# ВЪРХУ НЯКОИ ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ В КОМПЛЕКСНА ОБЛАСТ

**Н. Обрешков**

В тази работа разглеждам някои ортогонални полиноми $P_n(z)$, удовлетворяващи релациите

$$\int_C F(z) P_n(z) P_m(z)\, dz = 0, \quad n \neq m,$$

където $C$ е прост затворен контур и $F(z)$ е аналитична функция в $C$, притежаваща особени точки в $C$ и регулярна (или поне непрекъсната) по $C$. Полиномите на Лагер $L_n^{(a)}(z)$ при $a > -1$ удовлетворяват равенствата

$$\int_0^\infty x^a e^{-x} L_n^{(a)}(x) L_m^{(a)}(x)\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

Ако например $a < -1$, предните интеграли не са сходящи. Нека $a$ е произволно комплексно число, отлично от цяло число. Да означим с $l$ ласет около нулевата точка, започващ и завършващ в точката $+\infty$. Тогава лесно се вижда, че полиномите $L_n^{(a)}(z)$ са ортогонални по този ласет, т. е. имаме

$$\int_l z^a e^{-z} L_n^{(a)}(z) L_m^{(a)}(z)\, dz = 0, \quad n \neq m.$$

Аналогични свойства установяваме и за полиномите на Якоби.

Асоциираните функции на въпросните полиноми притежават подобна ортогоналност. Например асоциираната функция $Q_n(z)$ на полинома на Лежандър удовлетворява условията

$$\int_{l_1} Q_n(z) Q_m(z)\, dz = 0, \quad n \neq m,$$

където $l_1$ е ласет около точката $-1$, започващ и завършващ в точката 1. По-нататък подробно разглеждам ортогонални полиноми спрямо функцията

$$F(z) = z^m e^{\frac{1}{z}},$$

където $m$ е произволно цяло число $\geqq -1$. Съответните ортогонални полиноми до постоянен множител са равни на

$$(1)\qquad P_n(z) = z^{-m}\, e^{-\frac{1}{z}}\, \frac{d^n}{dz^n}\left(z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}\right).$$

Те удовлетворяват диференциалното уравнение

$$(2)\qquad z^2 y'' + [(m+2)z-1]\, y' - n(n+m+1)\, y = 0.$$

При $m=0$ със смяната $z=-2x$ получаваме уравнението за полиномите на Бесел.

В литературата [2, 3] са разглеждани полиноми $y_n(x, a, b)$ от $n$-та степен, удовлетворяващи диференциалното уравнение

$$(3)\qquad x^2 y'' + (ax+b)\, y' - n(n+a-1)\, y = 0.$$

Ще забележим, че със смяната $x=-bz$ уравнението (3) се свежда на уравнението (2) с $m=a-2$. Следователно при изучаване на тези полиноми можем да се ограничим на уравнението (2). При това за да има решение на (2), което е полином от $n$-степен, ще трябва да изключим стойностите $-2, -3, -4, \dots$ за $m$.

Отначало разглеждам случая, когато $m$ е цяло число $\geqq -1$. Асоциираната функция $Q_n(x)$ на полинома $P_n(x)$ дефинирам с

$$(4)\qquad Q_n(x) = -x^{-m}\, e^{-\frac{1}{x}} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}}{(z-x)^{n+1}}\, dz,$$

където $C$ е окръжност с център нулевата точка, извън която окръжност лежи точката $x$. Вижда се лесно, че $Q_n(x)$ е интеграл на (2) и общият интеграл на това диференциално уравнение ще се дава с

$$A\, P_n(z) + B\, Q_n(z),$$

където $A$ и $B$ са произволни константи. От (4) имаме представянето

$$Q_n(x) = n!\,(-1)^n\, e^{-\frac{1}{x}}\, x^{-m-n-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_\mu^{(n)}}{x^\mu\,(m+2n+\mu+1)!}.$$

За $Q_n(x)$ получавам асимптотичната формула

$$(5)\qquad Q_n(x) = \left(\frac{e}{4nx}\right)^n \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{(2xn)^{m+1}\sqrt{2}}\,(1+\varepsilon_n'),$$

където $\varepsilon_n' \to 0$ при $n \to \infty$ и $x \neq 0$. За $Q_n(x)$ получавам и формулата

$$(6)\qquad Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\, x^{-m}\, e^{-\frac{1}{x}} \int_C \frac{z^m\, e^{\frac{1}{z}}\, P_n(z)}{x-z}\, dz,$$

като $C$ е окръжност с център нулевата точка, вън от която лежи точката $x$. Благодарение на тази формула и асимптотичните формули (3) и (5) установявам следната теорема:

Нека $f(z)$ е произволна холоморфна около нулевата точка функция и

$$c_0 P_0(z) + c_1 P_1(z) + c_2 P_2(z) + \cdots \tag{7}$$

е съответният ѝ ред на Фурие, т. е.

$$\int_C z^m e^{\frac{1}{z}} f(z) P_n(z) dz = c_n \int_C z^m e^{\frac{1}{z}} P_n^2(z) dz. \tag{8}$$

Тогава редът (7) е сходящ в окръжността $\Gamma$ с център началото, която минава през най-близката до началото особена точка на функцията $f(z)$, и сумата му е равна на $f(z)$. За всяка външна на $\Gamma$ точка редът е разходящ. При това сходимостта на (7) е равномерна и абсолютна в концентричен вътрешен кръг на $\Gamma$.

Получените резултати разширявам и за общия случай, когато числото $m$ е произволно, но отлично от $-2$, $-3$, $-4, \ldots$ Асоциираната функция се представя тогава с

$$Q_n(x) = (-1)^n n! \, x^{-m-n-1} e^{-\frac{1}{x}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_\mu^{(n)}}{x^\mu \Gamma(m+2n+\mu+2)}.$$

Тази функция удовлетворява диференциалното уравнение (2), $z$ заместено с $x$, което се проверява с непосредствени изчисления. Доказвам също, че предната теорема остава в сила, като в развитието (7) във формулата за коефициентите (8) трябва да заместим функцията $z^m e^{\frac{1}{z}}$ с функцията

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+\nu+1) x^\nu}.$$

Всяка холоморфна функция $\varphi(x)$ в кръговата област $|x| > r$ се развива в ред:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{Q_n(x)}{h(x)},$$

който е равномерно сходящ във всяка област $|x| \geq r_1 > r$. С $h(y)$ е означена функцията

$$h(y) = \frac{\Gamma(m+2)}{m+2} [Q_0(y) P_1(y) - Q_1(y)].$$

## 1. Класични полиноми

Полиномите на Лагер се дефинират с формулата

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{d x^n} (e^{-x} x^{\alpha+n}). \tag{1}$$

Тук $\alpha$ е произволно число. С прости пресмятания се вижда, че те удовлетворяват диференциалното добре известно уравнение

$$x y'' + (\alpha+1-x) y' + n y = 0. \tag{2}$$

При $a > -1$ те са ортогонални спрямо теглото $e^{-x}\, x^{a}$,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, x^{a}\, L_{n}^{(a)}(x)\, L_{m}^{(a)}(x)\, d\,x = 0, \quad n \neq m. \tag{3}$$

