REGELSCHAREN ISOTROPER GERADEN IN DER ZWEIACHSIGEN GEOMETRIE

B. Petkantschin

§ 1. Vorbemerkungen

Eine reelle Kollineation im reellen dreidimensionalen projektiven Raum P_3, welche jede von den beiden reellen windschiefen Geraden j und k in sich transformiert, wird B-Kollineation genannt. Die Menge aller B-Kollineationen ist eine siebengliedrige Transformationsgruppe; die von dieser Gruppe in P_3 induzierte Geometrie sei B-Geometrie oder zweiachsige Geometrie genannt. Ein Punkt wird als endlich oder unendlich bezeichnet, je nachdem er ausserhalb j und k oder auf einer dieser Geraden liegt. Entsprechend wird eine Ebene endlich oder unendlich genannt, je nachdem sie mit keiner oder mit einer der Geraden j, k inzidiert. Schliesslich nennt man eine Gerade 1) endlich, 2) isotrop, 3) unendlich, 4) absolut, falls die Gerade 1) zu j und k windschief ist, 2) genau eine der Geraden j, k schneidet, 3) die beiden Geraden j, k schneidet, 4) eine der Geraden j, k ist.

Wir verwenden in der B-Geometrie nur B-Koordinatensysteme. Unter einem B-Koordinatensystem, kürzer B-System, verstehen wir ein projektives Koordinatensystem, dessen Grundpunkte $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ auf j, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ auf k liegen. Den Koordinatenquadrupel (x_1, x_2, y_1, y_2) eines Punktes bezüglich eines B-Systems K bezeichnen wir kürzer (x, y), wobei x, y Bezeichnungen für die geordneten Paare reeller Zahlen (x_1, x_2), (y_1, y_2) sind. Das Nullpaar $(0, 0)$ wird immer mit o bezeichnet. Für die Zahlenpaare, sowie für die Zahlenquadrupel, definiert man nach bekannten Regeln Addition, Subtraktion, Multiplikation mit reellen Zahlen, lineare Abhängigkeit usw.

Die linearen Transformationen

$$\gamma \bar{x}_i = \sum_{=1} c_{ij} x_j, \qquad \gamma \bar{y}_i = \sum_{j=1}^{2} d_{ij} y_j \tag{1}$$

mit reellen Zahlen $\gamma \neq 0$, c_{ij}, d_{ij} $(i, j = 1, 2)$ und

$$c = |c_{ij}| \neq 0, \quad d = |d_{ij}| \neq 0 \tag{2}$$

lassen *zwei* Deutungen zu. Falls K und $\bar{K}$ *zwei* B-Systeme sind, bezüglich deren *ein* beliebiger Punkt Koordinaten (x_1, x_2, y_1, y_2), $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1,$

$\bar{y}_2$) hat, existieren Zahlen $\gamma \neq 0$, c_{ij}, d_{ij} mit $c \neq 0$, $d \neq 0$, so dass $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ sich als Funktionen von x_i, y_i durch (1) ausdrücken; umgekehrt bestimmen K und c_{ij}, d_{ij} mit (2) das System $\bar{K}$ eindeutig. Falls K *ein* System ist, bezüglich dessen *zwei* Punkte Koordinaten (x_1, x_2, y_1, y_2), $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ besitzen, ist die durch (1) definierte Punkttransformation $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ des Raumes eine B-Kollineation; und umgekehrt lässt sich jede B-Kollineation durch Gleichungen von der Form (1) darstellen.

Die Determinante

$$xu = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

nennen wir das P r o d u k t der beiden Zahlenpaare $x = (x_1, x_2)$, $u = (u_1, u_2)$. Offenbar ist $xu = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung für die lineare Abhängigkeit der Paare. Wir erwähnen die folgenden Eigenschaften des Produkts:

$$xx = 0, \quad xu = -ux; \tag{4}$$

$$(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2)(\mu_1 u^1 + \mu_2 u^2) = \lambda_1 \mu_1 \,.\, x^1 u^1 + \lambda_1 \mu_2 \,.\, x^1 u^2 + \lambda_2 \mu_1 \,.\, x^2 u^1 + \lambda_2 \mu_2 \,.\, x^2 u^2; \tag{5}$$

$$(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)(\beta_1 x^1 + \beta_2 x^2) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \,.\, x^1 x^2. \tag{6}$$

Hierin sind x, u, x^1, x^2, u^1, u^2 beliebige Zahlenpaare, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, α_1 α_2, β_1, β_2 beliebige Zahlen.

Der Punkt (x, y) ist endlich, wenn $x \neq o$, $y \neq o$, unendlich vom 1. oder vom 2. System, wenn $x \neq o$, $y = o$, bezw. $x = o$, $y \neq o$ ist. Im Falle eines endlichen Punktes (x, y) sind (x, o), (o, y) die unendlichen Punkte der durch den Punkt hindurchgehenden unendlichen Geraden.

Die Verbindungsgerade g der verschiedenen Punkte (x, y), (u, v) ist:
endlich, wenn $xu \neq 0$, $yv \neq 0$ ist;
isotrop, wenn $xu = 0$, $yv \neq 0$ oder $xu \neq 0$, $yv = 0$ ist;
unendlich, wenn $xu = 0$, $yv = 0$ ist;
absolut, wenn $x = o$, $u = o$ oder $y = o$, $v = o$ ist.

Es seien $x^i = (x^i_1, x^i_2)$, $y^i = (y^i_1, y^i_2)$, $i = 1, 2, 3, 4$, acht Zahlenpaare; dann ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^1_1 & x^1_2 & y^1_1 & y^1_2 \\ x^2_1 & x^2_2 & y^2_1 & y^2_2 \\ x^3_1 & x^3_2 & y^3_1 & y^3_2 \\ x^4_1 & x^4_2 & y^4_1 & y^4_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} & x^1 x^2 \,.\, y^3 y^4 - x^1 x^3 \,.\, y^2 y^4 + x^1 x^4 \,.\, y^2 y^3 \\ & + x^2 x^3 \,.\, y^1 y^4 - x^2 x^4 \,.\, y^1 y^3 + x^3 x^4 \,.\, y_1 y_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Gleichung $\Delta = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Geraden (x^1, y^1) (x^2, y^2) und (x^3, y^3) (x^4, y^4) einen gemeinsamen Punkt haben.

