РЕЛАТИВНИ ПЕРИОДИЧНИ И АСИМПТОТИЧНИ ДВИЖЕНИЯ НА n-КРАТНО ФИЗИЧНО МАХАЛО В ЕДНА РАВНИНА, ПОДЛОЖЕНА НА РОТАЦИЯ С ПОСТОЯННА СКОРОСТ

Г. Брадистилов и Г. Бояджиев

В работа [1] Г. Брадистилов доказа съществуването на фамилии периодични и асимптотични движения на една система от n-последователно свързани физични махала, от които p са насочени надолу, а q — нагоре, в околността на равновесното положение.

В [2], като използуваме метода в [1], изучихме въпроса за релативните периодични движения на n-кратно физично махало около стабилното равновесно положение, когато равнината, в която лежи махалото, е подложена на ротация с постоянна скорост ω. Частният случай за една система от n пръчки с равни дължини и еднакви маси около стабилното равновесно положение е разглеждан от С. Манолов [3].

В настоящата работа разглеждаме по-общия въпрос за периодични и асимптотични движения на n-кратно физично махало, разположено във вертикална равнина, подложена на ротация с постоянна ъглова скорост ω.

§ 1. Периодични и асимптотични движения

Нека правоъгълната координатна система $O'XYZ$ се върти с постоянна ъглова скорост ω около оста $O'Z$, като $O'Z$ е насочена надолу. Системата от n физични махала, от които p са насочени надолу, а q — нагоре, е разположена в равнината Oxz, перпендикулярна на оста OY на разстояние $O'O=r$ и с координатни оси Ox и Oy, успоредни съответно на $O'X$ и $O'Z$. Номерата на насочените надолу махала са означени с r_p, а на тези, насочени нагоре, с r_q, където r_p и r_q взимат съответно p и q на брой стойности.

Махалата се въртят около хоризонтални оси, успоредни на Oy, и то така, че първото махало се върти около неподвижната ос O, второто около оста O_1 от първото махало и т. н., т. е. ν-тото махало е закачено на оста $O_{\nu-1}$ от $\nu-1$-вото махало. Центровете на тежестта на махалата $S_1, S_2, \ldots, S_n$ лежат съответно върху правите OO_1, O_1O_2 и т. н., и то така, че кое да е O_ν да не лежи между S_ν и $O_{\nu-1}$ и освен това $S_\nu O_\nu$ е главна инерчна ос на ν-тото махало.

Да означим с x_ν и z_ν координатите на центъра на тежестта S_ν на ν-тото махало с маса m_ν, с $a_\nu = \overline{O_{\nu-1}S_\nu}$, $b_\nu = \overline{O_{\nu-1}O_\nu}$, с φ_ν ъгъла между посоката $\overrightarrow{O_{\nu-1}S_\nu}$ и положителната посока на оста O_z, с I_ν инерчния момент на ν-тото махало спрямо S_ν, с I_ν' инерчния момент спрямо оста $S_\nu O_\nu$ и с I_ν'' инерчния момент на същото махало спрямо оста, лежаща в Oxz, минаваща през S_ν и перпендикулярна на $S_\nu O_\nu$ $(I_\nu = I_\nu' + I_\nu'')$.

Тогава координатите на центъра на тежестта се дават с изразите

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} x_\nu = a_\nu \sin\varphi_\nu + \sum\limits_{k=1}^{\nu-1} b_k \sin\varphi_k, \\ y_\nu = a_\nu \cos\varphi_\nu + \sum\limits_{k=1}^{\nu-1} b_k \cos\varphi_k. \end{cases} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)
$$

Като положим както в (1)

$$
A_\nu = a_\nu^2 m_\nu + b_\nu^2 \sum_{k=\nu+1}^{n} m_k, \qquad B_\nu = a_\nu m_\nu + b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} m_k \qquad (\nu = 1, \ldots, n),
$$

то кинетичната енергия на системата махала спрямо координатната система Oxz, разглеждана като постоянна, е формула (3) от [1]:

$$
(1.2) \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \left[2 B_\nu \varphi_\nu' \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \varphi'_k + (A_\nu + I_\nu) \varphi_\nu'^2 \right].
$$

Като вземем предвид работата на инерчните сили и на тежестта, за потенциалната енергия получаваме

$$
(1.3) \qquad \begin{aligned} U = -g \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \cos\varphi_\nu - \frac{\omega^2}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \Bigg[& r^2 m_\nu + I_\nu' \cos^2\varphi_\nu + I_\nu'' \sin^2\varphi_\nu + a_\nu^2 m_\nu \sin^2\varphi_\nu + \\ & + 2 a_\nu m_\nu \sin\varphi_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \sin\varphi_k + m_\nu \left(\sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \sin\varphi_k \right)^2 \Bigg]. \end{aligned}
$$

Уравненията на Лагранж, приложени за (2) и (3), ни дават системата диференциални уравнения на релативно движение на n-кратното махало

$$
(1.4) \qquad \begin{aligned} & B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k) \varphi_k'^2] + (A_\nu + I_\nu) \varphi_\nu'' + \\ & + b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k [\cos(\varphi_\nu - \varphi_k) \varphi_k'' + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k) \varphi_k'^2] = -g B_\nu \sin\varphi_\nu + \\ & + \omega^2 [(A_\nu + I_\nu'' - I_\nu') \sin\varphi_\nu \cos\varphi_\nu + B_\nu \cos\varphi_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \sin\varphi_k + \\ & + b_\nu \cos\varphi_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k \sin\varphi_k] \\ & (\nu = 1, \ldots, n). \end{aligned}
$$