Нека $a$ е произволно число, отлично от цяло число. Да означим с $C$ един ласет от точката $x=\infty$ към нулевата точка, която се обхваща от $C$. Ще установим ортогоналността на тези полиноми спрямо същата функция на тегло, като интегрирането се извършва по ласета $C$, т. е. имаме

$$\int_{C} e^{-x}\, x^{a}\, L_{n}^{(a)}(x)\, L_{m}^{(a)}(x)\, d\,x = 0, \quad n \neq m. \tag{4}$$

Тези равенства можем да получим с интегриране по части, като изхождаме от дефиниращите равенства (1), но за пример на приложение в по-нататъшните развития ще използуваме диференциалното уравнение (2), на което даваме формата

$$\frac{d}{d\,x}\left(x^{a+1}\, y'\right) + n\, x^{a}\, e^{-x}\, y = 0. \tag{5}$$

За полиномите $y_1(x) = L_{n}^{(a)}(x)$ и $y_2(x) = L_{m}^{(a)}(x)$, $n \neq m$, получаваме от предното уравнение, приложено за $y_1(x)$ и $y_2(x)$, следната релация

$$y_1(x)\frac{d}{d\,x}\left(x^{a+1}\, y_2'\right) - y_2(x)\,\frac{d}{d\,x}\left(x^{a+1}\, y_1'\right) = (n-m)\; x^{a}\; e^{-x}\; y_1(x)\; y_2(x). \tag{6}$$

С интегриране по части намираме

$$(n-m)\int_{C} x^{a}\; e^{-x}\; y_1(x)\; y_2(x)\, dx =$$

$$= \int_{C} e^{-x}\; x^{a+1}\; y_1'(x)\; y_2'(x)\, d\,x - \int_{C} e^{-x}\; x^{a+1}\; y_2'(x)\; y_1'(x)\, dx = 0,$$

с което равенствата (4) са доказани.

Нека сега $a$ е цяло неотрицателно число. Умножаваме равенството (6) с $\log x$ и интегрираме по части. Получаваме така

$$
\begin{aligned}
(n-m)\int_{C} \log x \,.\, x^{a}\; y_1(x)\; y_2(x)\, d\,x \qquad\qquad & \\
- \int_{C} \left[\frac{1}{x}\, y_1(x) + \log x\, y_1'(x)\right]\left[x^{a+1}\; y_2'(x)\right]\, d\,x\; + & \\
+ \int_{C} \left[\frac{1}{x}\, y_2(x) + \log x\; y_2'(x)\right]\left[x^{a+1}\; y_1(x)\right] dx & \\
= -\int_{C} x^{a}\left|y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)\right| d\,x = 0. &
\end{aligned} \tag{7}
$$

Лесно се вижда, че равенствата (4) и (7) се свеждат на ортогоналните равенства (3) при $a$ реално и по-голямо от $-1$. Именно ако $a > -1$ и не е цяло число, то със свеждане на ласета $L$ към положителната реална полуос от (4) получаваме равенството

$$(e^{2i\pi a}-1)\int_0^\infty x^a\; e^{-x} L_n^{(a)}(x) L_m^{(a)}(x)\,dx=0,$$

т. е. (3). Ако $a$ е цяло положително число или 0, то същите разглеждания ни водят от равенството (7) към следното:

$$2i\pi\int_0^\infty x^a e^{-x} L_n^{(a)}(x)\; L_m^{(a)}(x)\,dx=0,$$

което съвпада с (3). С равенствата (4) и (7) ние обобщихме ортогоналността на полиномите $L_n^{(a)}(x)$ за всички случаи, освен когато $a$ е някое цяло отрицателно число.

Ако $a=-k$, $k$ — цяло положително число, то известно е, че

$$L_n^{(a)}(x)=(-x)^k\frac{(n-k)!}{k!}L_{n-k}^{(k)}(x)$$

при $n\geqq k$. От равенството (1) лесно се вижда, че при $n\geqq k$ ще имаме

$$\int_L x^a e^{-x} L_n^{(a)}(x) L_m^{(a)}(x)\,dx=0,\quad a=-k.$$

При по-ниски долни индекси ортогоналността се нарушава.

Нека $a$ и $\beta$ са произволни числа. Полиномите на Якоби $P_n^{(a,\beta)}(x)$ могат да се определят с равенствата

(8) $$(1-x)^a(1+x)^\beta P_n^{(a,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{a+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Те удовлетворяват диференциалното уравнение

(9) $$(1-x^2)y''+[\beta-a-(a+\beta+2)\;x]\;y'+n(n+a+\beta+1)\;y=0$$

и при $a,\beta>-1$ са ортогонални и имаме

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^a(1+x)^\beta P_n^{(a,\beta)}(x)P_m^{(a,\beta)}(x)\,dx=0,\quad n\neq m.$$

Уравнението (9) може да се напише в следната форма:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{a+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda_n(1-x)^a(1+x)^\beta y=0,$$

$$\lambda_n=n(n+a+\beta+1).$$

Нека $\beta$ е произволно комплексно число, отлично от цяло число $m$, $m=0, 1, 2,\ldots$, и нека $a$ е произволно комплексно число, реалната част на което е $>-1$. Да означим с $L$ един ласет, започващ и завършващ в точката 1 и обхващащ точката $-1$. За два произволни полинома $P_n^{(a,\beta)}(x)$ и $P_m^{(a,\beta)}(x)$, $n\neq m$, получаваме лесно

(10) $$(1-x)^{a+1}(1+x)^{\beta+1}(y_2\;y_1'-y_1\;y_2')\Big|_L=$$

$$-(\lambda_n-\lambda_m)\int_L(1-x)^a\;(1+x)^\beta\;y_1\;y_2\;dx,$$

$$y_1=P_n^{(a,\beta)}(x),\quad y_2=P_m^{(a,\beta)}(x).$$

Понеже $(1-x)^{\alpha+1}(y_2 y_1' - y_1 y_2') \to 0$, $x \to 1$, то от (10) следва ортогоналното свойство

$$\int_L (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx = 0.$$

Естествено може да се постави за разрешение на въпроса за развитие на аналитични функции по полиномите на Якоби в разглеждания случай, но засега не ще се спираме на този въпрос.

Могат подобно да се въведат и асоциираните функции на полиномите на Якоби за разгледаните стойности на $\alpha$ и $\beta$, т. е. предполага се, че тези две числа са произволни комплексни, едното от които има реална част $> -1$, а другото е отлично от нула и цяло отрицателно число.

Асоциираната функция на полинома $P_n(x)$ на Лежандър се дава с интеграла

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n dt}{(x-t)^{n+1}}$$

за всяко $x$ извън отсечката $-1 \leq x \leq 1$. Функцията притежава и представянето

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \log\frac{1+x}{1-x} - \sum_{\nu=1}^{N} \frac{2n-4\nu+3}{(2\nu-1)(n+1-\nu)} P_{n+1-2\nu}(x), \tag{11}$$

където $N = \frac{n}{2}$ при $n$ четно и $N = \frac{n+1}{2}$ при $n$ нечетно. Единствените особени точки на $Q_n(x)$ са точките 1 и $-1$. Те са особености от логаритмичен характер.

