ВЪРХУ ЕДНА КАТЕГОРИЯ ИНТЕРПОЛАЦИОННИ РЕДОВЕ НА ГОНЧАРОВ И СВЪРЗАНИТЕ С ТЯХ ПРОСТРАНСТВА И КОНУСИ

Я. Тагамлицки

Нека R е съвкупността от функциите $f(x)$, които са дефинирани и безбройно много пъти диференцируеми при $x > a$, нека

$$x_0 < x_1 < x_2 <$$

е произволна монотонно и неограничено растяща безкрайна редица от числа, за която $x_0 > a$, и нека

$$P_n(x) = \int_x^{x_0} dt_1 \int_{t_1}^{x_1} dt_2 \ldots \int_{t_{n-1}}^{x_{n-1}} dt_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

е n-тият интерполационен полином на Гончаров, като освен това $P_0(x) = 1$.

Както е известно (и както лесно се вижда), имаме

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu f^{(\nu)}(x_\nu) P_\nu(x) + R_n(x), \tag{1}$$

където

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_x^{x_0} dt_1 \int_{t_1}^{x_1} dt_2 \ldots \int_{t_n}^{x_n} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Да положим

$$R_n^*(f,x) = \int_x^{x_0} at_1 \int_{t_1}^{x_1} dt_2 \ldots \int_{t_n}^{x_n} |f^{(n+1)}(t)| dt$$

и

$$\varphi_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{n} |f^{(\nu)}(x_\nu)| P_\nu(x) + R_n^*(f,x).$$

Означаваме с G пространството от функциите $f(x)$ на R, за които $\varphi_n(f, x)$ остава ограничено, когато n и x се менят, като n приема цели неотрицателни стойности, а x е подчинено на неравенствата $a < x \leqq x_0$.

Нормираме пространството G, като полагаме

$$P(f) = \sup_{n,\, x} \varphi_n(f, x), \text{ където } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ и } a < x < x_0 .$$

С пространството G е тясно свързан конусът на ограничените в интервала $a < x < x_0$ функции $f(x)$ от R, които удовлетворяват неравенствата

$$(2) \qquad (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$$

при

$$a < x < x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ние ще означаваме този конус с G_+. Ако функцията $f(x)$ принадлежи на G_+, то очевидно

$$(3) \qquad \varphi_n(f, x) = f(x)$$

и следователно $G_+ \subset G$. От (2) и (3) се вижда, че

$$(4) \qquad P(f) = f(a+0),$$

което ни учи, че нормата $P(f)$ е линейна в G_+.

Не е трудно да се покажат функции, които принадлежат на G_+ (а следователно и на G). Такива са например интерполационните полиноми $P_n(x)$. Освен това регулярно монотонните функции

$$f(x) = \int_0^\infty e^{(a-x)t}\, d\alpha(t),$$

където $\alpha(t)$ е ограничена монотонно растяща функция в интервала $0 \leq t$, също принадлежат на G_+.

Очевидно разликата на две функции от G_+ принадлежи на G. Ще покажем, че и обратното е вярно, т. е. че всяка функция $f(x)$ от G може да се представи като разлика на две функции от G_+. За тази цел ще покажем, че редицата

$$(5) \qquad (-1)^k \varphi_k^{(k)}(f, x), \ (-1)^k \varphi_{k+1}^{(k)}(f, x), \ldots, \ (-1)^k \varphi_n^{(k)}(f, x), \ldots$$

монотонно расте при $a < x < x_k$. И наистина, ако $n > k$, то

$$(-1)^k \varphi_n^{(k)}(f, x) = \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^k \; f^{(\nu)}(x_\nu)\, P_\nu^{(k)}(x)$$

$$+ \int_x^{x_k} dt_{k+1} \int_{t_{k+1}}^{x_{k+1}} dt_{k+2} \ldots \int_{t_{n-1}}^{x_{n-1}} dt_n \int_{t_n}^{x_n} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

$$\geq \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^k |f^{(\nu)}(x_\nu)|\, P_\nu^{(k)}(x)$$

$$+ \int_x^{x_k} dt_{k+1} \int_{t_{k+1}}^{x_{k+1}} dt_{k+2} \ldots \int_{t_{n-1}}^{x_{n-1}} dt_n \left| \int_{t_n}^{x_n} f^{(n+1)}(t) dt \right|$$

$$= \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^k f^{(\nu)}(x\ )\, P_\nu^{(k)}(x)$$