Уравненията (1.4) не се изменят, ако заместим φ_ν $(\nu=1,\ldots,n)$ и t съответно с $-\varphi_\nu$ и $2\Omega-t$, където Ω е една произволна константа. Оттук следва, че ако $\varphi_\nu(t)$ $(\nu=1,\ldots,n)$ е решение на системата (1.4), то също и $-\varphi_\nu(2\Omega-t)$ $(\nu=1,\ldots,n)$ е решение на тази система. Като вземем предвид това свойство на (1.4) и забележката в [1], § 1, можем да заключим, че ако при своето движение n-кратното махало мине два пъти през вертикалното положение, то движението е периодично, т. е. ако системата диференциални уравнения (1.4) допуща решение $\varphi_\nu(t)$, което удовлетворява на условията

$$\varphi_\nu(0)=0, \quad \varphi_\nu(\Omega)=0 \qquad (\nu=1,\ldots,n),$$

то това решение е периодично с период 2Ω.

За установяване на периодичните и асимптотични решения полагаме в (1.4)

$$\varphi_{r_p}=\lambda\psi_{r_p}, \quad \varphi_{r_q}=\pi+\lambda\psi_{r_q}$$

и получаваме

$$(1.5)\quad \varepsilon_\nu B_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1}\varepsilon_k b_k[\cos\lambda(\psi_\nu-\psi_k)\psi_k''+\lambda\sin\lambda(\psi_\nu-\psi_k)\psi_k'^2]+(A_\nu+I_\nu)\psi_\nu''+$$
$$+\varepsilon_\nu b_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}\varepsilon_k B_k[\cos\lambda(\psi_\nu-\psi_k)\psi_k''+\lambda\sin\lambda(\psi_\nu-\psi_k)\psi_k'^2]=$$
$$=-\varepsilon_\nu gB_\nu\sin\lambda\psi_\nu+\omega^2[(A_\nu+I_\nu''-I_\nu')\sin\lambda\psi_\nu\cos\lambda\psi_\nu+$$
$$+\varepsilon_\nu B_\nu\cos\lambda\psi_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1}\varepsilon_k b_k\sin\lambda\psi_k+\varepsilon_\nu b_\nu\cos\lambda\psi_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}\varepsilon_k B_k\sin\lambda\psi_k],$$

където $\varepsilon_{r_p}=+1$, $\varepsilon_{r_q}=-1$.

При $\lambda=0$ системата (1.5) се редуцира в пораждащата

$$(1.6)\quad \varepsilon_\nu B_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1}\varepsilon_k b_k\psi_k''+(A_\nu+I_\nu)\psi_\nu''+\varepsilon_\nu b_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}\varepsilon_k B_k\psi_k''=-g\varepsilon_\nu B_\nu\psi_\nu+$$
$$+\omega^2[(A_\nu+I_\nu''-I_\nu')\psi_\nu+\varepsilon_\nu B_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1}\varepsilon_k b_k\psi_k+\varepsilon_\nu b_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}\varepsilon_k B_k\psi_k]$$
$$(\nu=1,\ldots,n).$$

Характеристичното уравнение на (1.6), след като умножим съответно редовете и стълбовете с $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, приема вида

$$(1.7)\quad \begin{vmatrix} H_1 & (\varrho^2-\omega^2)b_1B_2 & \cdot & \cdot & (\varrho^2-\omega^2)b_1B_n \\ (\varrho^2-\omega^2)b_1B_2 & H_2 & & \cdot & (\varrho^2-\omega^2)b_2B_n \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ (\varrho^2-\omega^2)b_1B_n & (\varrho^2-\omega^2)b_2B_n & & & H_n \end{vmatrix}=0$$

където

$$H_\nu=(A_\nu+I_\nu)\varrho^2+g\varepsilon_\nu B_\nu-\omega^2(A_\nu+I_\nu''-I_\nu') \qquad (\nu=1,\ldots,n).$$

Полагаме $\varrho^2-\omega^2=\frac{g}{u}$ и получаваме

$$(1.8)\qquad \Delta_n(u)=\begin{vmatrix} A_1+I_1+K_1u & b_1B_2 & b_1B_n \\ b_1B_2 & A_2+I_2+K_2u & \ldots b_2B_n \\ b_1B_n & b_2B_n & A_n+I_n+K_nu \end{vmatrix}=0$$

където

$$K_\nu=\varepsilon_\nu' B_\nu+\frac{2I_\nu'}{g}\,\omega^2 \qquad (\nu=1,\ldots,n).$$

Ако приемем, че s на брой от изразите K_ν са положителни, а $n-s$ — отрицателни, тогава от (4) следва, че уравнението (1.8) има само реални корени, от които s отрицателни и $n-s$ положителни.