Уравнението за полиномите на Лежандър е следното:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)\, y = 0.$$

Да означим с $L$ ласет, започващ и завършващ в точката 1 и обхващащ точката $-1$. За кои да е две различни функции $Q_n(x)$ и $Q_m(x)$ получаваме

$$\begin{aligned}&(1-x^2)[Q_m(x) Q_n'(x) - Q_n(x) Q_m'(x)]_L \\ &-[n(n+1) - m(m+1)] \int_L Q_m(x) Q_n(x)\, dx.\end{aligned} \tag{12}$$

От (11) за производните $Q_n'(x)$ и $Q_m'(x)$ ще имаме

$$Q_n'(x) \quad P_n(x)\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2}P_n'(x) \log\frac{1+x}{1-x} + U_n(x),$$

$$Q_m'(x) = P_m(x)\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2}P_m'(x) \log\frac{1+x}{1-x} + U_m(x),$$

където $U_n(x)$ и $U_m(x)$ са регулярни функции. В израза

$$Q_m(x)\,Q'_n(x) - Q_n(x)\,Q'_m(x)$$

произведението

$$P_n(x)\,P_m(x)\,\frac{1}{1-x^2}\log\frac{x+1}{1-x}$$

ще отпадне и от (12) ще имаме

$$\int_L Q_m(x)\,Q_n(x)\,dx = 0,$$

т. е. функциите $Q_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, са ортогонални по ласета $L$.

## 2. Специална класа от ортогонални полиноми

Като начален пример ще изследваме ортогонални полиноми от въведения вид, като функцията на тегло е равна на $z^m\, e^{\frac{1}{z}}$, където $m$ е цяло неотрицателно число. Следователно ще трябва да намерим полиномите $P_n(z)$ от степен $n$, $n=1, 2, 3, \ldots$, удовлетворяващи условията

$$\int_C e^{\frac{1}{z}}\, z^m\, P_n(z)\, z^\nu\, dz = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{1}$$

като $C$ е произволен прост затворен контур, съдържащ началото $O$. Лесно се убеждаваме, че изразът

$$P_n(z) = z^{-m}\, e^{-\frac{1}{z}}\, \frac{d^n}{dz^n}\left(z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}\right), \tag{2}$$

където $m$ е цяло положително число, представлява полином от $n$-та степен. Не е трудно да се види, че полиномите (2) удовлетворяват условията за ортогоналност (1). Действително за интеграла

$$j_n = \int_C z^m\, e^{\frac{1}{z}}\, z^\nu\, P_n(z)\, dz = \int_C z^\nu\, \frac{d^n}{dz^n}\left(z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}\right) dz$$

с интегриране по части, като започнем от някоя точка на $C$, получаваме

$$j_n = -\nu \int_C z^{\nu-1}\, \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}\right) dz.$$

Като продължаваме така, получаваме

$$j_n = (-1)^\nu\, \nu!\, \frac{d^{n-\nu}}{dz^{n-\nu}}\left(z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}\right) dz,$$

с което твърдението е установено.

От формулата (2) получаваме лесно, че

$$P_n(z) = \lambda^{(n)}\, z^n + \cdots + \lambda_0^{(n)},$$

като
$$\lambda_n^{(n)}=(m+2n)(m+2n-1)\ldots(m+n+1),\quad \lambda_0^{(n)}=(-1)^n.$$

Да пресметнем интеграла
$$g_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C z^m e^{\frac{1}{z}} P_n^2(z)\,dz.$$

Като вземем предвид, че
$$P_n(z)=\lambda_n^{(n)}\, z^n+\lambda_{n-1}^{(n)}\, z^{n-1}+\cdots$$

получаваме
$$g_n=\frac{1}{2\pi i}\lambda_n^{(n)}\int_C z^m\, e^{\frac{1}{z}} P_n(z)\, z^n\, dz.$$

Но с интегриране по части имаме
$$\int_C z^m\, e^{\frac{1}{z}} P_n(z)\, z^n\, dz=\int_C z^m \frac{d^n}{dz^n}\left(z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}\right)dz=$$
$$(-1)^n\, n!\int_C z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}\, dz=2\pi i\,\frac{(-1)^n\, n!}{(m+2n+1)!}$$

и следователно за интеграла $g_n$ ще имаме формулата

$$g_n=\frac{(-1)^n\, n!\,(m+2n)(m+2n-1)\ldots(m+n+1)}{(m+2n+1)!}= \tag{3}$$
$$=\frac{(-1)^n\, n!}{(m+2n+1)(m+n)!}.$$

Ще изведем диференциално уравнение, което удовлетворява полинома $P_n(z)$. Да означим с $u$ функцията
$$u=z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}$$

Като диференцираме, получаваме
$$\frac{u'}{u}\quad \frac{m+2n}{z}-\frac{1}{z^2},$$

т. е. $u$ удовлетворява диференциалното уравнение
$$z^2 u'\quad u[(m+2n)\, z-1].$$

С диференциране $(n+1)$ пъти получаваме оттук
$$z^2\, u^{(n+2)}+2\binom{n+1}{1}\, z\, u^{(n+1)}+2\binom{n+1}{2}\, u^{(n)}$$
$$=[(m+2n)\, z-1]\, u^{(n+1)}+\binom{n+1}{1}(m+2n)\, u^{(n)}.$$

Като поставим

$$u^{(n)}=z^m\, e^{\frac{1}{z}}\, y$$

и извършим необходимите пресмятания, получаваме диференциалното уравнение

$$z^2\, y''+[(m+2)\, z-1]\, y'-n\,(n+m+1)\, y=0, \tag{4}$$

което трябва да се удовлетворява от полинома $P_n(z)$. Нека отбележим, че обратно от това уравнение лесно се получава ортогоналността на полиномите $P_n(z)$. С прости преобразувания уравнението (4) добива формата

$$\frac{d}{dz}\left(z^{m+2}\, e^{\frac{1}{z}}\, y'\right) - \lambda_n z^m\, e^{\frac{1}{z}} y=0,\ \lambda_n=n\,(n+m+1). \tag{5}$$

За полинома $P_k(z)$, $k \neq n$, съответното диференциално уравнение е

$$\frac{d}{dz}\left(z^{m+2}\, e^{\frac{1}{z}}\, y'\right)- \lambda_k z^m\, e^{\frac{1}{z}}\, y=0. \tag{6}$$

От уравненията (5) и (6) с прости преобразувания получаваме

$$P_k(z)\, \frac{d}{dz}\left[z^{m+2}\, e^{\frac{1}{z}}\, P'_k(z)\right]-P_n(z)\frac{d}{dz}\left[z^{m+2}\, e^{\frac{1}{z}}\, P'_n(z)\right]=$$

$$=(\lambda_n-\lambda_k)\, z^m\, e^{\frac{1}{z}}\, P_n(z)\, P_k(z).$$

Като интегрираме по произволен прост контур $C$ около началото $O$, ще имаме

$$(\lambda_n-\lambda_k)\int_C z^m\, e^{\frac{1}{z}}\, P_n(z)\, P_k(z)\, dz =$$

$$=-\int_C z^{m+2}\, e^{\frac{1}{z}}\, P'_n(z)\, P'_k(z)\, dz+\int_C z^{m+2}\, e^{\frac{1}{z}}\, P'_n(z)\, P'_k(z)\, dz=0,$$

с което ортогоналността на полиномите $P_n(z)$ е установена.