§ 2. Grundpunkte einer Regelschar isotroper Geraden

Sei g eine isotrope Gerade vom 1. System; d. h. g schneidet die e r s t e a b s o l u t e G e r a d e j und ist zu der z w e i t e n a b s o l u t e n G e r a d e n k windschief. Der (einzige) unendliche Punkt auf g sei (x, o); er liegt auf j. Schliesslich sei (u, v) ein beliebiger endlicher Punkt auf g.

Wir nehmen nun an, dass x_1, x_2, u_1, u_2, v_1, v_2 (die Komponenten von x, u, v) reellwertige Funktionen des in einem Intervalle T veränderlichen reellen Parameters t sind. Die Existenz der in jedem speziellen Falle gerade benötigten Ableitungen der Funktionen wird vorausgesetzt. Wenn t das Intervall T durchläuft, bewegt sich im allgemeinen die Gerade $g=g(t)$ und beschreibt eine Regelschar G; die Menge der Punkte auf den Geraden der Regelschar ist eine geradlinige Fläche Γ. In unseren Arbeiten [1] und [2] haben wir gewisse Regelscharentypen in der zweiachsigen Geometrie differentialgeometrisch untersucht; es handelte sich damals um *endliche* Geraden $g(t)$. Nunmehr wollen wir uns denselben Fragen zuwenden unter der Voraussetzung aber, dass die Geraden der Regelschar isotrop sind. Diese Voraussetzung drückt sich durch die Ungleichungen

$$xu \neq 0, \quad v \neq o \quad \text{für } t \in T \tag{8}$$

aus.

Die Regelschar G ist dann und nur dann abwickelbar, wenn

$$\begin{vmatrix} x & o \\ \dot{x} & o \\ u & v \\ \dot{u} & \dot{v} \end{vmatrix} = \dot{x}x \, . \, \dot{v}v = 0 \quad \text{für } t \in T \tag{9}$$

ist.

Im Falle

$$\dot{x}x = 0 \quad \text{für } t \in T, \tag{10}$$

ist der Punkt (x, o) auf $g(t)$ konstant; jetzt ist G eine konische Regelschar mit dem (unendlichen) Scheitelpunkt (x, o). Im Falle

$$\dot{v}v = 0 \quad \text{für } t \in T, \tag{11}$$

geht die den Punkt (u, v) enthaltende unendliche Gerade h durch den konstanten Punkt (o, v) auf k. Da andrerseits diese Gerade immer j schneidet, liegt h in der durch j und (o, v) bestimmten unendlichen Ebene χ. Die Gerade g der Regelschar inzidiert mit (u, v) und schneidet j in dem von (u, v) verschiedenen Punkt (x, o); es ergibt sich also, dass g immer in der Ebene χ liegt. Somit:

Die Bedingung (11) ist genau dann für die Regelschar G erfüllt, wenn alle Geraden derselben in einer unendlichen Ebene durch j liegen.

Die umgekehrte Behauptung lässt sich leicht beweisen.

In den weiteren Betrachtungen schliessen wir den Fall einer abwickelbaren Regelschar aus; wir nehmen also an, dass die Ungleichungen

$$\dot{x}x \neq 0, \quad \dot{v}v \neq 0 \quad \text{für } t \in T \tag{12}$$

gelten.

Wir wollen jetzt auf g zwei vetschiedene mit G invariant verbundene Punkte auffinden Ersichtlich ist der unendliche Punkt (x, o) der Geraden ein invarianter Punkt. Um einen weiteren invarianten Punkt zu konstruieren, ziehen wir die sogenannte Lie-Fläche der Regelschar G für ihre Gerade $g=g(t)$ in Betracht. Die der Geraden $g(t)$ entsprechende Lie-Fläche $\Lambda(t)$ der Regelschar G ist eine geradlinige Fläche 2. Grades, die $g(t)$ enthält und in jedem Punkte von $g(t)$ die F'äche Γ berührt. Ungenau ausgedrückt, ist $\Lambda(t)$ diejenige eindeutig bestimmte Fläche 2. Grades, welche $g(t)$ und zwei benachbarte Geraden der Regelschar G enthält.

Die Lie-Fläche ist mit der Regelschar G sogar projektiv invariant vęrbunden; um so mehr ist sie mit G invariant in der zweiachsigen Geometrie verbunden. Dasjenige Erzeugendensystem von $\Lambda(t)$, das die Gerade $g(t)$ enthält, sei mit $L(t)$ bezeichnet; das andere Erzeugendensystem sei $M(t)$. Wir nennen $L(t)$ und $M(t)$ die Lie-Regelschar bezw. die konjugierte Lie-Regelschar von G für deren Gerade $g=g(t)$.

In unserer Arbeit [3] haben wir die analytische Darstellung der Lie-Fläche im projektiven Raum abgeleitet. Die Gerade $g(t)$ der gegebenen Regelschar G sei durch zwei verschiedene Punkte bestimmt, deren Koordinatenquadrupel bezüglich eines festen projektiven Koordinatensystems $x=x(t)$, $p=p(t)$ heissen mögen. Die durch den beliebigen Punkt

$$y=\lambda . x+\mu . p \tag{13}$$

auf g hindurchgehende Gerade $m(t;\lambda,\mu)$ der konjugierten Lie-Regelschar $M(t)$ wird durch die beiden Punkte $y=\lambda . x+\mu . p$ und

$$Y=\alpha . x+\beta . p+\varrho . (\lambda . \dot{x}+\mu . \dot{p}) \tag{14}$$

bestimmt, wobei die homogenen Parameter α, β, ϱ durch die Gleichung

$$2(\mu\alpha-\lambda\beta)\,\Delta+(A_1\lambda^2+A_2\lambda\mu+A_3\mu^2)\varrho=0 \tag{15}$$

verbunden sind. Die Grössen Δ, A_1, A_2, A_3 drücken sich durch gewisse vierreihige Determinanten von der Form (7) aus:

$$\Delta=(xp\dot{p}\dot{x}),\ A_1=(xp\dot{x}\ddot{x}),\ A_2=(xp\dot{x}\ddot{p})+(xp\dot{p}\ddot{x}),\ A_3=(xp\dot{p}\ddot{p}). \tag{16}$$

Die Gleichung (14) ist zugleich eine Parameterdarstellung der Lie-Eläche vermittels der homogenen Parameter $\alpha, \beta, \varrho, \lambda, \mu$, welche der Bedingung (15) genügen.