$$+ \int_x^{x_k} dt_{k+1} \int_{t_{k+1}}^{x_{k+1}} dt_{k+2} \ldots \int_{t_{n-1}}^{x_{n-1}} f^{(n)}(x_n) - f^{(n)}(t_n)\ dt_n$$

$$> \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^k f^{(\nu)}(x_\nu)\, P_\nu^{(k)}(x)$$

$$+ \int_x^{x_k} dt_{k+1} \int_{t_{k+1}}^{x_{k+1}} d\,t_{k+2} \ldots \int_{t_{n-1}}^{x_{n-1}} f^{(n)}(t_n)\ dt_n$$

$$- \ f^{(n)}\ (x_n) \int_x^{x_k} dt_{k+1} \int_{t_{k+1}}^{x_{k+1}} dt_{k+2} \ldots \int_{t_{n-1}}^{x_{n-1}} dt_n$$

$$= \sum_{\nu=k}^{n-1} (-1)^k\ f^{(\nu)}(x_\nu)\ P_\nu^{(k)}(x)$$

$$+ \int_x^{x_k} dt_{k+1} \int_{t_{k+1}}^{x_{k+1}} dt_{k+2} \ldots \int_{t_{n-1}}^{x_{n-1}} f^{(n)}(t_n)\ dt_n$$

$$= (-1)^k\ \varphi_{n-1}^{(k)}(f,\ x).$$

Нека $0<\varepsilon<x_0-a$. Ще покажем, че при $a+\varepsilon<x\leq x_{k+1}$ имаме

$$(6) \qquad (-1)^k \varphi_{k+p}^{(k)}(f,\ x) < \frac{k!}{\varepsilon^k} P(f),$$

където p приема стойностите 0, 1, 2,... И наистина, нека числото α удовлетворява неравенствата $a<\alpha<a+\varepsilon$. В такъв случай, прилагайки формулата на Тейлор, получаваме

$$\varphi_{k+p}\ (f,\ \alpha) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{\varphi_{k+p}^{(\nu)}\ (f,\ a+\varepsilon)}{\nu!} (a+\varepsilon-\alpha)^\nu$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \varphi_{k+p}^{(k+1)}(f,\xi)(a+\varepsilon-\alpha)^{k+1},$$

където $\alpha<\xi<a+\varepsilon$. Като вземем под внимание, че

$$(-1)^\nu \varphi_{k+p}^{(\nu)}\ (f, x) \geqq\ 0$$

при $a<x\leq x_0$, $\nu=0, 1, \ldots k+1$; $p=0, 1, 2, \ldots$, получаваме

$$\varphi_{k+p}(f,\ \alpha) \geqq (-1)^k \frac{\varphi_{k+p}^{(k)}\ (f,\ a+\varepsilon)\,(a+\varepsilon-\alpha)^k}{k!},$$

откъдето пък намираме

$$(-1)^k\varphi_{k+p}^{(k)}(f,a+\varepsilon) < \frac{k!\,P(f)}{(a+\varepsilon-a)^k}$$

или още

(7) $$(-1)^k\varphi_{k+p}^{(k)}(f,a+\varepsilon) \leq \frac{k!\,P(f)}{\varepsilon^k},$$

което получаваме, след като оставим α да клони към a.

От друга страна при $a+\varepsilon \leq x < x_{k+1}$ имаме

$$(-1)^k\varphi_{k+p}^{(k)}(f,x) < (-1)^k\varphi_{k+p}^{(k)}(f,a+\varepsilon),$$

което заедно със (7) ни дава неравенството (6).

Така полученото неравенство (6) ни показва, че при $a<x<x_k$ монотонно растящата редица (5) е сходяща. Нещо повече, същото неравенство ни учи, че функциите

(8) $$(-1)^{k-1}\varphi_k^{(k-1)}(f,x),\ (-1)^{k-1}\varphi_{k+1}^{(k-1)}(f,x),\dots$$

са еднакво непрекъснати при $a+\varepsilon<x<x_k$, защото производните им са еднакво ограничени, а следователно редицата (8) е равномерно сходяща в интервала $a+\varepsilon<x<x_k$. Оттук следва, че редицата

(9) $$\varphi_0(f,x),\quad \varphi_1(f,x),\quad \varphi_2(f,x),\dots$$

е равномерно сходяща, както и редиците (5) от производните от кой да е ред във всеки краен интервал $[b, c]$, където $a<b<c<\infty$. (Нека отбележим, че каквото и да бъде цялото положително число k, производната $\varphi_n^{(k)}(f,x)$ сигурно съществува, ако $n \geq k$).