Ще докажем сега линейната връзка между полиномите $P_n(z)$:

$$\begin{aligned} &\frac{n+m+1}{(2n+m+1)(2n+m+2)}\, P_{n+1}(z) = \\ &=P_n(z)\left[z-\frac{m}{(m+2n)(m+2n+2)}\right]+\frac{n}{(m+2n)(m+2n+1)}P_{n-1}(z). \end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно можем да пишем

$$z\, P_n(z)=a_0\, P_{n+1}(z)+a_1\, P_n(z)+a_2\, P_{n-1}(z)+\dots+a_{n+1}\, P_0(z), \tag{8}$$

където $a_0, a_1, \ldots$ са подходящи числа. Ако умножим това равенство с полинома $P_k(z)$, $k \leq n-2$, и интегрираме по простия контур $C$, съдържащ нулевата точка 0, то ще имаме

$$0 = \int_C z^m e^{\frac{1}{z}} z P_n(z) P_k(z)\, dz = a_{n+1-k} \int_C z^m e^{\frac{1}{z}} P_k^2(z)\, dz.$$

Оттук следва, че $a_\nu = 0$ за $\nu \geq 3$. Остава да се определят константите $a_0$, $a_1$ и $a_2$. От сравнение на коефициентите пред $z^{n+1}$ в двете части получаваме веднага

$$a_0 = \frac{n+m+1}{(2n+m+1)(2n+m+2)}. \tag{9}$$

От друга страна с умножение на $P_{n-1}(z)$ и интегриране получаваме

$$\int_C z^{m+1} e^{\frac{1}{z}} P_n(z) P_{n-1}(z)\, dz = a_2 \int_C z^m e^{\frac{1}{z}} P_{n-1}^2(z)\, dz.$$

Като вземем под внимание, че

$$z P_{n-1}(z) = \lambda_{n-1}^{(n-1)} z^n + \lambda_{n-2}^{(n-1)} z^{n-1} + \cdots$$

ще имаме

$$\int_C z^{m+1} e^{\frac{1}{z}} P_n(z) P_{n-1}(z)\, dz = \int_C \lambda_{n-1}^{(n-1)} z^m e^{\frac{1}{z}} P_n(z) z^n\, dz.$$

Прилагайки предните начини за пресмятане и получените преди формули, намираме оттук за $a_2$ стойността

$$a_2 = \frac{-n}{(m+2n)(m+2n+1)}. \tag{10}$$

При $z=0$ равенството (8) става

$$a_0 - a_1 + a_2 = 0.$$

Като заместим предните стойности за $a_0$ и $a_2$, от това равенство намираме

$$a_1 = \frac{m}{(m+n)(m+2n+2)}. \tag{11}$$

От (8), (9), (10) и (11) се получава непосредствено формулата (7).

Ще отбележим, че диференциалното уравнение (4) се среща в цитираните работи 1, 2 и 3. В работата 3 са дадени формулите в този параграф, но ние за пълнота ги извеждаме отново. Впрочем тези формули са аналогични на формулите за в случай на реална област и ние ги получихме, преди да познаваме работата 3. По-нататъшните резултати за асоциирани функции, асимптотични развития и развития по полиномите $P_n(z)$ са нови.

### 3. Пълнота на система от функции

Нека $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ е произволна редица от положителни растящи цели числа, като $\lambda_n \to \infty$. Ще установим, че относно функцията $z^m e^{\frac{1}{z}}$, където $m$ е произволно цяло неотрицателно число, редицата от степени

$$z^{\lambda_1},\ z^{\lambda_2}\ z^{\lambda_3},\ldots$$

е в известен смисъл пълна, т. е. ако за някоя холоморфна около нулевата точка $z=0$ функция $f(z)$ имаме

$$\int_C f(z)\, z^{m+\lambda_p}\, e^{\frac{1}{z}}\, dz=0,\ p=1,\ 2,\ldots, \tag{1}$$

като $C$ е затворен прост контур, в който и по който $f(z)$ е холоморфна, то функцията $f(z)$ трябва да е равна на нула за всяко $z$.

Нека

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

е развитието на $f(z)$ за точката $z=0$. Тогава условията (1) стават

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(\mu_p+n+1)!}=0,\ p=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ \mu_p=m+\lambda_p.$$

Оттук получаваме

$$-c_0=\frac{c_1}{(\mu_p+2)}+\frac{c_2}{(\mu_p+2)(\mu_p+3)}+\cdots \tag{2}$$

По условие ще има крайни положителни числа $M$, $r$, така че

$$c_n<M r^n.$$

Но тогава от (2) имаме ($\lambda_p>r-2-m$),

$$|c_0|<\frac{M r}{\mu_p+2}+\frac{M r^2}{(\mu_p+2)^2}+\frac{M r^3}{(\mu_p+2)^3}+\cdots=\frac{M r}{\mu_p+2-r}.$$

Като поставим $\mu_p\to\infty$, получаваме $c_0=0$. От равенството (2) ще имаме по-нататък

$$-c_1=\frac{c_2}{\mu_p+3}+\frac{c_3}{(\mu_p+3)(\mu_p+4)}+\cdots$$

Подобно на по-горе, получаваме, че $c_1=0$ и т. н.

Като специално следствие ще имаме: ако за една редица от полиноми $Q_0(z), Q_1(z), Q_2(z),\ldots$, като $Q_n(z)$ е от степен $n$, имаме

$$\int_C f(z)\, z^m\, e^{\frac{1}{z}}\, Q_n(z)\, dz=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

където $f(z)$ е функция от разгледания вид, то ще имаме $f(z)=0$ за всяко $z$.

### 4. Асимптотична формула за полиномите $P_n(x)$

По познатата формула явният израз на полинома $P_n(x)$ е следният:

$$(1)\qquad P_n(x)=\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{n-\mu}\binom{n}{\mu}(n+m+\mu)(n+m+\mu-1)\dots(n+m+1)\,x^{\mu}.$$

Оттук със заместване на индекса на сумиране $\mu$ с $n-\nu$ получаваме с прости преобразувания формулата

$$\frac{P_n(x)}{x^n(2n+m)(2n+m-1)\dots(n+m+1)}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{\nu!\,(2n+m)\dots(2n+m-\nu+1)}\,\frac{1}{x^{\nu}}=g_n(x).$$

При фиксирани $\nu$ имаме

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{(2n+m)\dots(2n+m-\nu+1)}=\frac{1}{2^{\nu}}.$$

Лесно се вижда, че при $x$ фиксирано или по-общо $|x|>\delta>0$ ще имаме

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}g_n(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\,(2x)^{\nu}}=e^{-\frac{1}{2x}}$$

Действително нека $\varepsilon>0$ е произволно малко число и $N$ е така избрано, че при $|x|>\delta$ да имаме

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{|x|^{\nu}\nu!}<\varepsilon.$$

На основание на (2) ще имаме

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{N}(-1)^{\nu}\frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{\nu!\,(2n+m)\dots(2n+m-\nu+1)}=\sum_{\nu=0}^{N}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\,(2x)^{\nu}}.$$

Но за $|x|>\delta$ очевидно имаме

$$(5)\qquad \left|\sum_{\nu=N+1}^{n}(-1)^{\nu}\frac{n\,(n-1)\dots(n-\nu+1)\,x^{-\nu}}{\nu!\,(2n+m)\dots(2n+m-\nu+1)}\right|<\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,|x|^{\nu}}<\varepsilon.$$

С (4) и (5) граничното равенство (3) е установено.