Für unsere Regelschar G in der zweiachsigen Geometrie verwenden wir die angeführten Formeln, indem wir x und p bezw. durch (x, o) und (u, v) ersetzen. Es ergibt sich

$$\Delta=\dot{x}x.\dot{v}v, A_1=0, A_2=\dot{v}v\ddot{x}x-\dot{x}x.\ddot{v}v, A_3=-xu.vv-\dot{u}x.vv+ux.\dot{v}v. \tag{17}$$

Als ein Beispiel wollen wir nur A_3 berechnen. Nach der Formel (7) bekommen wir

$$A_3=(xp\dot{p}\ddot{p})=\begin{vmatrix} x & o \\ u & v \\ \dot{u} & \dot{v} \\ \ddot{u} & \ddot{v} \end{vmatrix}$$

$$=xu.vv-xu.vv+xu.v\dot{v}+uu.ov-uu.ov+uu.ov$$

$$-xu.vv-ux.\ddot{v}v+\ddot{u}x.\dot{v}v.$$

Für die Punkte (13) und (14) gilt die Darstellung

(18) $$y=\lambda.(x,o)+\mu.(u,v),$$

(19) $$Y=\alpha.(x,o)+\beta.(u,v)+\varrho.[\lambda.(\dot{x},o)+\mu.(\dot{u},\dot{v})]$$

und daraus folgt: die durch den Punkt $y=(q,r)$ mit

(20) $$q=\lambda.x+\mu.u,\quad r=\mu.v$$

gehende Gerade $m(t;\lambda,\mu)$ der konjugierten Lie-Regelschar $M(t)$ wird durch y und durch den Punkt $Y=(Q,R)$ mit

(21) $$Q=\alpha.x+\beta.u+\varrho.(\lambda\dot{x}+\mu.\dot{u}),\quad R=\beta.v+\varrho\mu.\dot{v}$$

estgelegt; α,β,ϱ genügen der Gleichung (15), wobei jetzt Δ, A_1, A_2, A_3 die Werte (17) haben.

Wir suchen die Schnittpunkte der zweiten absoluten Geraden k mit der Lie-Fläche $\Lambda(t)$. Falls (Q,R) aus (21) ein Schnittpunkt ist, muss $Q=o$ sein; wegen der linearen Unabhängigkeit von x und u ist aber $Q=o$ mit den Gleichungen

(22) $$Qu=0,\quad xQ=0$$

gleichwertig. Hierin setzen wir Q aus (21) ein, so dass sich

(23) $$\alpha.xu+\varrho.(\lambda.\dot{x}u+\mu.\dot{u}u)=0,\quad \beta.xu-\varrho.(\lambda.\dot{x}x+\mu.\dot{u}x)=0$$

ergibt. Die aus (23) bestimmten α, β setzen wir in (15) ein; so kommen wir zu der Gleichung

(24) $$(2\Delta.\dot{x}x-A_1.xu)\lambda^2+(2\Delta.\dot{u}x+2\Delta.\dot{x}u-A_1.xu)\lambda\mu + (2\Delta.\dot{u}u-A_3.xu)\mu^2=0.$$

Der Koeffizient $2\Delta.\dot{x}x-A_1.xu=2\Delta.\dot{x}x=2(\dot{x}x)^2.vv$ ist wegen (12) ungleich Null; in jeder Lösung λ,μ von (24) ist also $\mu\neq 0$. Es seien (λ_1,μ_1), (λ_2,μ_2) mit $\mu_1\neq 0$, $\mu_2\neq 0$ die beiden Lösungen von (24). Aus (23) findet man die entsprechenden (α_1,β_1) und (α_2,β_2) und dann nach (21) die gesuchten Schnittpunkte (Q_1,R_1), (Q_2,R_2). Wir brauchen eigentlich diese Punkte nicht. Vielmehr sind für uns von Bedeutung die Punkte (q_1,r_1), (q_2,r_2) mit

(25) $$(q_1,r_1)=\lambda_1.(x,o)+\mu_1.(u,v),\quad (q_2,r_2)=\lambda_2.(x,o)+\mu_2.(u,v),$$

in welchen die durch die beiden Scnnittpunkte (Q_1,R_1), (Q_2,R_2) hindurchgehenden Geraden $m(t;\lambda_1,\mu_1)=m_1$, $m(t;\lambda_2,\mu_2)=m_2$ der konjugierten Lie-Regelschar die Gerade $g=g(t)$ treffen. Die Punkte (q_1,r_1), (q_2,r_2) sind wegen $\mu_1\neq 0$, $\mu_1\neq 0$ von (x,o) verschieden; offenbar sind sie invariante Punkte der Regelschar G auf g. Unangenehm ist aber, dass sie auch imaginär sein können. Jedenfalls ist der zu (x,o) bezüglich (q_1,r_1) und (q_2,r_2) vierte harmonische Punkt (u_0,v_0) immer reell, ohne Rücksicht darauf. ob die Punkte (q_1,r_1), (q_2,r_2) reell und verschieden, reell und zusammenfallend oder konjugiert-imaginär sind. Dabei lässt sich der Punkt (u_0, v_0) auch im dritten Falle reell definieren, indem man in bekannter Weise gewisse elliptische Involutionen in der Regelschar $M(t)$ heranzieht. Für die Punkte

$$\begin{aligned}(26)\qquad &(x, o) = 1\,.\,(x, o) + 0\,.\,(u, v),\\ &(u_0, v_0) = \lambda_0\,.\,(x, o) + \mu_0\,.\,(u, v),\\ &(q_1, r_1) = \lambda_1\,.\,(x, o) + \mu_1\,.\,(u, v),\\ &(q_2, r_2) = \lambda_2\,.\,(x, o) + \mu_2\,.\,(u, v)\end{aligned}$$

hat man in dieser Reihenfolge das Doppelverhältnis

$$\frac{\mu_1(\lambda_0\mu_2 - \mu_0\lambda_2)}{\mu_2(\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1)},$$

das gleich -1 sein soll. Daraus findet man die Werte

$$\lambda_0 = \lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2, \quad \mu_0 = 2\mu_1\mu_2.$$