Полагаме

$$\varphi(f,x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(f,x).$$

Така дефинираната функция $\varphi(f,x)$ ние ще наричаме модул на $f(x)$

Като вземем под внимание, че при $a<x<x_k$ и $n \geq k$

$$(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}[\varphi_n(f,x)+f(x)] \geq 0$$

и

$$(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}[\varphi_n(f,x)-f(x)] \geq 0,$$

заключаваме, че

$$(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}[\varphi(f,x)+f(x)] \geq 0$$

и

$$(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}[\varphi(f,x)-f(x)] \geq 0$$

при $a<x\leq x_k$, $k=0,1,2,\dots$

От друга страна при $a < x \leq x_0$

$$f(x) \leq \varphi_0(f,x) \leq P(f)$$
$$\varphi(f,x) = \lim \varphi_n(f,x) \leq P(f)$$

и следователно двете функции

$$\varphi(f,x) + f(x) \quad \text{и} \quad \varphi(f,x) - f(x)$$

принадлежат към конуса G_+. Най-сетне, като вземем под внимание, че

$$f(x) = \frac{\varphi(f,x) + f(x)}{2} - \frac{\varphi(f,x) - f(x)}{2}, \tag{10}$$

заключаваме, че наистина всяка функция $f(x)$ от G може да се представи като разлика на две функции от G_+.

Функцията $\varphi(f,x)$ притежава редица важни свойства. Най-напред ще отбележим, че тя принадлежи на G_+. За да се убедим в това, достатъчно е да имаме предвид, че

$$\varphi(f,x) = \frac{\varphi(f,x) + f(x)}{2} + \frac{\varphi(f,x) - f(x)}{2}, \tag{11}$$

където двете дроби са функции, които принадлежат на G_+. Освен това ще отбележим, че

$$P(f) = \varphi(f, a+0). \tag{12}$$

И наистина съгласно дефиницията на $P(f)$ имаме

$$\varphi_n(f,x) \leq P(f)$$

при всички цели неотрицателни стойности на n и при $a < x \leq x_0$. Оттук, като извършим граничен преход по n при фиксирано x, получаваме

$$\varphi(f,x) \leq P(f)$$

и следователно

$$\varphi(f, a+0) \leq P(f). \tag{13}$$

От друга страна, като използуваме монотонността на редицата (9), получаваме

$$\varphi_n(f,x) \leq \varphi(f,x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad a < x \leq x_0$$

и следователно при всички цели неотрицателни стойности на n и при $a < x \leq x_0$ ще имаме

$$\varphi_n(f,x) \leq \varphi(f, a+0),$$

т. е.

$$P(f) \leq \varphi(f, a+0),$$

което заедно с (13) ни дава

$$P(f) = \varphi(f, a+0).$$

Ние видяхме вече, че ако $f(x) \in G_+$, то

$$P(f) = f(a+0).$$

Сега ще покажем, че и обратното е вярно, т. е., ако $f \varepsilon G$ и

(14) $$P(f) = f(a+0),$$

то $f(x) \varepsilon G_+$. За тази цел ще вземем под внимание, че

$$\varphi(f, x) - f(x) \varepsilon G_+$$

и следователно

$$P[\varphi(f, x) - f(x)] = \varphi(f, a+0) - f(a+0).$$

Оттук получаваме

$$P[\varphi(f, x) - f(x)] = P(f) - f(a+0) = 0,$$

което е достатъчно да можем да твърдим, че

$$f(x) = \varphi(f, x)$$

и следователно

$$f(x) \varepsilon G_+ .$$

Въвеждаме в пространството G координатна система, например като изберем в интервала $a < x < x_0$ една навсякъде гъсто разпределена редица от числа

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

и положим

(15) $$\Phi_\nu(f) = f(r_\nu), \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Очевидно имаме

$$|f(x)| \leq f(x_0) + \int_x^{x_0} f'(t)\, dt = \varphi_0(f, x) \leq P(f)$$

при $a < x < x_0$. По такъв начин получаваме

$$\Phi_\nu(f) \leq P(f),$$

т. е. нормата $P(f)$ мажорира координатната система (15).