На основание на формулата на Стирлинг за $n!$ получаваме асимптотичното равенство

$$(6)\qquad (2n+m)(2n+m-1)\dots(n+m+1)=\frac{(2n+m)!}{(n+m)!}\sim\left(\frac{4n}{e}\right)^{n}2^{m}\sqrt{2}.$$

От (3) и (6) ще имаме окончателно

$$(7)\qquad P_n(x)=\left(\frac{4nx}{e}\right)^{n}2^{m}\sqrt{2}\;e^{\frac{1}{2x}}\,(1+\varepsilon_n),$$

където $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Ще разгледаме някои прости приложения на формулата (7). Нека

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$$

е произволна редица от комплексни числа и да предположим, че редът

$$a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \cdots \tag{8}$$

е сходящ за някоя точка $x_0 \neq 0$. Нека $x$ е произволна точка, като $|x| < |x_0|$. Като пишем $a_n\ P_n(x)$ във формата

$$a_n P_n(x) = a_n P_n(x_0) \cdot \frac{P_n(x)}{P_n(x_0)}$$

и вземем под внимание формулата (7), получаваме, че редът (8) е абсолютно (значи и в обикновения смисъл) сходящ за $x$. Областта на сходимост на реда (8) е или цялата равнина, или кръг с център нулевата точка. За $x=0$ редът (8) става

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots,$$

който ред е сходящ или разходящ.

Паралелно с реда (8) да разгледаме следния ред:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{4n}{e}\right)^n x^n. \tag{9}$$

От предните разглеждания следва, че радиусът на сходимост на реда (8) съвпада с този на сходимост на реда (9). При $x=0$ редът (8) може да е сходящ или разходящ, но редът (9) е винаги сходящ за тази точка.

## 5. Асоциирани функции

Полиномът $P_n(x)$ е един частен интеграл на диференциалното уравнение

$$x^2 y'' + [(m+2)\ x - 1]\ y' - n(n+m+1)\ y = 0. \tag{1}$$

Ще намерим друг, линейно независим от $P_n(x)$ интеграл на същото уравнение. Ако поставим $y = x^{-m} e^{-\frac{1}{x}} u$, уравнението (1) става

$$x^2 u'' + u'\ [(2-m)x + 1] - (n+1)\ (n+m) u = 0. \tag{2}$$

Нека $C$ е произволен прост затворен контур, съдържащ вътре нулевата точка или поне точката $x$. Ще докажем, че функцията

$$g(x) = \int\limits_C \frac{z^{m+2n}\ e^{\frac{1}{z}}}{(z-x)^{n+1}}\ dz$$

е един интеграл на уравнението (2). С непосредствено диференциране получаваме

$$x^2\, g''(x)+[(2-m)\, x+1]\, g'(x)-(n+1)\,(n+m)\, g(x)=$$
$$-(n+1)\int_C \varphi(z)\,[z\,x\,(m+2n+2)+z-x-(n+m)\,z^2]\,dz,$$
$$\varphi(z)=z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}\,(z-x)^{-n-3}.$$

Но лесно се вижда, че дясната част на предното равенство е равна на

$$-(n+1)\int_C \frac{d}{dz}\left[\frac{z^{m+2n+2}\, e^{\frac{1}{z}}}{(z-x)^{n+2}}\right] dz,$$

т. е. равна на нула.

Следователно функцията

$$\psi(x)=x^{-m}\, e^{-\frac{1}{x}}\int_C \frac{z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}}{(z-x)^{n+1}}\,dz$$

е интеграл на уравнението (1). Ако нулевата точка не лежи вътре или по $C$, очевидно функцията $\psi(x)$ до постоянен множител е равна на $P_n(x)$. Нека сега $C$ не съдържа точката $x$, т. е. съдържа само нулевата точка. Можем да се ограничим на окръжност $C_1$ с център нулевата точка и радиус, по-малък от $|x|$. Функцията

$$Q_n(x)=x^{-m}\, e^{-\frac{1}{x}}\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{z^{m+2n}\, e^{\frac{1}{z}}}{(z-x)^{n+1}}\,dz \tag{3}$$

е интеграл на уравнението (1). Понеже по $C_1$ $|z|<|x|$, то ще е в сила развитието

$$\frac{1}{\left(1-\frac{z}{x}\right)^{n+1}}=\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(n)}\frac{z^\mu}{x^\mu},\qquad A_\mu^{(n)}=\binom{\mu+n}{\mu}$$

Но тогава за $Q_n(x)$ получаваме

$$Q_n(x)=e^{-\frac{1}{x}}\, x^{-m-n-1}\,\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_1}(-1)^n\sum_{\mu=0}^{\infty}A_\mu^{(n)}\frac{z^\mu}{x^\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{m+2n}}{\nu!\, z^\nu}\,dz$$

или

$$Q_n(x)=e^{-\frac{1}{x}}\, x^{-m-n-1}\, n!\,(-1)^n\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{A_\mu^{(n)}}{x^\mu\,(m+2n+\mu+1)!}. \tag{4}$$

Тази формула можем да пишем така:

$$Q_n(x)=e^{-\frac{1}{x}}\, x^{-m-n-1}\,\frac{n!\,(-1)^n}{(m+2n+1)!}\, g_n(x), \tag{5}$$

където

$$g_n(x)=1+\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu^{(n)}\frac{(m+2n+1)!}{x^\mu\,(m+2n+\mu+1)!}. \tag{6}$$

Влизащите в (4) и (5) редове са сходящи за всяко $x \neq 0$ и $Q_n(x)$ е регулярна функция в цялата равнина с изключение на нулевата точка, която е съществена особена точка за нея. Така получихме нов, линейно независим от $P_n(x)$ интеграл и общият интеграл на уравнението (1) ще е равен на

$$A P_n(x) + B Q_n(x),$$

където $A$ и $B$ са произволни константи. Ще наричаме $Q_n(x)$ асоциирана функция на $P_n(x)$.

Ще установим формулата

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i} x^{-m} e^{-\frac{1}{x}} \int\limits_C \frac{z^m e^{\frac{1}{z}} P_n(z)}{x-z} dz, \tag{7}$$

където $C$ е прост затворен контур, съдържащ вътре нулевата точка, като точката $x$ лежи вън от него.