Ясно е, че $s\ \ p$, а $n-s\leq q$. Да приемем, че

$$(1.9)\qquad \omega^2<\frac{B_{r_q}g}{2I'_{r_q}}$$

Тогава уравнението (1.8) притежава p на брой отрицателни и q на брой положителни корени. Напротив, ако

$$(1.10)\qquad \omega^2>\frac{B_{r_q}g}{2I_{r_q}},$$

то всички корени на (1.8) са отрицателни и нито един положителен. Понеже $\varrho^2=\omega^2+\frac{g}{u}$, то характеристичното уравнение (1.7) при условие (1.9) притежава p чифта чисто имагинерни корени.

$$\pm i\varrho_k=\pm\sqrt{\omega^2+\frac{g}{u_k}} \qquad (k=1,\ldots,p)$$

и q отрицателни корени

$$\varrho_k=-\xi_k=-\sqrt{\omega^2+\frac{g}{u_k}} \qquad (k=p+1,\ldots,n),$$

щом

$$(1.11)\qquad \omega^2<-\frac{g}{u_1},$$

където u_1 е най-малкият корен на $\Delta_n(u)=0$.

По аналогичен начин както в [1] може да се докаже, че на чисто имагинерните корени $\pm i\varrho_k$, ако никой корен не е кратен на $i\varrho_k$ $(k=1,\ldots,p)$, съответствуват p фамилии релативни периодични движения в околността на лабилното равновесно положение. На отрицателните корени $\varrho_k=-\xi_k$ $(k=p+1,\ldots,n)$ отговаря една фамилия асимптотични движения, зависеща от q константи.

И тук както при n-кратното физично махало [4], лежащо в равнина, която не е подложена на ротация, се получава аналогичния интересен резултат: Ако q махала са насочени нагоре, то щом са изпълнени условията (1.9) или (1.10), n-кратното физично махало при релативното му движение загубва q фамилии периодични движения, като в замяна се явява една фамилия асимптотични движения, зависеща от q параметра.

Нека сега разгледаме едно n-кратно математично махало, което се получава от системата физични махала, като положим $l_\nu = l_\nu' = l_\nu'' = 0$, $a_\nu = b_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Тогава от (1.8) получаваме

$$(1.12) \qquad \Delta_n(u) = \begin{vmatrix} M_1(a_1+\varepsilon_1 u) & M_2 a_2 & M_n a_n \\ M_2 a_1 & M_2(a_2+\varepsilon_2 u) . & M_n a_n \\ \\ M_n a_1 & M_n a_2 \ldots M_n(a_n+\varepsilon_n u) \end{vmatrix} = 0.$$

Това уравнение има p на брой отрицателни и q на брой положителни корени. Корените u_k $(k=1,\ldots, n)$ на (1.12) не зависят от ω.

Понеже $\varrho^2 - \omega^2 = \frac{g}{u}$, то характеристичното уравнение на n-кратното математично махало притежава p чифта чисто имагинерни корени

$$\pm i \varrho_k = \pm\sqrt{\omega^2 + \frac{g}{u_k}} \qquad (k=1,\ldots, p)$$

и q отрицателни корени

$$\varrho_k = -\xi_k = -\sqrt{\omega^2 + \frac{g}{u_k}} \qquad (k=p+1, \ldots, n),$$

щом

$$(1.13) \qquad \omega^2 < -\frac{g}{u_1},$$

където u_1 е най-малкият корен на $\Delta_n(u)=0$. В този случай въз основа на [1] изобщо ще имаме p на брой фамилии периодични движения и една фамилия асимптотични движения. Следователно, щом (1.13) е изпълнено, броят на периодичните и асимптотични решения е същият, както при нерелативните движения на n-кратното махало.

Ако

$$(1.14) \qquad \omega^2 > -\frac{g}{u_p},$$

където u_p е най-големият отрицателен корен, характеристичното уравнение притежава само реални корени, от които n на брой отрицателни. В този случай ще имаме само асимптотични решения. Следователно, щом ъгловата скорост е достатъчно голяма, загубват се p на брой периодични решения, въпреки че p махала са насочени надолу.

Съответни резултати ще се получат, ако ъгловата скорост удовлетворява на условия, междинни на (1.13) и (1.14).

§ 2. Двойно математично махало

Един подробен анализ ще дадем за двойното математично махало.

Характеристичното му уравнение

$$(2.1)\qquad \begin{vmatrix} M_1[a_1(\varrho^2-\omega^2)+\varepsilon_1 g] & M_2 a_2(\varrho^2-\omega^2) \\ M_2 a_1(\varrho^2-\omega^2) & M_2[a_2(\varrho^2-\omega^2)+\varepsilon_2 g] \end{vmatrix}=0$$

чрез субституцията $\varrho^2-\omega^2=\frac{g}{u}$ приема вида

$$(2.2)\qquad \Delta_2(u)=\begin{vmatrix} M_1(a_1+\varepsilon_1 u) & M_2 a_2 \\ M_2 a_1 & M_2(a_2+\varepsilon_2 u) \end{vmatrix}=0$$

(частен случай от (1.12) при $n=2$).