Не е трудно да се убедим, че пространството G е компактно относно координатната система (15) и нормата $P(f)$. За тази цел е достатъчно да вземем под внимание, че при $a < x \leq x_k$

$$f^{(k)}(x) \leq (-1)^k \varphi_k^{(k)}(f, x),$$

което заедно с неравенството (6) ни дава

$$f^{(k)}(x) \leq \frac{k!\, P(f)}{\varepsilon^k}$$

при $a + \varepsilon < x \leq x_k$. Оттук не е трудно да заключим, че ако функциите

$$f_1(x), f_2(x), \ldots$$

от G са ограничени относно нормата $P(f)$, то те, както и производните им

$$f_1^{(k)}(x), f_2^{(k)}(x), \ldots$$

са еднакво ограничени, а следователно и еднакво непрекъснати във всеки краен интервал $[b, c]$, където $a < b < c < \infty$ при всяко фиксирано k. Това ни дава възможност да приложим теоремата на Арцела-Асколи, от което следва компактността на G и спрямо координатната система (15).

Също тъй не е трудно да се покаже, че нормата $P(f)$ е полунепрекъсната отдолу. И наистина нека редицата

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots \tag{16}$$

от функции от G удовлетворява неравенствата

$$P(f_n) \quad A$$

и клони към $f(x)$ относно координатната система (15). Избираме от (16) с помощта на теоремата на Арцела-Асколи и на диагоналния процес подредица

$$f_{m_1}(x),\ f_{m_2}(x), \ldots,$$

която е равномерно сходяща заедно с редиците от производните от всякакъв ред във всеки краен интервал $[b, c]$, където $a<b<c<\infty$. Нейната граница е очевидно $f(x)$. От

$$\varphi_k(f_{m_n}, x) \leq P(f_{m_n}) \leq A$$

получаваме при $a<x \quad x_k$ неравенството

$$\varphi_k(f, x) \leq A$$

и следователно

$$P(f) \leq A,$$

т. е. нормата $P(f)$ е наистина полунепрекъсната отдолу.

След всичко изложено е ясно, че в G има неразложими елементи (вж. [1]). Ние ще установим някои техни свойства. Към тази цел изглежда най-бързо води пътят, който с успех следваше при аналогични и много общи обстоятелства нашият студент Д. Скордев. Ще отбележим първо, че

$$P\left[\frac{\varphi(f, x)+f(x)}{2}\right] = \frac{\varphi(f, a+0)+f(a+0)}{2} = \frac{P(f)+f(a+0)}{2}$$

$$P\left[\frac{f(x)-\varphi(f, x)}{2}\right] = P\left[\frac{\varphi(f, x)-f(x)}{2}\right]$$

$$= \frac{\varphi(f, a+0)-f(a+0)}{2} = \frac{P(f)-f(a+0)}{2}$$

и следователно

$$P\left[\frac{\varphi(f, x)+f(x)}{2}\right] + P\left[\frac{f(x)-\varphi(f, x)}{2}\right] = P(f),$$

т. е. разлагането

$$f(x) = \frac{\varphi(f, x)+f(x)}{2} + \frac{f(x)-\varphi(f, x)}{2}$$

е и разлагане по норма. Оттук, ако $f(x)$ е неразложим елемент, получаваме

$$\frac{\varphi(f,x)+f(x)}{2} = \lambda f(x),$$

$$\frac{\varphi(f,x)-f(x)}{2} = \mu f(x),$$

където $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ и $\lambda+\mu = 1$. Очевидно от числата λ и μ поне едното е различно от нула. Ако $\lambda \neq 0$, то

$$f(x) = \frac{\varphi(f,x)+f(x)}{2\lambda}$$

и следователно $f(x) \in G_+$, ако ли пък $\mu \neq 0$, то

$$-f(x) = \frac{\varphi(f,x)-f(x)}{2\mu}$$

и следователно $-f(x) \in G_+$ (разбира се, λ и μ едновременно не могат да бъдат различни от нула, защото както се вижда, $f(x)$ и $-f(x)$ не могат едновременно да принадлежат на G_+).