Очевидно за $C$ можем да вземем окръжност с център нулевата точка и радиус $r$, по-малък от $|x|$. За интеграла

$$j_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{z^m e^{\frac{1}{z}} P_n(z)}{x-z} dz,$$

имаме

$$j_n = \frac{1}{2\pi x i} \int\limits_C z^m e^{\frac{1}{z}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{x^\mu} P_n(z) dz.$$

Понеже

$$\int\limits_C z^{m+\mu} e^{\frac{1}{z}} P_n(z) dz = 0, \ 0 < \mu \leq n-1,$$

то ще имаме

$$j_n = \frac{1}{2\pi x i} \int\limits_C e^{\frac{1}{z}} z^m \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{z^\mu}{x^\mu} P_n(z) dz.$$

Трябва да се пресметнат интегралите

$$a_\mu = \int\limits_C z^{m+\mu} e^{\frac{1}{z}} P_n(z) dz = \int\limits_C z^\mu \frac{d^n}{dz^n} \left( z^{m+2n} e^{\frac{1}{z}} \right) dz.$$

С интегриране по части лесно получаваме

$$\frac{1}{2\pi i} a_\mu = (-1)^n \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1) \frac{1}{(\mu+m+n+1)!}.$$

Следователно ще имаме

$$j_n = (-1)^n \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{x^\nu} \frac{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+n)}{(\nu+m+2n+1)!}.$$

От тази формула със сравняване виждаме непосредствено, че

$$Q_n(x) = x^{-m} e^{-\frac{1}{x}} j_n.$$

Ще намерим асимптотична формула за $Q_n(x)$ при $n \to \infty$. За тази цел ще трябва да изследваме функцията

$$g_n(x) = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+\mu)}{\mu!\, x^\mu} \cdot \frac{(m+2n+1)!}{(m+2n+\mu+1)!}. \tag{8}$$

За всяко фиксирано $\mu$ и $x$ имаме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+\mu)}{\mu!\, x^\mu} \cdot \frac{(m+2n+1)!}{(m+2n+\mu+1)!} = \frac{1}{(2x)^\mu \mu!}$$

и следователно за всяко фиксирано $p$ ще имаме

$$\lim_{n\to\infty} \left\{1 + \sum_{\mu=1}^{p} \frac{(n+1)\dots(n+\mu)}{\mu!\, x^\mu} \cdot \frac{(m+2n+1)!}{(m+2n+\mu+1)!}\right\} = \tag{9}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{p} \frac{1}{(2x)^\mu\, \mu!}.$$

При това горното гранично равенство е равномерно изпълнено за $|x| > \delta > 0$. Да означим с $u_\mu x^{-\mu}$ $(\mu+1)$-вия член в реда (8). Имаме

$$u_{\mu+1} = u_\mu \frac{n+\mu+1}{(\mu+1)(m+2n+\mu+2)},$$

откъдето следва лесно, че

$$u_{\mu+1} < u_\mu \cdot \frac{1}{2\,(\mu+1)}.$$

Оттук получаваме

$$u_\mu < \frac{1}{2^\mu \mu!}. \tag{10}$$

Ако с $R_p$ означим остатъчния член на реда (8), то от (10) следва, че за всяко $n$ и $x$ ще имаме

$$R_p| < \sum_{\mu=p+1}^{\infty} \frac{1}{|x|^\mu\, \mu!}.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно малко число. Понеже редът $\sum \frac{1}{\mu!\, |x|^\mu}$ е сходящ, можем да изберем $p$ така голямо, $p > p_0$, че за всяко $n$ и $x$, $|x| > \delta > 0$, да имаме

$$|R_p| < \varepsilon.$$

От последното неравенство и (9) следва граничното равенство

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(2x)^\mu\, \mu!} \qquad e^{\frac{1}{2x}}, \tag{11}$$

което е изпълнено равномерно за $|x| > \delta > 0$. На основание на формулата на Стирлинг получаваме за $n \to \infty$

$$(12)\qquad \frac{n!}{(m+2n+1)!} \sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{(m+2n+1)^{m+2n+1} e^{-m-2n-1} \sqrt{4\pi n}} \sim \frac{e^n}{2^{2n+m+1} n^{n+m+1} \sqrt{2}}.$$

От (5), (11), (12) намираме асимптотичната формула

$$(13)\qquad Q_n(x) = \left(\frac{-e}{4nx}\right)^n \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{(2xn)^{m+2}\sqrt{2}}(1+\eta_n),$$

където $\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$, и то равномерно за $|x| > \delta > 0$.

На основание на тази формула можем лесно да докажем аналогични свойства на предните, като вместо реда (22) от § 4 разгледаме редове от вида

$$(14)\qquad b_0 Q_0(x) + b_1 Q_1(x) + b_2 Q_2(x) + \cdots$$

Ако редът (14) е сходящ за едно $x = x_0 \neq 0$, то той е сходящ за всяка точка $x$, за която $|x| > |x_0|$, и то абсолютно. Областта на сходимост на реда (14) ще бъде външността на кръг, цялата равнина с изключение на точката $x=0$, или редът (14) ще бъде разходящ за всяко $x$. За $x=0$ той не е дефиниран. Областта на сходимост на реда (14) съвпада с тази на сходимостта на реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{-e}{4n}\right)^n \frac{1}{x^n}.$$

## 6. Развития на функции по полиномите

В началото установихме, че полиномите $P_n(x)$ удовлетворяват релацията

$$(1)\qquad k_n P_{n+1}(x) = \frac{1}{g_n}(x-a_n) P_n(x) - k_{n-1} P_{n-1}(x),\quad n > 1,$$

където

$$k_n = \frac{1}{g_n} \cdot \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$$

и $\lambda_n$ е коефициентът пред най-високата степен в $P_n(x)$. Като вземем предвид формулата

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i} x^{-m} e^{-\frac{1}{x}} \int_C \frac{z^m e^{\frac{1}{z}} P_n(z)}{x-z}\, dz,$$

лесно се убеждаваме, че и функциите $Q_n(x)$ удовлетворяват на същите релации (1). Именно имаме

$$k_n\ Q_{n+1}(x)-\frac{1}{g_n}(x-a_n)\ Q_n(x)+k_{n-1}\ Q_{n-1}(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}x^{-m}e^{\frac{1}{x}}\int_C z^m e^{-\frac{1}{z}}\left[k_n\ P_{n+1}(z)-\frac{1}{g_n}(z-a_n)\ P_n(z)+\right.$$

$$\left.+k_{n-1}\ P_{n-1}(z)\right]\frac{dz}{x-z}-\frac{1}{2\pi i g_n}\int_C z^m e^{\frac{1}{z}}P_n(z)dz=0,\ n\geq 1.$$

Ще получим сега аналогична формула на тази на Кристофел за ортогоналните полиноми. От равенствата

$$k_n\ P_{n+1}(x)=\frac{1}{g_n}(x-a_n)P_n(x)-k_{n-1}P_{n-1}(x),$$

$$k_n\ Q_{n+1}(y)=\frac{1}{g_n}(y-a_n)Q_n(y)-k_{n-1}Q_{n-1}(y)$$

с умножаване на първото с $Q_n(y)$ и на второто с $-P_n(x)$ и събиране получаваме

$$k_n\ \Delta_n=\frac{1}{g_n}(x-y)\ P_n(x)Q_n(y)+k_{n-1}\ \Delta_{n-1},$$

където $\Delta_n$ означава израза $P_{n+1}(x)Q_n(y)-P_n(x)Q_{n+1}(y)$. Като поставим $n=1,\ 2,\ 3,\dots,\ p$ и съберем получените равенства, ще имаме

$$k_p\ \Delta_p=(x-y)\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{g_n}P_n(x)\ P_n(y)+k_0\ \Delta_0$$