Aus der quadratischen Gleichung (24) ergibt such dann

$$\begin{aligned}(27)\qquad &\lambda_0 = -f\,.\,(2A\,.\,ux + 2A\,.\,\dot{x}u - A_2\,.\,xu),\\ &\mu_0 = f\,.\,2\,.\,(2A\,.\,\dot{x}x - A_1\,.\,xu).\end{aligned} \qquad (f \neq 0)$$

Da ohnehin λ_0, μ_0 bis auf einen Faktor $(\neq 0)$ bekannt zu sein brauchen findet man aus (26_2) und (27) den Punkt (u_0, v_0):

$$\begin{aligned}(28)\qquad (u_0, v_0) = &-(2A\,.\,\dot{u}x + 2A\,.\,xu - A_2\,.\,xu)\,.\,(x, o) + 2\,.\,(2A\,.\,\dot{x}x\\ &- A_1\,.\,xu)\,.\,(u, v)\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(29)\qquad (u_0, v_0) = &-[2\,.\,\dot{x}x\,.\,\dot{v}v\,.\,(\dot{u}x + \dot{x}u) - (\dot{v}v\,.\,xx - \dot{x}x\,.\,vv)\,.\,xu]\,.\,(x, o)\\ &+ 4\,.\,(\dot{x}x)^2\,.\,\dot{v}v\,.\,(u, v).\end{aligned}$$

Die invarianten Punkte (x, o), (u_0, v_0) der Regelschar auf g sollen als erster und zweiter Grundpunkt von G auf der Geraden g bezeichnet werden.

In den weiteren Betrachtungen nehmen wir an, dass der zweite von (x, o) verschiedene Bestimmungspunkt auf der Geraden g nicht ein beliebiger ist, sondern dass er mit dem zweiten Grundpunkt zusammenfällt. Dies bedeutet aber, indem wir jetzt den zweiten Grundpunkt mit (u, v) bezeichnen, dass die Funktionen $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$ der Bedingung

$$(30)\qquad xu\,.\,(\dot{v}v\,.\,xx - \dot{x}x\,.\,vv) - 2\,.\,\dot{x}x\,.\,\dot{v}v\,.\,(\dot{x}u + \dot{u}x) = 0$$

für $t \epsilon T$ Genüge leisten.

§ 3. Invariante Normierung der Grundpunkte, invarianter Parameter, Ableitungsgleichungen für die Regecschar

Wir schreiben die bisher für die Funktionen $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$ eingeführten Bedingungen zusammen:

$$\left.\begin{aligned}(31)\qquad &xu \neq 0, \quad \dot{v}v \neq 0;\\ (32)\qquad &\dot{x}x \neq 0;\\ (30)\qquad &xu\,.\,(\dot{v}v\,.\,xx - \dot{x}x\,.\,vv) - 2\,.\,\dot{x}x\,.\,\dot{v}v\,.\,(\dot{x}u + \dot{u}x) = 0\end{aligned}\right\} \text{ für } t \epsilon T.$$

Wegen $xu \neq 0$, $\dot{v}v \neq 0$ lassen sich die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_{11}.x + a_{12}.u, \quad \ddot{v} = c_1.v + c_2.\dot{v}, \\ &\dot{u} = a_{21}.x + a_{22}.u, \end{aligned} \tag{33}$$

schreiben; darin sind a_{ij}, c_i $(i, j = 1, 2)$ skalare Funktionen von t in T nämlich

$$a_{11} = \frac{\dot{x}u}{xu}, \quad a_{12} = -\frac{\dot{x}x}{xu}, \quad a_{21} = \frac{\dot{u}u}{xu}, \quad a_{22} = -\frac{\dot{u}x}{xu}, \quad c_1 = -\frac{\ddot{v}v}{\dot{v}v}, \quad c_2 = \frac{vv}{\dot{v}v}. \tag{34}$$

Aus den Formeln (33) für $\dot{x}, \dot{u}$ findet man durch nochmalige Differentiation

$$\begin{aligned} x &= (\dot{a}_{11} + a_{11}^2 + a_{12}a_{21}).x + (\dot{a}_{12} + a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}).u, \\ u &= (\dot{a}_{21} + a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}).x + (\dot{a}_{22} + a_{21}a_{12} + a_{22}^2).u. \end{aligned} \tag{35}$$

Wenn man $\dot{x}, \dot{u}, x, u, v$ aus (33) und (35) in (30)—(32) ersetzt, drückt man die Bedingungen (30)—(32) durch a_{ij}, c_i aus:

$$\left.\begin{aligned} a_{12} &\neq 0 \\ \dot{a}_{12} + 3a_{12}a_{22} - a_{11}a_{12} - a_{12}c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{für } t \in T \tag{36}$$

Nun müssen wir beachten, dass falls (x, o), (u, v) Koordinatenquadrupel der Grundpunkte sind, auch $(\bar{x}, o)$, $(\bar{u}, \bar{v})$ mit

$$\begin{gathered} \bar{x} = \lambda.x, \quad \bar{u} = \mu.u, \quad \bar{v} = \mu.v \\ (\lambda = \lambda(t) \neq 0, \quad \mu = \mu(t) \neq 0 \text{ für } t \in T) \end{gathered} \tag{37}$$

Koordinatenquadrupel derselben Punkte sind. Bei den Umnormierungen (37) transformieren sich die Koeffizienten a_{ij}, c_i nach den Formeln

$$\begin{gathered} \bar{a}_{11} = a_{11} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}, \quad \bar{a}_{12} = \frac{\lambda}{\mu}a_{12}, \quad \bar{a}_{21} = \frac{\mu}{\lambda}a_{21}, \quad \bar{a}_{22} = a_{22} + \frac{\dot{\mu}}{\mu}, \\ \bar{c}_1 = c_1 - \frac{\mu}{\mu}c_2 + \frac{\mu\mu - 2\dot{\mu}^2}{\mu^2}, \quad \bar{c}_2 = c_2 + 2\frac{\dot{\mu}}{\mu}. \end{gathered} \tag{38}$$