Очевидно, ако $f(x) \in G_+$ и $f(x)$ е неразложим елемент в G, то той ще бъде неразложим и в по-малката съвкупност G_+. Ще покажем, че е в сила и обратното, т. е. ако $f(x) \in G_+$ и $f(x)$ е неразложим елемент в G_+, то елементът $f(x)$ е неразложим и в G. И наистина нека

$$f(x) = g(x)+h(x) \tag{17}$$

$$P(f) = P(g)+P(h), \tag{18}$$

където $g(x) \in G$ и $h(x) \in G$. От (17) получаваме

$$f(a+0) = g(a+0)+h(a+0).$$

От друга страна

$$[P(g)-g(a+0)] + [P(h)-h(a+0)] = P(f)-f(a+0)=0.$$

Като вземем под внимание, че

$$P(g)-g(a+0) \geq 0 \quad \text{и} \quad P(h)-h(a+0) \geq 0,$$

заключаваме, че

$$P(g)=g(a+0) \quad \text{и} \quad P(h) = h(a+0)$$

и следователно $g(x) \in G_+$ и $h(x) \in G_+$. Функцията $f(x)$ обаче е неразложима в G_+ и следователно функциите $g(x)$ и $h(x)$ са колинеарни помежду си, което ни учи, че функцията $f(x)$ е неразложима и в G.

От изложеното дотук се вижда, че въпросът за неразложимите елементи на G съществено се свежда към въпроса за неразложимите елементи на G_+.

Не е трудно да се покаже, че интерполационните полиноми на Гончаров $P_n(x)$ са неразложими в G_+ (а следователно и в G). И наистина нека

$$P_n(x) = g(x) + h(x),$$

където $g(x) \varepsilon G_+$ и $h(x) \varepsilon G_+$. Очевидно

$$(-1)^k P_n^{(k)}(x) = (-1)^k g^{(k)}(x) + (-1)^k h^{(k)}(x).$$

От друга страна при $k > n$ имаме

$$P_n^{(k)}(x) = 0$$

и тъй като

$$(-1)^k g^{(k)}(x) \geq 0, \quad (-1)^k h^{(k)}(x) \geq 0$$

при $a < x \leq x_k$, то

$$g^{(k)}(x) = h^{(k)}(x) = 0$$

и следователно $g(x)$ и $h(x)$ са полиноми, чиято степен не надминава n. Като вземем под внимание още, че при $k < n$, имаме

$$P_n^{(k)}(x_k) = 0, \quad (-1)^k g^{(k)}(x_k) \geq 0, \quad (-1)^k h^{(k)}(x_k) \geq 0,$$

получаваме

$$g^{(k)}(x_k) = 0 \quad \text{и} \quad h^{(k)}(x_k) = 0$$

при $k < n$, което е достатъчно, за да можем да твърдим, че

$$g(x) = (-1)^n g^{(n)}(x_n) P_n(x) \text{ и } h(x) = (-1)^n h^{(n)}(x_n) P_n(x),$$

т. е. полиномите на Гончаров са наистина неразложими.

По такъв начин ние конструирахме свръхслабо компактно нормирано пространство с изброима координатна система и полунепрекъсната отдолу норма, в което полиномите на Гончаров са неразложими, и в това пространство ние обособихме позитивен конус.

Не е трудно да се види, че ако $f(x)$ е неразложима функция в G_+ и при някое n имаме $f^{(n)}(x_n) \neq 0$, то

$$(19) \qquad f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x_n) P_n(x).$$

И наистина равенството (1) ни дава едно разлагане на $f(x)$ на елементи от G_+, защото имаме очевидно

$$P_\nu(x) \varepsilon G_+ \quad \text{и} \quad R_n(x) \varepsilon G_+$$

Оттук заключаваме, че

$$\lambda f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x_n) P_n(x),$$

където $0 \leq \lambda < 1$. От друга страна

$$(-1)^n P_n^{(n)}(x_n) = 1$$

и следователно

$$\lambda = 1.$$

Във връзка с това възниква въпросът, дали освен полиномите на Гончаров и колинеарните с тях полиноми няма в G_+ (а следователно и в G) и други неразложими елементи $f(x)$, т. е. такива, които при всички цели положителни стойности на n удовлетворяват условията

(20) $$f^{(n)}(x_n)=0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Ние ще дадем едно функционално уравнение, което се удовлетворява от неразложимите елементи на G_+, подчинени на условието (20) (стига, разбира се, да има такива елементи).