или

$$k_p\ \Delta_p=(x-y)\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{g_n}P_n(x)\ P_n(y)+h,$$

където

$$h=k_0\ \Delta_0-(x-y)\frac{1}{g_0}P_0(x)\ P_0(y).$$

Понеже

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=(m+2)\ x-1,$$

$$k_0=\frac{\lambda_0}{g_0\lambda_1}=\frac{(m+1)!}{m+2},$$

то за $h$ имаме

$$h=\frac{(m+1)!}{m+2}[P_1(x)\ Q_0(y)-Q_1(y)]-(m+1)!\ (x-y)\ Q_0(y)=$$

$$=\frac{(m+1)!}{m+2}[P_1(x)\ Q_0(y)-Q_1(y)-(m+2)\ (x-y)\ Q_0(y)]$$

$$=\frac{(m+1)!}{m+2}[Q_0(y)\ P_1(y)-Q_1(y)].$$

Така получихме формулата

$$\frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{p}P_n(x)\frac{Q_n(y)}{g_n h(y)}+R_p, \tag{2}$$

$$R_p=\frac{k_p}{(y-x)\,h(y)}\left[P_{p+1}(x)\,Q_p(y)-P_p(x)\,Q_{p+1}(y)\right],$$

където с $h(y)$ сме означили функцията $\frac{(m+1)!}{m+2}\,[Q_0(y)P_1(y)-$ $-Q_1(y)]$.

Нека $|x|<|y|$. По асимптотичните формули (7), § 4 и (13) § 5, за $p\to\infty$ имаме

$$k_p=\left(-\frac{1}{2}\right)^p p^m(1+\varepsilon_p),$$

$$P_{p+2}(x)\,Q_p(y)=\left(\frac{p+1}{p}\cdot\frac{x}{y}\right)^p(-1)^p\,\frac{4p+4}{e}\,x\cdot\frac{1}{2p^{m+1}}\,(1+\varepsilon_p'),$$

където $\varepsilon_p\to 0$, $\varepsilon_p'\to 0$ при $p\to$ На основание на (2) при $p\to\infty$ получаваме равенството

$$\frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\frac{Q_n(y)}{g_n\,h(y)}. \tag{3}$$

Нека $f(x)$ е холоморфна функция в кръга $|x|<r$ и да означим с $C'$ кръга $|y|=r'$, като $r'<r$ и $r'$ е произволно близко до $r$. Освен това $r'$ е така избрано, че по $C'$ да няма нула на $h(y)$. Можем впрочем да не ограничаваме окръжността $C'$ да не минава през нула на $h(y)$, като заместим съответната малка дъгичка от $C'$, по която лежи нула на $h(y)$, с малка съседна дъга. Нека $x$ е произволна точка, която лежи вътре в $C'$. Тогава с умножение на реда (3) с $f(y)\frac{1}{2\pi i}$ и интегриране по $C'$ или от формулата

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(y)}{y-x}\,dy$$

$$=\sum_{n=0}^{p}P_n(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{Q_n(y)}{g_n\,h(y)}f(y)\,dy+\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}f(y)\,R_p\,dy$$

с преминаване към граница при $p\to\infty$ получаваме развитието

$$f(x)\quad\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,P_n(x), \tag{4}$$

където числата $c_n$ са равни на

$$c_n\quad\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}f(y)\,\frac{Q_n(y)}{g_n\,h(y)}\,dy,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

От самото извеждане следва, че редът (4) е равномерно сходящ във всеки кръг $|x| \leq r' < r$. На основание на бележката от § 4 следва, че същият ред е и абсолютно сходящ във всеки кръг $|x| \leq r' < r$.

На основание на ортогоналността на полиномите $P_n(x)$ можем да получим друга формула за коефициентите $c_n$. Именно от (4) получаваме

$$\int_{C'} f(x)\, x^m e^{\frac{1}{x}} P_k(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{C'} x^m e^{\frac{1}{x}} P_n(x) P_k(x)\, dx,$$

откъдето имаме

$$c_k = \frac{1}{2\pi i g_k} \int_{C'} f(x)\, x^m e^{\frac{1}{x}} P_k(x)\, dx. \tag{5}$$

Ако повдигнем в квадрат равенството (4) и интегрираме, получаваме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} f^2(x)\, x^m e^{\frac{1}{x}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, c_n^2,$$

която формула има някаква аналогия с формулата на Бесел за ортогоналните полиноми при обикновената метрика.

От горното извеждане следва и предложението:

Окръжността на кръга на сходимост минава през най-близката особена точка до нулевата точка на функцията $f(x)$.

Можем да получим аналогично развитие на това на Лоран за дадена функция в ред по асоциираните функции $Q_n(y)$. Нека $F(y)$ е холоморфна функция в кръговата област $|y| > R > 0$. Нека $y$ е произволна точка от тази област, т. е. $|y| > R$, и $x$ е произволна точка от окръжността $|x| = R$. Като използуваме равенството

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{Q_n(y)}{g_n\, h(y)}$$

и формулата на Коши, получаваме, че $F(y)$ се развива в равномерно сходящия ред

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{Q_n(y)}{h(y)} \tag{6}$$

във всяка област $|y| \geq R_1 > R$.

Подобно на реда на Лоран всяка холоморфна функция във венеца $0 < r < |x| < r_1$ ще се представя в него като сума от два реда от вида (4) и (6). Доказателството на това твърдение въз основа на формулата на Коши и предните резултати е непосредствено.

В частния случай, когато $m = 0$, развитието (4) се свежда на такова по полиномите на Бесел и така получаваме един резултат, установен в работата 4 по друг начин и в по-специална форма.

При по-ранните наши разглеждания числото $m$ се предполагаше, че е цяло $\geq -1$. Предполагаме сега, че $m$ е произволно число, отлично от $-2, -3, -4, \ldots$ Формулата (1) за полинома $P_n(x)$ и асимптотичната формула (7) от § 4 очевидно остават валидни. Ще покажем, че за асоциирана функция $Q_n(x)$ на $P_n(x)$ можем да вземем функцията

$$Q_n(x) = (-1)^n\ n!\ x^{-m-n-1}\ e^{-\frac{1}{x}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_\mu^{(n)}}{x^\mu\ \Gamma(m+2n+\mu+2)}\,.$$

Очевидно при $m$ цяло $\geqq -1$ тази функция съвпада с функцията (4) от § 5. Ще трябва да установим, че $Q_n(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$x^2 y'' + [(m+2)\ x-1]\ y' - n(n+m+1)\ y = 0.$$

Последното уравнение със заместването

$$y = x^n\ e^{-\frac{1}{x}}\ v$$

се свежда на уравнението

$$x^2 v'' + [1 + x(2n+m+2)]\, v' + \frac{n+m}{x}\ v = 0. \tag{7}$$

Трябва да установим, че функцията

$$g(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_\mu^{(n)}}{x^{\mu+m+2n+1}\ \Gamma(\mu+m+2n+2)}$$