Nun wählen wir die Koeffizienten λ und μ so, dass $\bar{a}_{11}$ und $\bar{c}_2$ gleich Null werden. Aus (38) ist klar, dass

$$\begin{gathered} \lambda = \lambda_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{11}\,dt\right) = \lambda_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}u}{xu}\,dt\right), \\ \mu = \mu_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{c_2}{2}\,dt\right) = \mu_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{vv}{2.\dot{v}v}\,dt\right) \end{gathered} \tag{39}$$

sind; hierin ist t_0 eine Zahl aus T und $\lambda_0 \neq 0$, $\mu_0 \neq 0$ sind beliebige Konstanten. Die sich nach (37) ergebenden Koordinatenquadrupel

$$
(40) \qquad \begin{aligned} &\lambda_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}u}{xu}\, dt\right) . (x, o), \\ &\mu_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{vv}{2 . \dot{v}v}\, dt\right) . (u, v) \end{aligned}
$$

der Grundpunkte nennen wir **s p e z i e l l e Q u a d r u p e l**. Aus den Formeln (38) folgt dann gleich, dass *alle* spezielle Quadrupel $(\bar{\bar{x}}, o)$, $(\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}})$ der Grundpunkte sich nach den Formeln

$$
(41) \qquad (\bar{\bar{x}}, o) = \alpha_0 . (\bar{x}, o), \quad (\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}}) = \beta_0 . (\bar{u}, \bar{v})
$$

ergeben, wenn man die skalaren Konstanten $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$ beliebig ändert. Dies steht im Zusammenhang mit dem Umstande, dass in (39) die Integrationskonstanten λ_0, μ_0 auftreten.

Es lässt sich unschwer zeigen, dass bei festgelegtem B-System die speziellen Quadrupel bis auf konstante Faktoren unabhängig von den Ausgangsquadrupeln der Grundpunkte sind. Ausführlicher bedeutet dies: es seien (x, o), (u, v) und

$$
(42) \qquad \begin{aligned} &(x', o) = \sigma . (x, o), \quad (u', v') = \tau . (u, v) \\ &(\sigma = \sigma(t) \neq 0, \quad \tau = \tau(t) \neq 0 \text{ für } t \epsilon T) \end{aligned}
$$

beliebige Quadrupel der beiden Grundpunkte. Mit den Normierungsfaktoren

$$
\lambda = \lambda_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}u}{xu}\, dt\right), \quad \mu = \mu_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{vv}{\dot{v}v}\, dt\right),
$$

$$
\lambda' = \lambda_0' \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}'u'}{x'u'}\, dt\right), \quad \mu' = \mu_0' \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\ddot{v}'v'}{\dot{v}'v'}\, dt\right)
$$

erhalten wir nach (40) spezielle Quadrupel

$$
\begin{aligned} &(\bar{x}, o) = \lambda . (x, o), \quad (\bar{u}, \bar{v}) = \mu . (u, v), \\ &(\bar{x}', o) = \lambda' . (x', o), \quad (\bar{u}', \bar{v}') = \beta . (u', v'). \end{aligned}
$$

Dann gelten die Gleichungen

$$
(43) \qquad (\bar{x}', o) = \lambda_1 . (\bar{x}, o), \quad (\bar{u}', \bar{v}') = \mu_1 . (\bar{u}, \bar{v})
$$

(mit konstanten $\lambda_1 \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$) für die speziellen Quadrupel, die zuerst mit Ausgangsquadrupeln (x, o), (u, v) und dann mit Ausgangsquadrupeln (x', o), (u', v') gefunden worden sind.

Endlich sind die speziellen Quadrupel bis auf konstante Faktoren unabhangig vom B-System. Die genaue Formulierung dieser Behauptung sowie den Beweis glauben wir dem Leser überlassen zu dürfen. Endlich ändern sich die speziellen Quadrupel nicht, wenn man eine Parametertransformation ausführt. Alles in allem ergibt sich also, dass die speziellen Quadrupel B-, D- und P-invariant sind, wenn man von der in [1] verwendeten Terminologie Gebrauch macht.

Von nun an setzen wir voraus, dass (x, o) und (u, v) spezielle Quadrupel der Grundpunkte sind. Dann müssen wir in (33) und (36) die Koeffizienten a_{11} und c_2 gleich 0 setzen, wodurch sich die Ableitungsgleichungen (33) zu

(44)
$$\dot{x} = a_{12} . u, \quad v = c_1 . v$$
$$\dot{u} = a_{21} . x + a_{22} . u,$$

vereinfachen. Die Bedingungen (36) lauten jetzt

(45)
$$a_{12} \neq 0, \ \dot{a}_{12} + 3a_{12}a_{22} = 0.$$

Bei den noch möglichen Umnormierungen (37) mit *konstanten* λ, μ transformieren sich $a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1$ nach den aus (38) folgenden Gleichungen

(46)
$$\overline{a}_{12} = \frac{\lambda}{\mu} a_{12}, \quad \overline{a}_{21} = \frac{\mu}{\lambda} a_{21}, \quad \overline{a}_{22} = a_{22}, \quad \overline{c}_1 = c_1.$$

Man muss eben $\dot{\lambda} = 0$, $\dot{\mu} = \mu = 0$ für $t \epsilon T$ beachten.H ieraus folgert man, dass die Grössen

(47)
$$a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1 .$$

Invarianten bezüglich der möglichen Umnormierungen sind. Sie stellen also D-Invarianten der Regelschar dar, da die Grundpunkte schon invariant fixiert worden sind. Die B-Invarianz der Grössen lässt sich leicht feststellen. Wir brauchen noch das Verhalten dieser Grössen bei einer Parametertransformation