И така, нека $f(x)$ е неразложим елемент на G_+, подчинен на условието (20). Разглеждаме функцията

$$g(x)=f(x-a)-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_\nu-a)P_\nu(x),$$

където $0<a<x_0-a$. Тази функция е добре дефинирана при $x>a+a$ Очевидно имаме

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\int_x^{x_0}dt_1\int_{t_1}^{x_1}dt_2\ldots\int_{t_n}^{x_n}(-1)^{n+1}f^{(n+1)}(t-a)dt$$

и следователно функцията $g(x)$ принадлежи на съвкупността G_+^a на онези функции $\theta(x)$, които са дефинирани, безбройно много пъти диференцуеми при $x>a+a$ и удовлетворяват условията

(21) $$(-1)^k\theta^{(k)}(x)\geq 0$$

при $a+a<x<x_k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Ще покажем, че $g(x)$ е неразложим елемент на G_+^a. И наистина нека $\varphi(x)$ е функция от G_+^a, за която имаме

$$(-1)^k\varphi^{(k)}(x)<(-1)^k g^{(k)}(x)$$

при $a+a<x<x_k$, $\qquad k=0, 1, 2, \ldots$

Разглеждаме функциите

$$\Phi_n(x)=\int_x^{\xi_{0n}}dt_1\int_{t_1}^{\xi_{1n}}dt_2\ldots\int_{t_n}^{\xi_{nn}}(-1)^{n+1}\varphi^{(n+1)}(t)dt$$

при $x>a+a$, където

$$\xi_{0n}=\min(x_0+a,\ x_n), \xi_{1n}=\min(x_1+a,\ x_n), \ldots$$

$$\xi_{nn}=\min(x_n+a,\ x_n)=x_n.$$

Очевидно имаме

$$\int_t^{\xi_{nn}}(-1)^{n+1}\varphi^{(n+1)}(s)ds=(-1)^n\varphi^{(n)}(t)-(-1)^n\varphi^{(n)}(x_n)=(-1)^n\varphi^{(n)}(t)$$

и следователно при $a+a<x<\xi_{k,n-1}$; $k\leq n-1$ намираме

$$(22)\qquad (-1)^k\Phi_n^{(k)}(x)=\int_x^{\xi_{kn}}dt_1\int_{t_1}^{\xi_{k+1\,n}}dt_2\ldots\int_{t_n}^{\xi_{nn}}(-1)^{n+1}\varphi^{(n+1)}(s)ds$$

$$=\int_x^{\xi_{kn}}dt_1\int_{t_1}^{\xi_{k+1\,n}}dt_2\ldots\int_{t_{n-1}}^{\xi_{n\,n-1}}(-1)^n\varphi^{(n)}(s)ds$$

$$\leq\int_x^{\xi_{k\,n-1}}dt_1\int_{t_1}^{\xi_{k+1\,n-1}}dt_2\ldots\int_{t_{n-1}}^{\xi_{n-1\,n-1}}(-1)^n\varphi^{(n)}(s)ds=(-1)^k\Phi_{n-1}^{(k)}(x).$$

От друга страна

$$(23)\qquad (-1)^k\Phi_n^{(k)}(x)\leq\int_x^{\xi_{kn}}dt_1\int_{t_1}^{\xi_{k+1\,n}}dt_2\ldots\int_{t_n}^{\xi_{nn}}(-1)^{n+1}f^{(n+1)}(t-a)dt$$

$$=(-1)^{k+1}\ f^{(k+1)}(x-a)$$

при $a+\alpha<x\leq\xi_{kn}$ и следователно редицата

$$(24)\qquad (-1)^k\Phi_1^{(k)}(x),\ (-1)^k\Phi_2^{(k)}(x),\ldots$$

е сходяща при $x>a+\alpha$ и сходимостта е равномерна във всеки краен и затворен подинтервал на отворения интервал $(a+\alpha,\ \infty)$. Полагаме

$$(25)\qquad \Phi(x)=\lim_{\nu\to\infty}\ \Phi_\nu(x).$$

Функцията $\Phi(x)$ очевидно е диференцуема при $x>a+\alpha$ безбройно много пъти. Като вземем под внимание, че при достатъчно големи стойности на n имаме $\xi_{kn}=x_k+\alpha$, заключаваме с помощта на равенството (22) и неравенството (23), че

$$0\leq(-1)^k\,\Phi^{(k)}(x+\alpha)\leq(-1)^kf^{(k)}(x)$$

при $a<x\leq x_k$ и следователно

$$\Phi(x+\alpha)=Cf(x),$$

където C е неотрицателна константа.