Корените на $\Delta_2(u)=0$ са

$$(2.3)\qquad u_{1,2}=-\frac{\varepsilon_2 a_1+\varepsilon_1 a_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}\mp\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_2 a_1+\varepsilon_1 a_2}{2}\right)^2-\frac{m_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2 M_1}a_1 a_2}\,.$$

I. Двете махала насочени надолу

Този случай съществува, когато $\varepsilon_1=+1$, $\varepsilon_2=+1$. Тогава уравнението (2.2) притежава два отрицателни корени

$$u_{1,2}=-\frac{a_1+a_2}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2-\frac{m_1}{M_1}a_1 a_2}\,.$$

Възможни са следните три подслучая:

а) $\omega^2<-\frac{g}{u_1}$.

Характеристичното уравнение (2.1) притежава два чифта чисто имагинерни корени. Следователно в околността на равновесното положение двойното махало има две фамилии периодични решения.

б) $-\frac{g}{u_1}<\omega^2<-\frac{g}{u_2}$.

Характеристичното уравнение притежава един чифт чисто имагинерни корени и един реален отрицателен корен. В този случай се загубва една фамилия периодични решения, а в замяна се появява една фамилия асимптотични решения, зависеща от един параметър, и равновесното положение е лабилно.

в) $\omega^2>-\frac{g}{u_2}$

Характеристичното уравнение притежава два реални отрицателни корени, което показва, че се загубват и двете фамилии периодични движения, а вместо тях се появява една фамилия асимптотични решения, зависеща от два параметра.

II. Първото махало насочено надолу, второто нагоре

Тук $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$. Уравнението (2.2) притежава един отрицателен и един положителен корен

$$u_{1,2} = -\frac{a_2 - a_1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{M_1} a_1 a_2}.$$

Имаме следните два подслучая:

а) $\omega^2 < -\frac{g}{u_1}$.

На чифта чисто имагинерни корени на характеристичното уравнение (2.1) отговаря една фамилия периодични движения, а на реалния отрицателен корен — една фамилия асимптотични движения, зависеща от един параметър.

б) $\omega^2 > -\frac{g}{u_1}$.

Характеристичното уравнение притежава два реални отрицателни корени, на които отговаря само една фамилия асимптотични движения, която зависи от два параметра.

III. Първото махало насочено нагоре, второто надолу

Тогава $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = +1$ и уравнението (2.2) също притежава един отрицателен и един положителен корен

$$u_{1,2} = -\frac{a_1 - a_2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \frac{m_1}{M_1} a_1 a_2}.$$

Съществуват следните два подслучая:

а) $\omega^2 < -\frac{g}{u_1}$.

Двойното махало притежава една фамилия периодични движения и една фамилия асимптотични движения, зависеща от един параметър.

б) $\omega^2 > -\frac{g}{u_1}$.

Съществува само една фамилия асимптотични движения, зависеща от два параметра.

IV. Двете махала насочени нагоре

При този случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$. Уравнението (2.2) има два положителни корени

$$u_{1,2}=\frac{a_1+a_2}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2-\frac{m_1}{M_1}a_1a_2},$$

което показва, че характеристичното уравнение (2.1) притежава два реални отрицателни корени, на които отговаря една фамилия асимптотични движения, зависеща от два параметра.

§ 3. Двойно физично махало

Тук ще се спрем на периодичните и асимптотични движения на двойното физично махало, на което характеристичното уравнение

$$(3.1)\quad \begin{vmatrix}(A_1+I_1)\varrho^2+g\varepsilon_1B_1-\omega^2(A_1+I_1''-I_1') & (\varrho^2-\omega^2)b_1B_2\\ (\varrho^2-\omega^2)b_1B_2 & (A_2+I_2)\varrho^2+g\varepsilon_2B_2-\omega^2(A_2+I_2''-I_2')\end{vmatrix}=0$$

се получава от (1.7) при $n=2$. Чрез субституцията $\varrho^2-\omega^2=-\frac{g}{u}$ получаваме уравнението

$$(3.2)\qquad \Delta_2(u)=\begin{vmatrix}A_1+I_1+(\varepsilon_1B_1+\frac{2I_1'}{g}\omega^2)u & b_1B_2\\ b_1B_2 & A_2+I_2+(\varepsilon_2B_2+\frac{2I_2'}{g}\omega^2)u\end{vmatrix}=0,$$

корените на което за разлика от случая при математично махало зависят от ω.

За целта на по-нататъшното изследване ще бъде необходимо да изучим корените на уравнението

$$(3.3)\qquad \Delta_2\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)=\begin{vmatrix}A_1+I_1''-I_1'-\varepsilon_1B_1\frac{g}{\omega^2} & b_1B_2\\ b_1B_2 & A_2+I_2''-I_2'-\varepsilon_2B_2\frac{g}{\omega_2}\end{vmatrix}=0$$

по отношение на $-\frac{g}{\omega^2}$.

Развитият вид на уравнението (3.3) е

$$\Delta_2\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)=\varepsilon_1\varepsilon_2B_1B_2\frac{g^2}{\omega^4}-\left[(A_1+I_1''-I_1')\varepsilon_2B_2+(A_2+I_2''-I_2')\varepsilon_1B_1\right]\frac{g}{\omega^2}+$$
$$+(A_1+I_1''-I_1')(A_2+I_2''-I_2')-b_1^2B_2^2=0,$$

на което корените са

$$(3.4)\quad \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_{1,2}=\frac{-(a_1\varepsilon_2B_2+a_2\varepsilon_1B_1)\mp\sqrt{(a_1\varepsilon_2B_1-a_2\varepsilon_1B_1)^2+4\varepsilon_1\varepsilon_2B_1b_1^2B_2^3}}{2\varepsilon_1\varepsilon_2B_1B_2}$$

където

$$a_i=A_i+I_i''-I_i'\qquad (i=1,2)$$

Ако изразът

$$(3.5)\qquad \delta=(a_1\varepsilon_2B_2-a_2\varepsilon_1B_1)^2+4\varepsilon_1\varepsilon_2B_1b_1^2B_2^3$$

е положителен или равен на нула, то корените на (3.3) са реални, ако този израз е отрицателен, корените са комплексни.

