dots x_n}\,\frac{1}{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(1-x_i x_j)}\sum_{l=0}^{n}\sigma_l\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}.$$

При третирането на вътрешната сума на (13) разглеждаме два случая.

1) l е нечетно цяло. Понеже

$$\frac{x_a-x_a^l}{1-x_a^2}=x_a\left(1+x_a^2+\dots+(x_a^2)^{\frac{1}{2}(l-3)}\right)$$

и

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2}=x_a\left(1+x_a^2+\dots+(x_a^2)^{\frac{1}{2}(l-3)}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x_a}{1-x_a}+\frac{x_a}{1+x_a}\right),$$

от (2), (4) и (5) имаме

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{x_a}{1+x_a}+\frac{x_a}{1-x_a}\right)D_a=$$

$$(14)\qquad =\frac{1}{2}D(x_1,\dots,x_n)x_1\dots x_n\left(\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}+(-1)^{n-1}\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}\right).$$

2) l е положително четно цяло. Понеже

$$\frac{1-x_a}{1-x_a^2}=1+x_a^2+\dots+(x_a^2)^{\frac{1}{2}(l-2)}$$

и

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2}=1+x_a^2+\dots+(x_a^2)^{\frac{1}{2}(l-2)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right),$$

от (2), (6) и (7) получаваме

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=-\sum_{a=1}^{n}D_a+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}D_a\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right)=$$

$$=-D(x_1,\dots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\dots,x_n)\left(1+(-1)^{n-1}\frac{x_1\dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}+\right.$$

$$\left.+1-\frac{x_1\dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right)=$$

$$(15)\qquad = \frac{1}{2} D(x_1,\ldots,x_n)\, x_1\ldots x_n \left((-1)^{n-1} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} - \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)} \right).$$

Да отбележим, че тази формула не е вярна за $l=0$ и за този случай

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{D_a}{1-x_a^2} = D(x_1,\ldots,x_n) + \frac{1}{2} D(x_1,\ldots,x_n)\, x_1\ldots x_n \times$$

$$(16)\qquad \times \left((-1)^{n-1} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} - \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)} \right).$$

Комбинирайки (14), (15) и (16), имаме

$$\sum_{l=0}^{n} \sigma_l \sum_{a=1}^{n} \frac{x_a^l D_a}{1-x_a^2} = D(x_1,\ldots,x_n) \left\{ 1 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n} x_1\ldots x_n \sigma_l \left((-1)^{n-1} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} - \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)} \right) +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n} x_1\ldots x_n \sigma_l \left((-1)^{n-1} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} + \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)} \right) \right\} =$$

$$= D(x_1,\ldots,x_n) \left\{ 1 + \frac{1}{2} x_1\ldots x_n \left[(-1)^{n-1} \sum_{l=0}^{n} \frac{\sigma_l}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l \sigma_l}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)} \right] \right\} =$$

$$(17)\qquad = D(x_1,\ldots,x_n) \left\{ 1 + \frac{1}{2} x_1\ldots x_n \left[(-1)^{n-1} - 1 \right] \right\}.$$

Очевидно $(-1)^{n-1} - 1 = -2\varepsilon$, което беше дефинирано в (12). Замествайки (17) в (13), получаваме, че лявата страна на (III) е равна на

$$\frac{1}{1-\varepsilon x_1 \ldots x_n} \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(1-x_i x_j)}(1-\varepsilon x_1 \ldots x_n) = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(1-x_i x_j)},$$

което очевидно е дясната страна на (III).

Приложения на тъждествата (II) и (III) в теорията на функциите на няколко комплексни променливи са дадени в една работа на автора.

Постъпила на 14. VI. 1955

БИБЛИОГРАФИЯ

Хуа, Ло-кен, Доклады Акад. Наук СССР, т. 101 (1), 1955, стр. 29—30.
Thrall, R. M. Amer. Journ. of Math., 64 (1942), p. 311—388.

ТРИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Ло-кэн Хуа

РЕЗЮМЕ

В работе доказываются следующие три алгебраические тождества:

(I) $$\sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta^{1,\ldots,n}_{i_1,\ldots,i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1})(1-x_{i_1}x_{i_2})\ldots(1-x_{i_1}\ldots x_{i_n})} = \frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod\limits_{1\le i<j\le n}(1-x_i x_j)},$$

(II) $$\sum \delta^{1,\ldots,n}_{i_1,\ldots,i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2 x_{i_2}^2)\ldots(1-x_{i_1}^2\ldots x_{i_n}^2)} = \frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(1-x_i x_j)},$$

(III) $$\sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta^{1,\ldots,n}_{i_1,\ldots,i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\ldots(1-x_{i_1}\ldots x_{i_{2\nu}})} = \frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(1-x_i x_j)},$$

где суммирование распространяется на всем пермутации $i_1,\ldots,i_n$ элементов $1, 2,\ldots,n$ и в (III) имеем $\nu=\left[\frac{n}{2}\right]$.

SOME ALGEBRAIC IDENTITIES

Loo-Keng Hua

SUMMARY

The aim of the present paper is to prove the following algebraic identities:

$$\sum \delta^{1,\ldots,n}_{i_1,\ldots,i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1})(1-x_{i_1}x_{i_2})\ldots(1-x_{i_1}\ldots x_{i_n})}$$

$$\text{(I)} \qquad = \frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i) \prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(1-x_i x_j)},$$

$$\text{(II)} \qquad \sum \delta^{1,\ldots,n}_{i_1,\ldots,i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2 x_{i_2}^2)\ldots(1-x_{i_1}^2\ldots x_{i_n}^2)} =$$

$$= \frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{\prod\limits_{1\leq i\leq j\leq n}(1-x_i x_j)},$$

$$\text{(III)} \qquad \sum \delta^{1,\ldots,n}_{i_1,\ldots,i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\ldots(1-x_{i_1}\ldots x_{i_{2\nu}})} =$$

$$= \frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(1-x_i x_j)},$$

where summation sign runs over all permutations $(i_1,\ldots,i_n)$ of $(1, 2,\ldots, n)$, and in (III) ν denotes the integral part of $\frac{1}{2}n$.