От друга страна виждаме, че

$$\varphi(x)=\Phi_n(x)+S_n(x),$$

където $S_n(x)$ е полином, чиято степен не надминава n. По такъв начин получаваме

$$(26)\qquad \varphi(x)=\Phi_n(x)-\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\Phi_n^{(\nu)}(x_\nu)P_\nu(x).$$

Тук очевидно имаме

$$a+\alpha<x_\nu\leq\xi_{\nu n}$$

и следователно

$$0\leq(-1)^\nu\Phi_n^{(\nu)}(x_\nu)\leq(-1)^\nu f^{(\nu)}(x_\nu-\alpha),\ \nu=0,1,\ldots n.$$

Като вземем под внимание, че редът

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-a)P_{\nu}(x)$$

е сходящ при $a+\alpha<x$ и членовете му не зависят от n, заключаваме, че в равенството (26) можем да извършим граничен преход, което ни дава

$$\varphi(x)=\Phi(x)-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\Phi^{(\nu)}(x_{\nu})P_{\nu}(x)$$

или още

$$\varphi(x)=C\left[f(x-a)-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-a)P_{\nu}(x)\right]=Cg(x).$$

С това показахме, че $g(x)$ е един неразложим елемент на G_{+}^{α}.

Сега вече не е трудно да се намери едно функционално уравнение, което се удовлетворява от неразложимите елементи $f(x)$ на G_{+}, подчинени на условието (20). За тази цел вземаме под внимание, че при $a+\alpha<x<x_k$ имаме

$$0\leq(-1)^{k}f^{(k)}(x)=\int_{x}^{x_k}dt_{k+1}\int_{t_{k+1}}^{x_{k+1}}dt_{k+2}\ldots\int_{t_n}^{x_n}(-1)^{n+1}f^{(n+1)}(t)dt$$

$$<\int_{x}^{x_k}dt_{k+1}\int_{t_{k+1}}^{x_{k+1}}dt_{k+2}\ldots\int_{t_n}^{x_n}(-1)^{n+1}f^{(n+1)}(t-a)dt$$

$$=(-1)^{k}\frac{d^{k}}{dx^{k}}\left[f(x-a)-\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-a)P_{\nu}(x)\right]$$

и следователно

$$0\leq(-1)^{k}f^{(k)}(x)$$

$$\leq(-1)^{k}\frac{d^{k}}{dx^{k}}\left[f(x-a)-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-a)P_{\nu}(x)\right]=(-1)^{k}g^{(k)}(x),$$

откъдето, понеже $g(x)$ е неразложим елемент на G_{+}^{α}, намираме

$$f(x)=A(a)g(x)$$

при $x>a+\alpha$, където $A(a)$ е неотрицателна константа, ненадминаваща 1, която може да зависи евентуално от a (но не и от x). Тази константа е сигурно различна от нула, защото $f(x)$ не се анулира тъждествено. Да положим

$$\frac{1}{A(a)}=C(a).$$

В такъв случай получаваме

$$C(\alpha)f(x)=f(x-\alpha)-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-\alpha)P_{\nu}(x), \tag{27}$$

като при това

$$C(\alpha)\quad 1.$$

Функцията $C(\alpha)$ **е диференцуема, понеже редът**

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(x_{\nu}-\alpha)P_{\nu}(x)$$

се мажорира при $0<\alpha<\delta<x_0-a$ от сходящия ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(x_{\nu}-\delta)P_{\nu}(x),$$

членовете на който не зависят от α. От друга страна, ако изберем γ така, че да имаме $0<\gamma<x_0-a$, то при $0<\alpha<\frac{\gamma}{2}$, $0<\beta<\frac{\gamma}{2}$ и $x>a+\gamma$ ще получим

$$\begin{aligned} f(x-\alpha-\beta)&=C(\beta)f(x-\alpha)-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-\beta)P_{\nu}(x-\alpha)\\ &=C(\beta)C(\alpha)f(x)-C(\beta)\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-\alpha)P_{\nu}(x)\\ &\quad-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-\beta)P_{\nu}(x-\alpha). \end{aligned}$$

Като вземем под внимание, че

$$f(x-\alpha-\beta)=C(\alpha+\beta)f(x)-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-\alpha-\beta)P_{\nu}(x),$$

получаваме

$$\begin{aligned} [C(\alpha+\beta)-C(\alpha)C(\beta)]f(x)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-\alpha-\beta)P_{\nu}(x)\\ &-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-\beta)P_{\nu}(x-\alpha)-C(\beta)\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-\alpha)P_{\nu}(x). \end{aligned}$$

Диференцираме по α **и оставяме след това** α **да клони към нула. Това ни дава**

$$\begin{aligned} [C'(\beta)-\lambda C(\beta)]f(x)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(x_{\nu}-\beta)P_{\nu}(x)\\ &+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x_{\nu}-\beta)P'_{\nu}(x)-C(\beta)\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(x_{\nu})P_{\nu}(x), \end{aligned}$$

където $\lambda=\lim\limits_{\alpha\to 0}C'(\alpha)$.