И тук както при двойното математично махало са възможни четири случая според това, дали махалата са насочени надолу, или нагоре. За илюстрация ще разгледаме само един случай — когато първото махало е насочено надолу, а второто нагоре. Останалите случаи се третират аналогично.

При нашия случай $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$ и уравнението (3.2) приема вида

$$\text{(3.6)} \qquad \Delta_2(u) = \begin{vmatrix} A_1 + I_1 + (B_1 + \frac{2I_1'}{g}\omega^2)u & b_1B_2 \\ b_1B_2 & A_2 + I_2 + (-B_2 + \frac{2I_2'}{g}\omega^2)u \end{vmatrix} = 0,$$

а уравнението (3.3) се обръща в

$$\Delta_2\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) = \begin{vmatrix} A_1 + I_1'' - I_1' - B_1\frac{g}{\omega^2} & b_1B_2 \\ b_1B_2 & A_2 + I_2'' - I_2' + B_2\frac{g}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

на което корените са

$$\text{(3.7)} \qquad \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_{1,2} = \frac{a_1B_2 - a_2B_1 \mp \sqrt{(a_1B_2 + a_2B_1)^2 - 4B_1b_1^2B_2^3}}{-2B_1B_2}.$$

В случай че са реални, приемаме, че

$$\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 \leq \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2.$$

Изразът (3.5) за δ приема вида

$$\text{(3.8)} \qquad \delta = (a_1B_2 + a_2B_1)^2 - 4B_1b_1^2B_2^3.$$

В зависимост от това, дали е изпълнено условието (1.9), или (1.10), различаваме два случая.

1. $\omega^2 < \frac{B_2 g}{2I_2'}$.

Корените на уравнението (3.6) се отделят както следва

$$u_1 < 0 < u_2.$$

Тук имаме следните два подслучая:

а) $\omega^2 < -\frac{g}{u_1}$

Понеже $\Delta_2(-\infty) < 0$ и $\Delta_2(0) > 0$, този подслучай съществува, ако е изпълнено условието

$$\text{(3.9)} \qquad \Delta_2\left(-\frac{g}{\omega_2}\right) < 0.$$

Когато $\delta > 0$, $\Delta_2\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)=0$ притежава два различни реални корени. Тъй като

$$\Delta_2\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) = -B_1B_2\left[-\frac{g}{\omega^2}-\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1\right]\left[-\frac{g}{\omega^2}-\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2\right],$$

то условието (3.9) е равносилно

1° на $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 > 0$.

2° на $-\frac{g}{\omega^2} < \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1$ при $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 < 0$.

3° на $-\frac{g}{\omega^2} > \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2$ при $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2 < 0$.

Когато $\delta = 0$, то $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 = \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2$ и условието (3.9) е изпълнено за всички стойности на $-\frac{g}{\omega^2}$, различни от $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1$.

Когато $\delta < 0$, условието (3.9) е изпълнено за всички стойности на $-\frac{g}{\omega^2}$.

И така, щом $\omega^2 < -\frac{g}{u_1}$, характеристичното уравнение притежава един чифт чисто имагинерни корени и един реален отрицателен корен. На чифта чисто имагинерни корени отговаря една фамилия периодични движения, а на реалния отрицателен корен една фамилия асимптотични движения, зависеща от един параметър.

б) $\omega^2 > -\frac{g}{u_1}$.

За да съществува този подслучай, трябва

$$\Delta_2\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) > 0. \tag{3.10}$$

Когато $\delta > 0$, условието (3.10) е равносилно:

1° на $-\frac{g}{\omega^2} > \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1$ при $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 < 0$ и $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) > 0$.

2° на $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 < -\frac{g}{\omega^2} < \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2$ при $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2 < 0$.

Когато $\delta \leq 0$, условието (3.10) е невъзможно.

Тогава характеристичното уравнение притежава два реални отрицателни корени, на които отговаря фамилия асимптотични движения, зависеща от два параметра.

2. $\omega^2 > \frac{B_2 g}{2I_2'}$.

Ако положим

$$\Delta_1(u) = A_2 + I_2 + \left(-B_2 + \frac{2I_2'}{g}\omega^2\right)u,$$

то коренът $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_{11}$ на уравнението $\Delta_1\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) = 0$ е

$$\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_{11} = \frac{A_2 + I_2'' - I_2'}{B_2}.$$

Тъй като

$$\Delta_2\left[\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_{11}\right] = -b_1^2 B_2^2 < 0$$

и корените на $\Delta_2(u) = 0$ са отрицателни, то следва отделянето

$$u_1 < \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_{11} < u_2 < 0.$$

Съществуват следните три подслучая:

а) $\omega^2 < -\frac{g}{u_1}$.