удовлетворява уравнението (7). Ако означим за простота с

$$a_\mu = \frac{A_\mu^{(n)}}{\Gamma(\mu+m+2n+1)},\quad p = m+2n+1,$$

то лесно се вижда, че въпросът се свежда към установяване на равенството

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+p)\ (\mu+p+1)\ x^{-\mu-p}\ a_\mu + (n+m) \sum_{\mu=1}^{\infty} x^{-\mu-p}\ a_{\mu-1} -$$

$$-\sum_{\mu=1}^{\infty} (p+\mu-1)\ x^{-\mu-p}\ a_{\mu-1} - (p+1) \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+p)\ x^{-\mu-p}\ a_\mu = 0.$$

Като приравним коефициентите пред разните степени на $x$, получаваме равенствата

$$p(p+1)\,a_0 - (p+1)\,p\,a_0 = 0,$$

$$(\mu+p)\,\mu\,a_\mu - (\mu+n)\,a_{\mu-1} = 0,\quad \mu \geq 1$$

или

$$a_\mu = \frac{\mu+n}{\mu\ (\mu+p)}\,a_{\mu-1}\,.$$

Верността на предните равенства следва от формулата

$$A_{\mu}^{(n)} = A_{\mu-1}^{(n)} \frac{\mu+n}{\mu}.$$

Видяхме, че между три последователни функции $Q_n(x)$ при $m$ цяло число $\geqq -1$ съществува същата рекурентна зависимост, каквато имаме между полиномите $P_n(x)$. Не е трудно да се види, че тази рекурентна зависимост съществува в общия случай, т. е. каквото и да е числото $m$, стига да е отлично от числата $-2, -3, -4, \ldots$ Именно ще трябва да установим верността на равенството

$$\frac{n+m+1}{(2n+m+1)(2n+m+2)} Q_{n+1}(x) = \tag{8}$$

$$= Q_n(x)\left[x - \frac{m}{(m+2n)(m+2n+2)}\right] + \frac{n}{(m+2n)(m+2n+1)} Q_{n-1}(x).$$

С прости преобразувания горното равенство се свежда на следното:

$$\frac{(n+m+1)(n+1)}{(m+2n+1)(m+2n+2)} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{A_{\nu-2}^{(n+1)}}{x^{\nu-1}\, \Gamma(m+2n+\nu+2)} = \tag{9}$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{\nu}^{(n)}}{x^{\nu-1}\, \Gamma(m+2n+\nu+2)} +$$

$$+ \frac{m}{(m+2n)(m+2n+2)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{\nu-1}^{(n)}}{x^{\nu-1}\, \Gamma(m+2n+\nu+1)} +$$

$$+ \frac{1}{(m+2n)(m+2n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{\nu}^{(n-1)}}{x^{\nu-1}\, \Gamma(m+2n+\nu)}.$$

Непосредственото изчисление показва, че коефициентите на $x^{-1}$ и тези на $x^0$ в двете части на (9) са равни помежду си. Остава да се установят равенствата

$$\frac{(n+m+1)\nu(\nu-1)}{(m+2n+1)(m+2n+2)(m+2n+\nu+1)(m+2n+\nu)} =$$

$$- \frac{n+\nu}{(m+2n+\nu+1)(m+2n+\nu)} + \frac{m\nu}{(m+2n)(m+2n+2)(m+2n+\nu)} -$$

$$+ \frac{n}{(m+2n)(m+2n+1)}.$$

Верността на предните равенства се потвърждава с елементарни пресмятания.

От равенството (8) следва, че формулата (3) е вярна за общия случай и оттам развитията (4), (6) остават в сила за този случай. Ще отбележим, че при $m$ отлично от цяло число точката $y=0$ се явява критична за функцията $Q_n(y)$, но за функцията $Q_n(y):h(y)$ тя е само изолирана съществена особена точка, понеже множителят $y^m$ в предното частно се съкращава.

*Постъпила на 28. VI. 1955*

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bochner, Über Sturm — Liouvilesche Polynomsysteme, Mathematische Zeit schrift, 29 (1929), 730—736.
2. W. Hahn, Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen, Mathematische Zeitschrift, 39 (1935), 634—638.
3. H. L. Krall and Oric Frink, A new class of orthogonal polinomials: the Bessel polynomials, Transactin of the American Mathematical Society, 65 (1949), 100—115.
4. M. Nassif, Note on the Bessel polynomials, Proceedings of the American Math. Soc., 77 (1954) 408—412.


# О НЕКОТОРЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Н. Обрешков


### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматриваются системи многочленов, ортогональные в комплексной области, т. е. удовлетворяющие равенствам

$$\int_C F(x) P_n(x) P_m(x)\, dx = 0, \quad m \neq n,$$

где $F(x)$ функция аналитическая в замкнутой области $B$, ограниченой контуром $C$, $P_n(x)$ многочлен $n$-той степени. В частности рассматриваются обощенные полиноми Бесселя, удовлетворяващие линейному уравнению второго порядка

$$x^2 y'' + [(m+2)x - 1]\, y' - n(n+m+1)\, y = 0,$$

где $m$ произволное число, отличное от $-2$, $-3$, $-4, \ldots$ Находится функция второго рода

$$Q_n(x) = (-1)^n n!\, x^{-m-n-1} e^{-\frac{1}{x}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu^{(n)}}{x^\nu\, \Gamma(m+2n+\nu+2)}$$

и дается разложение регулярных функции по полиномов $P_n(x)$ и по функциих $Q_n(x)$.

# SUR QUELQUES POLYNOMES ORTHOGONAUX DANS LE DOMAINE COMPLEXE

N. Obrechkoff


## RÉSUMÉ

On considère de polynomes orthogonaux suivant une fonction $F(x)$, qui satisfont aux conditions

$$\int_C F(x) P_n(x) P_m(x)\, dx = 0, \quad m \neq n.$$

C étant un contour simple et fermé et $F(x)$ une fonction analytique dans C.

Dans le cas où $F(x) = x^m\, e^{\frac{1}{x}}$, $m = -1, 0, 1, 2, \ldots$, les polynomes $P_n(x)$ sont connus,

$$P_n(x) \quad A_n\, x^{-m}\, e^{-\frac{1}{x}} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{m+2n}\, e^{\frac{1}{x}}\right).$$

Ils satisfont à l'équation différentielle connue

$$x^2 y'' + [(m+2)x - 1]\, y' - n(n+m+1)\, y = 0.$$

Dans ce travail l'auteur trouve la fonction assossiée $Q_n(x)$ du polynome $P_n(x)$ et des formules assymptotiques pour $P_n(x)$ et $Q_n(x)$. Il démontre que chaque fonction $f(x)$, holomorphe dans un cercle $|x| < r$, peut être développer en une serie

$$f(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \cdots, \tag{1}$$

uniformement convérgente dans le cercle $|x| \leqq r' < r$. Le domaine de la convérgence de la série (1) et le plus grand cercle, ne contenant pas des points singuliers de la fonction $f(x)$ à l'intérieur. Le nombre $m$ est arbitraire, mais différent de $-2, -3, -4, \ldots$