(48)
$$t_1 \quad t_1(t)$$

zu untersuchen. Es ergibt sich:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt_1} \cdot \frac{dt_1}{dt}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{dt_1} \cdot \frac{dt_1}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt_1} \cdot \frac{dt_1}{dt}, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^2v}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 + \frac{dv}{dt_1} \cdot \frac{dt_1}{dt},$$

$$\dot{v}v \quad \frac{dv}{dt}v - \frac{dv}{dt_1} . v \frac{dt_1}{dt},$$

$$\ddot{v}v = \frac{d^2v}{dt^2}\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dt_1^2} \cdot \frac{dv}{dt_1} \cdot \left(\frac{dt_1}{dt}\right)^3,$$

$$\dot{x}x \quad \frac{dx}{dt}x = \frac{dx}{dt_1}x \cdot \frac{dt_1}{dt},$$

$$\dot{u}u = \frac{du}{dt}u = \frac{du}{dt_1}u \cdot \frac{dt_1}{dt},$$

$$\dot{u}x = \frac{du}{dt}x = \frac{du}{dt_1}x \cdot \frac{dt_1}{dt}$$

und weiter für c_1, a_{22}, a_{12}, a_{21}, durch die neuen Koeffizienten c_1^*, a_{22}^*, a_{12}^*, a_{21}^* ausgedrückt:

$$c_1 = c_1^* \cdot \left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2, \quad a_{22} = a_{22}^* \cdot \frac{dt_1}{dt},$$

(49)

$$a_{12}a_{21} = a_{12}^* a_{21}^* \cdot \left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2.$$

Nun setzen wir voraus, dass für die Regelschar G die Bedingung

(50) $$a_{22} \neq 0, \text{ d. h. } \dot{u}x \neq 0 \text{ für } t \epsilon T$$

erfüllt ist. Dann folgt aus den Gleichungen (49), dass die Grössen

(51) $$P = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}^2} = -\frac{\dot{x}x \,.\, \dot{u}u}{(\dot{u}x)^2} \qquad Q = \frac{c_1}{a_{22}^2} = -\frac{\ddot{v}v}{\dot{v}v} \cdot \frac{(xu)^2}{(\dot{u}x)^2}$$

absolute Differentialinvarianten der Regelschar sind (B-, D- und P-Invarianten). Es muss beachtet werden, dass die Grundpunkte sowie (bis auf für P, Q unwesentliche konstante Faktoren) ihre Normierungen nach (40) invariant fixiert sind; und die Formeln (49) zeigen eben die P-Invarianz.

Weiter folgt aus der zweiten Gleichung (49), dass für die Regelschar G die Grösse

(52) $$s = \int_{t_0}^{t} a_{22}\,dt \quad = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{u}x}{xu}\,dt$$

als invarianter Parameter eingeführt werden kann, der von der Geraden $g(t_0)$ bis zur Geraden $g(t)$ gemessen wird. Die Umnormierungen (37) sind offenbar ohne Einfluss auf s.

Endlich fügen wir zu den bisher gemachten Annahmen noch die weitere hinzu, dass anstatt des beliebigen Parameters t für die Regelschar G der invariante Parameter s eingeführt ist. Die beliebige Gerade $g = g(s)$ der Regelschar ist also durch die beiden Grundpunkte (x, o), (u, v) in den speziellen Normierungen dargestellt, wobei

$$x = x(s), \quad u = u(s), \quad v = v(s).$$

s ändere sich im Intervalle Σ, das $s = 0$ enthält. Jetzt haben wir

(53) $$a_{22} = 1,$$

so dass

(54) $$x' = a_{12} \,.\, u, \quad u' = a_{21} \,.\, x + u, \quad v'' = c_1 \,.\, v,$$

$$a_{12} \neq 0 \tag{55}$$
$$a_{12}' + 3a_{12} = 0,$$

$$P = a_{12}a_{21} = -\frac{x'x \,.\, u'u}{(u'x)^2}, \quad Q = c_1 = -\frac{v''v'}{v'v} \cdot \frac{(xu)^2}{(u'x)^2} \tag{56}$$

ergeben. Die Ableitungen nach s werden mit bezeichnet. Aus der Gleichung (55) ergibt sich durch Integration

$$a_{12} = \theta e^{-3s} \tag{57}$$

mit einer Konstanten $\theta \neq 0$. Dann folgt aus (56)

$$a_{21} = \frac{1}{\theta} e^{3s} . P, \quad c_1 = Q. \tag{58}$$

Nun lauten die Ableitungsgleichungen (54) folgendermassen:

$$x' = \theta e^{-3s} . u, \quad u' = \frac{1}{\theta} e^{3s} P . x + u, \quad v'' = Q . v. \tag{59}$$

Wenn man die Anfangsgerade ($s = 0$) festhält, lässt sich natürlich durch die noch zugelassenen Umnormierungen von (x, o), (u, v) mit konstanten Koeffizienten erreichen, dass in (57) und (59) die Konstante θ gleich 1 wird.

Die Gleichungen

$$P = P(s), \quad Q = Q(s) \tag{60}$$

sind die *natürlichen Gleichungen* unserer Regelschar G. Die Auffindung einer Regelschar mit vorgegebenen natürlichen Gleichungen kommt auf die Integration des Differentialgleichungssystems (59) hinaus. Es ergibt sich leicht, dass die natürlichen Gleichungen die Regelschar eindeutig bis auf B-Kollineationen festlegen. Die analogen Betrachtungen für die hyperbolischen Regelscharen in der B-Geometrie sind in [1] durchgeführt.

Wir wollen noch einen Blick auf den ausgeschlossenen Fall

$$a_{22} = 0 \tag{61}$$

werfen. Jetzt lauten die Gleichungen (44):

$$\dot{x} = a_{12} . u, \quad \dot{u} = a_{21} . x, \quad v = c_1 . v, \tag{62}$$

wobei

$$a_{12} \neq 0, \quad \dot{a}_{12} = 0. \tag{63}$$

Die Grösse

$$R = \frac{a_{12}a_{21}}{c_1} \tag{64}$$

ist eine absolute Differentialinvariante der Regelschar. Nach der ersten Gleichung (49) ist das Vorzeichen von c_1 unabhängig vom Parameter. Wir setzen

$$\eta \quad \operatorname{sgn} c_1 \tag{65}$$

und erhalten, dass jetzt

(66) $$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\eta c_1}\,.\,dt$$

invarianter Parameter der Regelschar ist.