За да имаме този подслучай, трябва

(3.11) $$\Delta_2\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) > 0, \quad \Delta_1\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) < 0.$$

Когато $\delta > 0$, то горното условие е равносилно

1° на $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 < -\frac{g}{\omega^2} < \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2$, ако $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2 < 0$

и $A_2 + I_2'' - I_2' + \frac{B_2 g}{\omega^2} < 0$.

2° на $-\frac{g}{\omega^2} > \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1$, ако $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 < 0$ и $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2 > 0$.

При $\delta \leqq 0$, условието (3.11) е невъзможно.

Тогава характеристичното уравнение притежава два чифта чисто имагинерни корени, на които отговарят две фамилии периодични движения.

б) $-\frac{g}{u_1} < \omega^2 < -\frac{g}{u_2}$.

За да съществува този случай, трябва

(3.12) $$\Delta_2\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) < 0.$$

Когато $\delta > 0$, то условието (3.12) е равносилно

1° на $-\frac{g}{\omega^2} < \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1$ при $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 < 0$.

2^0 на $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 > 0.$

3^0 на $-\frac{g}{\omega^2} > \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2$ при $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2 < 0.$

Когато $\delta = 0$, то $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 = \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2$ и условието (3.12) е изпълнено за всички стойности на $-\frac{g}{\omega^2}$ различни от $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1$.

Когато $\delta < 0$, горното условие е изпълнено за всички стойности на $-\frac{g}{\omega^2}$.

Характеристичното уравнение притежава един чифт чисто имагинерни корени, на които отговаря фамилия периодични движения и един реален отрицателен корен, на който отговаря фамилия асимптотични движения, зависеща от един параметър.

в) $\omega^2 > -\frac{g}{u_2}$.

За да съществува този подслучай, трябва да бъдат изпълнени условията

$$\Delta_2\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) > 0, \quad \Delta_1\left(-\frac{g}{\omega^2}\right) > 0. \tag{3.13}$$

Когато $\delta > 0$, условията (3.13) са равносилни:

1^0 на $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 < -\frac{g}{\omega^2} < \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2$, ако $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2 < 0$

$$\text{и } A_2 + I_2'' - I_2' + \frac{B_2 g}{\omega^2} > 0.$$

2^0 на $-\frac{g}{\omega^2} > \left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1$, ако $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_1 < 0$, а $\left(-\frac{g}{\omega^2}\right)_2 > 0.$

Когато $\delta < 0$, условието (3.13) е невъзможно.

Характеристичното уравнение притежава два реални отрицателни корени, на които отговаря една фамилия асимптотични движения, зависеща от два параметра.

Постъпила на 19. 7. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. G Bradistilov. Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene, Math. Ann., Bd. 116 (1938), 2.
2. Г. Брадистилов и Г. Бояджиев. Върху периодичните движения на n-кратно физично махало в една равнина, подложена на ротация с постоянна скорост. Годишник на Машинно-електротехническия институт, т. III, кн. 1.
3. С. Манолов. О существовании малых периодических движений вокруг положения относительного устойчивого равновесия одной механической системы, Прикладная математика и механика, т. XIX (1955), 4.
4. G. Bradistilov. Sur les solutions périodiques et asymptotiques du mouvement autour de l'état d'équilibre d'un système de n-pendules physiques successivement liés dans un plan. Compt. Rend. de l'Acad. Bulg. des Sci., T. 8 (1955), 4.

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ n-КРАТНОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В ПЛОСКОСТИ, КОТОРАЯ ВРАЩАЕТСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Г. Брадистилов и Г. Бояджиев

РЕЗЮМЕ

В работе [1] Г. Брадистилов доказал существование семейств периодических и асимптотических движений системы n последовательно соединенных маятников, из которых p направлены вверх, а q вниз, в окрестности положения равновесия.

В настоящей работе рассматриваем вопрос о периодических и асимптотических движениях n-кратного физического маятника, расположенного в вертикальной плоскости, которая вращается с постоянной скоростью ω.

Найдя выражения для кинетической и потенциальной энергии системы физических маятников, с помощью уравнении Лагранжа мы получаем дифференциальные уравнения релятивного движения этой системы

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k [\cos(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k''+\sin(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k'^2]+(A_\nu+I_\nu)\varphi_\nu''+ \\
& +b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k [\cos(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k''+\sin(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k'^2] = -gB_\nu \sin\varphi_\nu + \\
& +\omega^2 [(A_\nu+I_\nu''-I_\nu')\sin\varphi_\nu\cos\varphi_\nu + B_\nu\cos\varphi_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \sin\varphi_k + \\
& +b_\nu \cos\varphi_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k \sin\varphi_k] \\
& (\nu=1,\ldots,n)
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание замечание [1], § 1, аналогичным способом убеждаемся в том, что система (1) допускает периодическое решение, если при своем движении n-кратный маятник два раза проходит через вертикальное положение.

