L'ALLURE ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI

par **Arnaud Denjoy**

Dans la première de mes Notes présentées à l'Académie des Sciences de Paris, à la date du 8 juillet 1907, j'énonçais, — en m'illusionnant d'ailleurs sur la qualité des preuves que je croyais en avoir obtenues — ce théorème (numéroté I bis), dont l'exactitude, démontrée pour une première partie par Ahlfors en 1929, n'est nullement douteuse pour la totalité de la proposition.

Théorème I bis. — Si la fonction $F(z)$ définie dans le plan de la variable complexe z est entiere d'ordre apparent fini ϱ, le nombre des approximations asymptotiques $P(z)$ de $F(z)$, constantes ou entières d'ordre inférieur à $\mu = 1/[2+(1/\varrho)]$, ne surpasse pas 2ϱ.

Dire que $P(z)$ est approché asymptotiquement par $F(z)$ signifie l'existence d'un chemin allant à l'infini et sur lequel $F(z) - P(z)$ tend vers zéro.

Si l'on se borne aux seules approximations $P(z)$ constantes, on a l'énoncé réduit, constituant le théorème I de la Note susdite et démontré par Ahlfors, après une remarquable tentative de Carleman établissant la borne supérieure 5ϱ. Il est probable que le théorème I bis se démontrerait dans toute sa généralité en suivant la voie découverte par Ahlfors pour justifier le théorème I.

Nous établirons le théorème I bis dans le cas très particulier où l'on suppose les chemins rectilignes. Il nous suffira de prouver cette proposition:

L'angle A limité par les côtés C_1 $(z=re^{i\theta_1})$ et C_2 $(r=e^{i\theta_2})$ $(\theta_1<\theta_2)$ étant d'ouverture $2\omega=\theta_2-\theta_1$ inférieure à π/ϱ, $P_1(z)$ et $P_2(z)$ étant constantes ou entières d'ordre inférieur à μ, si $F(z)—P_1(z)$ sur C_1 et $F(z)-P_2(z)$ sur C_2 tendent respectivement vers 0 pour z infini, il s'ensuit $P_1(z) = P_2(z)$.

D'après $\mu<\varrho$, $F-P_1$ et $F-P_2$ sont deux fonctions du même ordre que F. Donc, posant $P_2(z)-P_1(z)=P(z)$, il nous suffit de démontrer que, si $F(z)$ sur C_1 et $F(z)-P(z)$ sur C_2 tendent vers 0 pour z infini, il s'ensuit $P(z)=0$.

Tout d'abord un changement de z en $ze^{i\varphi}$, avec $\theta_1+\theta_2-2\varphi=0$, nous donne $\theta_1=-\omega$, $\theta_2=\omega<\pi/(2\varrho)$.

Soit $\tau > \varrho$, mais avec $\omega\varrho < \omega\tau < \pi/2$: λ étant indépendant de z, les deux intégrales

$$\int_{C_1} F(\lambda z)\, e^{-z^\tau} dz \quad \text{et} \quad \int_{C_2} F(\lambda z)\, e^{-z^\tau} dz$$

ont un sens et sont égales, d'après $\omega\tau < \pi/2$ et $F(\lambda z) < e^{|\lambda z|^{\varrho+\varepsilon}}$, $\varepsilon = \varepsilon(z)$ tendant vers 0 pour z infini. La valeur commune des deux intégrales est une fonction entière $H(\lambda)$. Tout chemin d'intégration joignant l'origine à l'infini dans l'angle A donnerait le même résultat $H(\lambda)$. Si λ est réel positif, le point λz décrit respectivement C_1 et C_2 en même temps que z.

λ croissant indéfiniment par valeurs réelles positives, on voit immédiatement que la première intégrale tend vers 0. La seconde ne diffère que par un infiniment petit en λ de

$$G(\lambda) = \int_{C_2} P(\lambda z)\, e^{-z^\tau}\, dz.$$

Car, si $F(z) = P(z) + Q(z)$, $Q(z)$ tend vers 0 sur C_2 et $\int_{C_2} Q(\lambda z) e^{-z^\tau} dz$ tend vers 0 pour $\lambda = +\infty$ réel. En conséquence $G(\lambda)$ tend vers zéro pour $\lambda = +\infty$ réel.

Soit $P(z) = \sum a_n z^n$.

Quel que soit $\nu > \mu$, asymptotiquement (pour n infini) $a_n < n^{-(n/\nu)}$. D'après $\mu < \varrho < \tau$, nous pouvons supposer $\nu < \tau$;

$$G(\lambda) = \sum_n b_n \lambda^n, \quad \text{avec } b_n = a_n \beta_n,$$

si $\beta_n = \int_{C_2} z^n e^{-z^\tau}\, dz$.

L'intégrale ne change pas si on la calcule sur le demi-axe réel positif Elle vaut, par le changement $z^\tau = u$,

$$\beta_n = (1/\tau) \int_0^\infty u^{(n+1)/\tau} e^{-u} \frac{du}{u} = (1/\tau)\Gamma\left(\frac{n+1}{\tau}\right).$$

D'après la formule d'approximation de la fonction Γ, asymptotiquement (pour n infini):

$$b_n < n^{-(n/\nu)+(n/\tau)}.$$

L'ordre de la fonction $G(\lambda)$ est donc inférieur à $\nu\tau/(\tau-\nu)$. Cet ordre sera inférieur à $^1/_2$ moyennant $\nu < \tau/(2\tau+1)$. Or ceci est réalisable. Car

$$\mu = \frac{\varrho}{2\varrho+1} < \frac{\tau}{2\tau+1}$$

d'aprés $\tau > \varrho$. Il est donc possible de choisir ν supérieur à μ et inférieur à $\tau/(2\tau+1)$. Mais d'après le théorème de Wiman, la fonction entière $G(\lambda)$ d'ordre inférieur à $^1/_2$ ne peut pas tendre vers 0 sur un chemin allant à l'infini sans être identiquement nulle. Donc $b_n = 0$, $a_n = 0$, $P(z) = 0$.

Le théorème I bis est donc démontré dans ce cas particulier

Reçu le 15. 10. 1956.

АСИМПТОТИЧНО ПОВЕДЕНИЕ НА ЦЕЛИТЕ ФУНКЦИИ ОТ КРАЕН РЕД

А. Данжуа (Париж)

РЕЗЮМЕ

Доказва се следната теорема: Ако функцията $F(z)$ на комплексното променливо z е цяла от привиден ред (ordre apparent) ϱ, броят на асимптотичните приближения $P(z)$ на $F(z)$, постоянни или цели от ред по-малък от $\mu = 1\left[2+\binom{1}{\varrho}\right]$, не надминава 2ϱ.

Казваме, че $P(z)$ асимптотически приближава $F(z)$, ако съществува крива в равнината на z, отиваща към безкрайност, върху която $F(z)-P(z)$ клони към нула. Теоремата е установена за случая, когато въпросните криви са прави линии.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

А. Данжуа (Париж)

РЕЗЮМЕ

Доказывается следующая теорема: Если функция $F(z)$ комплексного переменного z является целой кажущегося порядка (ordre apparent) ϱ, то число асимптотических приближений $F(z)$ — постоянных или целого порядка меньшего $\mu = 1\Big/\left[2+\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]$, не превышает 2ϱ.

Мы говорим, что $P(z)$ асимптотически приближает $F(z)$, если существует кривая в плоскости z, уходящая в бесконечность, на которой $F(z)-P(z)$ клонит к нулю. Теорема доказывается для случая, когда упомянутые кривые являются прямыми линиями.