От друга страна всяка функция, която е развиваема в ред от вида

$$\psi(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P'_\nu(x), \qquad a_\nu \geqq 0,$$

при $x > c$, където $c < x_0$ е развиваема и в ред от вида

$$\psi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu P_\nu(x) \qquad b_\nu \geqq 0,$$

както това се вижда от неравенството

$$0 < \int_x^{x_k} dt_{k+1} \int_{t_{k+1}}^{x_{k+1}} dt_{k+2} \dots \int_{t_n}^{x_n} (-1)^{n+1} \psi^{(n+1)}(t) dt$$

$$\int_x^{x_{k+1}} dt_{k+1} \int_{t_{k+1}}^{x_{k+2}} dt_{k+2} \dots \int_{t_n}^{x_{n+1}} (-1)^{n+1} \psi^{(n+1)}(t) dt$$

между съответните остатъчни членове.

От изложеното е ясно, че функцията

$$[C'(\beta) - \lambda C(\beta)] f(x)$$

е развиваема в ред по полиномите на Гончаров $P_\nu(x)$ и следователно се анулира тъждествено, защото при всички цели неотрицателни стойности на n имаме

$$f^{(n)}(x_n) = 0.$$

Като вземем под внимание, че $f(x)$ не се анулира тъждествено, получаваме

$$C'(\beta) = \lambda C(\beta)$$

и следователно

$$C(\beta) = B\, e^{\lambda\beta},$$

където B е константа. Очевидно $B = 1$ и $\lambda \geq 0$, защото

$$\lim_{\beta \to 0} C(\beta) = 1 \quad \text{и} \quad C(\beta) \geq 1.$$

По такъв начин получаваме следното функционално уравнение, което удовлетворяват неразложимите функции $f(x)$ от G_+ при условие (20):

$$(28) \qquad f(x-\alpha) = e^{\lambda\alpha} f(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu f^{(\nu)}(x_\nu - \alpha) P_\nu(x),$$

където $\lambda \geqq 0$, $x > a + \alpha$, $0 < \alpha < x_0 - a$.

Така полученото уравнение (28) представлява очевидно развитие на функцията $f(x-\alpha)$ по неразложимите функции

$$(29) \qquad f(x),\ P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x), \dots$$

Като диференцираме (28) по a и оставим a да клони към нула, получаваме окончателно

$$-f'(x)=\lambda f(x)+\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu+1}f^{(\nu+1)}(x_\nu)P_\nu(x) \tag{30}$$

при $x>a$, което е едно развитие на $f'(x)$ по неразложимите елементи (29).

Постъпила на 7. 7. 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Тагамлицки. Върху едно обобщение на понятието за неразложимост, Год. на Соф. унив., физ.-мат. фак., т. 48, кн. 1, ч. I, 1954, стр. 69—83.

ОБ ОДНОЙ КОТЕГОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РЯДОВ ГОНЧАРОВА И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ПРОСТРАНСТВАХ И КОНУСАХ

Я. А. Тагамлицкий

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе строится нормированное пространство, в котором интерполяционные многочлены Гончарова с неубывающими узлами неразложимы. Пространство это обладает счетной координатной системой, относительно которой оно компактно и норма полунепрерывна снизу, т. е. выполнены условия, при которых доказана теорема автора о конусах.[1] В пространстве определяется конус положительных элементов и устанавливаются его основные свойства. В заключение выводится функциональное уравнение нетривиальных неразложимых элементов.

[1] Я. Тагамлицки. Год. Соф. ун., т. 48, кн. 1, ч. 1, 1954, стр. 69—83.

ÜBER DIE MIT GEWISSEN INTERPOLATIONSREIHEN VON GONTSCHAROFF ZUSAMMENHÄNGENDEN RÄUME UND KEGEL

Y. Tagamlitzki

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein normierter mit abzählbarem Koordinatensystem versehener Raum gebildet, in dem die Polynome von Gontscharoff als irreduzible Elemente erscheinen. Der Raum ist kompakt und die Norm halostetig, also sind die wesentlichsten Voraussetzungen des Kegelsatzes des Verfassers[1] erfüllt. Weiter wird ein positiver Kegel des Raumes definiert und eine Funktionalgleichung der transzendenten irreduziblen Elemente hergeleitet.

[1] Y. Tagamlitzki, Ann. de l'Univers. de Sofia, Bd. 48, Teil I, 1954, S. 69—83.