Для установления периодических и асимптотических движений полагаем в (1) $\varphi_{r_q}=\lambda\psi_{r_p}$ и $\varphi_{r_q}=\pi+\lambda\psi'_{r_q}$. Развивая $\sin\lambda\psi_\nu$ и $\cos\lambda\psi_\nu$ в

правой стороне (1) в безконечные ряды, сокращая на λ и полагая $\lambda=0$, получаем порождающую систему

$$\text{(2)}\qquad \varepsilon_\nu B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} \varepsilon_k b_k \psi_k'' + (A_\nu + I_\nu)\psi_\nu'' + \varepsilon_\nu b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} \varepsilon_k B_k \psi_k'' = -g\varepsilon_\nu B_\nu \psi_\nu +$$
$$+\omega^2 [(A_\nu + I_\nu'' - I_\nu')\psi_\nu + \varepsilon_\nu B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} \varepsilon_k b_k \psi_k + \varepsilon_\nu b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} \varepsilon_k B_k \varphi_k],$$

где $\varepsilon_{r_p} = +1$, $\varepsilon_{r_q} = -1$.

После того как положим $\varrho^2 - \omega^2 = \frac{g}{u}$, характеристическое уравнение (2) принимает вид

$$\text{(3)}\quad \Delta_n(u) = \begin{vmatrix} A_1 + I_1 + K_1 u & b_1 B_2 \ . & b_1 B_n \\ b_1 B_2 & A_2 + I_2 + K_2 u \ . & b_2 B_n \\ & & \\ b_1 B_n & b_2 B_n \ . & . \ A_n + I_n + K_n u \end{vmatrix} = 0$$

Если примем, что выражения $K_\nu = \varepsilon_\nu B_\nu + \frac{2I'_\nu}{g}\omega^2 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$ положительны, тогда из (4) следует, что уравнение (3) имеет только реальные корни, из которых s отрицательные и $n-s$ положительные. Ясно, что $s \geqq p$, а $n - s \leqq q$.

Принимаем, что

$$\text{(4)}\qquad \omega^2 < \frac{B_{r_q} g}{2 I'_{r_q}},$$

тогда уравнение имеет p отрицательных и q положительных корней. Напротив, если

$$\text{(5)}\qquad \omega^2 > \frac{B_{r_q} g}{2 I'_{r_q}},$$

то все корни уравнения (3) отрицательные и нет ни одного положительного. Так как $\varrho^2 = \omega^2 + \frac{g}{u}$, то при условии (4) характеристическое уравнение имеет p пар чисто мнимых корней $\pm i\varrho_k$ $(k=1, \ldots, p)$ и q отрицательных корней $\varrho_k = -\xi_k$ $(k = p+1, \ldots, n)$, если

$$\text{(6)}\qquad \omega^2 < -\frac{g}{u_1},$$

где u_1 наименьший корен $\Delta_n(u) = 0$.

Тем же способом, как и в (1), можно доказать, что, если ни один корень не кратен $i\varrho_k$ $(k=1, \ldots, p)$, то чисто мнимых корням $\pm i\varrho_k$ соответствует p семейств относительных периодических движений в окрестности положения неустойчивого равновесия. Отрицательным корням $\varrho_k = -\xi_k$ $(k = p+1, \ldots, n)$ отвечает одно семейство асимптотических движений, зависящих от q параметров.

И здесь, как при n-кратном маятнике, находящемся в не вращающейся плоскости, получается аналогичный интересный результат:

если q маятников направлены вверх, то при выполнении условий (4) и (6), n-кратный физический маятник при своем относительном движении теряет q семейств периодических движении, взамен которых появляется одно семейство асимптотических движений, зависящих от q параметров.

В конце работы сделаны подробные исследования двойного маятника при различных значениях угловой скорости ω.

MOUVEMENTS RELATIFS PÉRIODIQUES ET ASYMPTOTIQUES DE n PENDULES PHYSIQUES MULTIPLES DANS UN PLAN SOUMIS À UNE ROTATION À VITESSE CONSTANTE

G. Bradistilov et G. Boyadjiev

RÉSUMÉ

Dans un travail [1] G. Bradistilov a démontré l'existence d'une famille de mouvements périodiques et asymptotiques d'un système de n pendules physiques liés successivement, dont p sont dirigés en bas et q en haut autour de l'état d'équilibre.

Dans le présent travail on considère la question plus générale de mouvements périodiques et asymptotiques de n pendules physiques multiples disposés dans un plan vertical qui est soumis à une rotation de vitesse constante ω.

Un système de n pendules physiques liés successivement, dont p sont dirigés en bas et q en haut, soit disposé dans un plan Oxz vertical qui tourne uniformément autour de l'axe vertical $O'z$ se trouvant en dehors du plan et à distance constante $r=\overline{O'O}$; l'axe Oz est dirigé en bas. Les numéros des pendules dirigés en bas sont désignés par r_p, et ceux dirigés en haut par r_q, où r_p et r_q prennent respectivement des valeurs au nombre de p et q $(p+q=n)$. Les pendules tournent autour des axes horizontaux et de sorte que le premier tourne autour de l'axe fixe O, le second autour de l'axe O_1 du premier pendule et ainsi de suite, c'est-à-dire, le ν-ème pendule est suspendu à l'axe $O_{\nu-1}$ du $\nu-1$-ème pendule. Les centres de gravité des pendules $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont disposés respectivement sur les droites OO_1, O_1O_2 etc. et ceci de la sorte que n'importe quel O_ν ne soit pas disposé entre S_ν et $O_{\nu-1}$ et puis $\overline{S_\nu O_\nu}$ soit l'axe principal d'inertie du ν-ème pendule. Désignons par m_ν la masse du ν-ème pendule, par $a_\nu=\overline{O_{\nu-1}S_\nu}$, $b_\nu=\overline{O_{\nu-1}O_\nu}$, par φ_ν l'angle formé entre la direction $\overrightarrow{O_{\nu-1}S_\nu}$ et la direction positive de Oz, par I_ν le moment d'inertie du ν-ème pendule par rapport à S_ν, par I'_ν le moment d'inertie par rapport à l'axe $S_\nu O_\nu$ et par I_ν'' le moment d'inertie de même pendule par rapport à l'axe disposé dans le plan Oxz passant par S_ν et perpendiculaire à $\overline{S_\nu O_\nu}$ $(I_\nu=I'_\nu+I''_\nu)$.