Unter der Voraussetzung, dass man für G eben s als Parameter einführt, bekommt man

(67) $$c_1=\eta,$$

so dass

(68) $$R=a_{12}a_{21}$$

ist. Aus $\dot{a}_{12}=0$ folgt $a_{12}=\theta$ const und schliesslich

(69) $$x'=\theta\,.\,u,\quad u'=\frac{R}{\theta}\cdot x,\quad v'=\eta\,.\,v.$$

Das sind die Ableitungsgleichungen mit den Konstanten

(70) $$\theta\neq 0,\quad \eta=\pm 1.$$

Die einzige natürliche Gleichung ist

(71) $$R=R(s).$$

Mit den bisherigen Ausführungen ist der Formelapparat für die differentialgeometrische Untersuchung der Regelscharen isotroper Geraden in der zweiachsigen Geometrie aufgestellt.

Eingegangen am 30. VI. 1955

LITERATUR

1. B. Petkantschin, Hyperbolische Regelscharen in der zweiachsigen Geometrie. Ann. de l'Université de Sofia, Fac. d. Sc. phys. et math., t. **48** (1953/54), livre 1, partie I, p. 33—67 (bulgarisch mit deutscher Zusammenfassung).
2. B. Petkantschin, Parabolische Regelscharen in der zweiachsigen Geometrie. Comptes Rendus de l'Acad. Bulg. des sciences, t. **8**. n. 1. (1955).
3. B. Petkantschin, Regelscharen isotroper Geraden im elliptischen Raum, Mitteilungen des Math. Inst. der Bulg. Ak. d. Wiss., Bd. I, 2. Buch (1954), S. 171—198 (bulgarisch mit deutscher Zusammenfassung).

РОЕВЕ ИЗОТРОПНИ ПРАВИ В ДВУОСНАТА ГЕОМЕТРИЯ

Б. Петканчин

РЕЗЮМЕ

В нашите работи [1] и [2] ние изведохме основните формули от диференциалната геометрия на тъй наречените хиперболични и параболични роеве прави в двуосната геометрия. В настоящата работа ние се занимаваме с роеве от *изотропни* прави в двуосната геометрия, като използуваме понятия, означения и резултати от казаните статии.

§ 1. Тук се дават някои предварителни елементарни сведения от двуосната геометрия.

§ 2. Нека правата g, определена с двете точки (x, o), (u, v), е изотропна от първа система; (x, o) е нейната единствена безкрайна точка (върху първата абсолютна права i). Ако предположим, че x, u, v са достатъчен брой пъти непрекъснато диференцируеми функции на реалната променлива t в някакъв интервал T, то при изменянето на t в T правата $g=g(t)$ ще опише един рой G от изотропни прави от I система. Ние предполагаме, че роят е неразвиваем, което означава валидността на условията

$$\dot{x}x \neq 0, \ \dot{v}v \neq 0 \quad \text{за} \quad t \in T. \tag{12}$$

С правата $g=g(t)$ от роя е свързана повърхнина $A(t)$ на Ли, върху която има две системи праволинейни образуващи. Едната система съдържа g. Другата система не съдържа g; наричаме я спрегнат рой на Ли за дадения рой G в правата му $g(t)$ и я бележим с $M(t)$. Търсим в роя $M(t)$ онази права j^*, която е хармонично спрегната на j относно двете прави в $M(t)$, които минават през пресечните точки на втората абсолютна права k с повърхнината $A(t)$ на Ли. Пресечната точка (u_0, v_0) на j^* с g е винаги реална, отлична от (x, o) и (B-, D-, P-) инвариантно свързана с роя. Като използуваме някои формули от нашата работа [3], отнасящи се до повърхнината на Ли, намираме за точката (u_0, v_0) представяне

$$\begin{aligned}(u_0, v_0) = {} & [2 . \dot{x}x . \dot{v}v . (\dot{u}x + \dot{x}u) - (\dot{v}v . xx - \dot{x}x . vv) . xu] . (x, o) \\ & + 4 . (\dot{x}x)^2 . \dot{v}v . (u, v).\end{aligned} \tag{29}$$

§ 3. Ако предположим нататък произволната права g от роя определена с първата си основна точка (x, o) и с втората основна точка (u_0, v_0) (вместо с произволната точка (u, v), т. е. положим $u_0 = u$, $v_0 = v$, ще имаме изпълнено условието

$$xu.(\dot{v}vxx-\dot{x}x.vv)-2.\dot{x}x.\dot{v}v.(\dot{x}u+\dot{u}x)=0 \text{ за } t\epsilon T. \tag{30}$$

Написваме уравненията за производните:

$$\begin{aligned} x&=a_{11}.x+a_{12}.u, \quad \ddot{v}=c_1.v+c_2.\dot{v},\\ u&=a_{21}.x+a_{22}.u. \end{aligned} \tag{33}$$

Чрез коефициентите в тези уравнения условията за роя се изразяват така:

$$a_{12}\neq 0,\ \dot{a}_{12}+3a_{12}a_{22}-a_{11}a_{12}-a_{12}c_2=0 \text{ за } t\epsilon T. \tag{36}$$

Изследваме поведението на коефициентите a_{ij}, c_i при произволно пренормиране

$$\overline{x}=\lambda.x,\ \overline{u}=\mu.u,\ \overline{v}=\mu.v \tag{37}$$

на основните точки и оттам намираме за тези точки специални четворки координати

$$\lambda_0\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{x}u}{xu}dt\right).(x,\ o),\quad \mu_0\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{vv}{2.\dot{v}v}dt\right).(u,v) \tag{40}$$

(λ_0, μ_0 константи), които са инвариантни до постоянни множители.

Ако приемем нататък, че основните точки (x, o), (u, v) са зададени именно със специалните четворки, уравненията (33) за производните и условията (36) стават

$$\dot{x}=a_{12}.u,\ \dot{u}=a_{21}.x+a_{22}.u,\ v=c_1.v, \tag{44}$$

$$a_{12}\neq 0,\ \dot{a}_{12}+3a_{12}a_{22}=0. \tag{45}$$

Като изследваме поведението на a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1 при смяна на параметъра на роя, намираме, че при $a_{22}\neq 0$ величините

$$P=\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}^2},\quad Q=\frac{c_1}{a_{22}^2} \tag{51}$$

са абсолютни (B-, D-, P-) инварианти на роя и че

$$s=\int_{t_0}^{t}a_{22}dt \tag{52}$$

е негов естествен параметър.

Да отнесем сега роя спрямо естествения му параметър s (вместо спрямо произволен параметър t). Формулите (44) за производните добиват вида

$$x'=\theta e^{-3s}.u,\ u'=\frac{1}{\theta}e^{3s}P.x+u,\ v''=Qv. \tag{59}$$

(формули на Френе за роя), където θ е някаква константа $\neq 0$.

В специалния случай, когато $a_{22}=0$ за $t\epsilon T$, имаме единствена абсолютна инварианта

(64) $$R=\frac{a_{12}a_{21}}{c_1},$$

естествен параметър

(66) $$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\eta c_1}\,.\,dt \quad (\eta=\operatorname{sgn} c_1)$$

и формули на Френе

(69) $$x'=\theta\,.\,u,\quad u'=\frac{R}{\theta}\cdot x,\quad v''=\eta\,.\,v,$$

в които η е постоянно или 1, или —1 и θ е някаква константа, отлична от 0.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ИЗОТРОПНЫХ ПРЯМЫХ В БИАКСИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Б. Петканчин

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье изучаются с дифференциально-геометрической точки зрения однопараметрические системы изотропных прямых биаксиального пространства. При этом используются некоторые содержащиеся в наших статьях [1] и [2] понятия, обозначения и результаты биаксиальной геометрии.

§ 1. Здесь приводятся некоторые элементарные сведения из биаксиальной геометрии.

§ 2. Пусть прямая $g=g(t)$, определенная двумя точками (x, o), (u, v), является изотропной прямой первой системы; (x, o) бесконечная точка этой прямой. При изменении действительного параметра t в некотором интервале T прямая $g(t)$ образует однопараметрическая, система G изотропных прямых, которая является объектом нашего исследования.

Прямой $g(t)$ системы G отвечает определенная поверхность Ли $\Lambda(t)$ системы G. Систему образующих поверхности Ли, которая не содержит прямую g, обозначаем через $M(t)$. Первая абсолютная прямая j содержится в $M(t)$ и мы ищем в $M(t)$ прямую j^*, которая гармонично сопряжена с j относительно тех двух прямых системы $M(t)$, которые проходят через точки пересечения второй абсолютной прямой k с поверхности Ли $\Lambda(t)$. Прямая j^* пересекает прямую g системы G в действительной точке (u_0, v_0), которая связана инвариантным образом с системой G.

Используя некоторые данные в [3] формулы для поверхности Ли мы получаем аналитическое представление точки (u_0, v_0):

$$(u_0, v_0) = -[2\,.\,\dot{x}x\,.\,\dot{v}x\,.\,(\dot{u}x+\dot{x}u)-(\dot{v}v\,.\,\ddot{x}x-\dot{x}x\,.\,vv)\,.\,xu]\,.\,(x, o) + 4\,.\,(\dot{x}x)^2\,.\,\dot{v}v\,.\,(u, v). \tag{29}$$

§ 3. Мы предполагаем в дальнейшем изложении, что прямая $g(t)$ системы G определяется **первой основной точкой** (x, o) и **второй основной точкой** (u_0, v_0). Если положим $u_0 = u, v_0=v$, должно быть

$$xu\,.\,(\dot{v}v\,.\,\ddot{x}x-\dot{x}x\,.\,vv)-2\,.\,\dot{x}x\,.\,\dot{v}v\,.\,(\dot{x}u+\dot{u}x)=0. \tag{30}$$

Уравнения производных для системы G имеют форму

(33) $$\dot{x}=a_{11}.x+a_{12}.u,\ \dot{u}=a_{21}.x+a_{22}.u,\ \ddot{v}=c_1.v+c_2.\dot{v},$$

при чем

(36) $$a_{12}\neq 0,\ \dot{a}_{12}+3a_{12}a_{22}-a_{11}a_{12}-a_{12}c_2=0 \text{ для } t\epsilon T.$$

Исследуя поведение коэффициентов a_{ij}, c_i при трансформации

(37) $$\overline{x}=\lambda.x,\ \overline{u}=\mu.u,\ \overline{v}=\mu.v$$

основных точек, мы находим для этих точек специальные координатные четверки

(40) $$\lambda_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{x}u}{xu}\,dt\right).(x, o),\ \mu_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\ddot{v}v}{2.\dot{v}v}\,dt\right).(u,\ v),$$

которые инвариантны. При предположении, что основные точки заданы этими специальными четверками, (33), (36) будут имет вид

(44) $$\dot{x}=a_{12}.u,\ \dot{u}=a_{21}.x+a_{22}.u,\ \ddot{v}=c_1.v.$$

(45) $$a_{12}\neq 0,\ \dot{a}_{12}+3a_{12}a_{22}=0.$$

Трансформационные формулы для a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1 при смене параметра t дают, что в случае $a_{22}\neq 0$ величины

(51) $$P=\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}^2},\quad Q=\frac{c_1}{a_{22}^2}$$

являются абсолютными инвариантами системы и что

(52) $$s=\int_{t_0}^{t}a_{22}dt$$

есть инвариантный параметр системы.

Если использовать именно s в качестве параметра системы, формулы (44) для производных принимают окончательную форму

(59) $$x'=\theta e^{-3s}.u,\ u'=\frac{1}{\theta}e^{3s}.P.x+u,\ v''=Q.v,$$

где $\theta\neq 0$ некоторая скалярная постоянная.

В исключенном случае $a_{22}=0$ для $t\epsilon T$ система G имеет единственный инвариант

(64) $$R=\frac{a_{12}a_{21}}{c_1},$$

инвариантный параметр

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\eta c_1} \, . \, dt \quad (\eta = \operatorname{sgn} c_1) \tag{66}$$

и уравнения для производных

$$x' = \theta \, . \, u, \; u' = \frac{R}{\theta} \cdot x, \; v'' = \eta \, . \, v, \tag{69}$$

где η равно 1 или -1, а $\theta \neq 0$ скалярная постоянная.