Formant les expressions T et U pour l'énergie cinétique et potentielle du système de pendules physiques, les équations de Lagrange

nous donnent les équations différentielles du mouvement relatif de ce système.

$$(1)\quad B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k [\cos(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k''+\sin(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k'^2]+(A_\nu+I_\nu)\varphi_\nu''+$$

$$+b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{n} B_k [\cos(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k''+\sin(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k'^2]=-gB_\nu \sin\varphi_\nu+$$

$$+\omega^2[(A_\nu+I_\nu''-I_\nu')\sin\varphi_\nu\cos\varphi_\nu+B_\nu\cos\varphi_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1} b_k\sin\varphi_k+$$

$$+b_\nu\cos\varphi_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n} B_k\sin\varphi_k]$$

$$(\nu=1,\ldots,n)$$

D'après la remarque dans [1] § 1 on vérifie par analogie que le système (1) admet une résolution périodique si le pendule n multiple passe à son mouvement deux fois par la position verticale.

Pour établir les mouvements périodiques et asymptotiques, nous posons dans (1) $\varphi_{r_p}=\lambda\psi_{r_p}$ et $\varphi_{r_q}=\pi+\lambda\psi_{r_q}$. En développant $\sin\lambda\psi_\nu$ et $\cos\lambda\psi_\nu$ côté droit de (1) en série, en divisant par λ et en posant $\lambda=0$ nous obtenons le système générateur

$$(2)\quad \varepsilon_\nu B_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1}\varepsilon_k b_k\psi_k''+(A_\nu+I_\nu)\psi_\nu''+\varepsilon_\nu b_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}\varepsilon_k B_k\psi_k''=-g\varepsilon_\nu B_\nu\psi_\nu+$$

$$+\omega^2[(A_\nu+I_\nu''-I_\nu')\varphi_\nu+\varepsilon_\nu B_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1}\varepsilon_k b_k\psi_k+\varepsilon_\nu b_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}\varepsilon_k B_k\psi_k],$$

où $\varepsilon_{r_p}=+1$, $\varepsilon_{r_q}=-1$.

Si l'on pose $\varrho^2-\omega^2=\frac{g}{u}$ l'équation caractéristique de (2) prend la forme

$$(3)\quad \Delta_n(u)=\begin{vmatrix} A_1+I_1+K_1u & b_1B_2 & . & b_1B_n \\ b_1B_2 & A_2+I_2+K_2u & . & .\ b_2B_n \\ & & & \\ b_1B_n & b_2B_n & . & .\ A_n+I_n+K_nu \end{vmatrix}=0$$

Si l'on admet que parmi les expressions $K_\nu=\varepsilon_\nu B_\nu+\frac{2I_\nu}{g}\omega^2(\nu=1,\ldots,n)$ s sont positives, et $n-s$ sont négatives, il résulte de [2] alors que l'équation (3) ne possède que des racines réelles dont s sont négatives et $n-s$ sont positives. Il est évident que $s\geqq p$, et $n-s\leqq q$.

Admettons que

$$(4)\quad \omega^2<\frac{B_{r_q}g}{2I_{r_q}'}.$$

Alors l'équation (3) possède des racines négatives au nombre de p et des racines positives au nombre de q.

Au contraire, si

$$\omega^2 > \frac{B_{r_q} g}{2 I'_{r_q}} \tag{5}$$

toutes les racines de (3) sont négatives.

Etant donné que $\varrho^2 = \omega^2 + \frac{g}{u}$, l'équation caractéristique possède d'après la condition (4) p paires de racines purement imaginaires $\pm i\varrho_k$ $(k=1, \ldots, p)$ et q racines négatives $\varrho_k = -\xi_k \, (k=p+1, \ldots, n)$ dès que

$$\omega^2 < -\frac{g}{u_1} \tag{6}$$

où u_1 est la plus petite racine de $\Delta_n(u)=0$.

Par analogie de [1] on peut dire que, s'il n'y a pas de racine multiple à $i\varrho_k$ $(k=1, \ldots, p)$, aux racines imaginaires $\pm i\varrho_k$ correspondent p familles de mouvements relatifs périodiques au voisinage de l'état d'équilibre labile. Aux racines négatives $\varrho_k = -\xi_k$ $(k=p+1, \ldots, n)$ correspond une famille de mouvements asymptotiques dépendant de q paramètres.

De même qu'à l' n pendule physique multiple disposé dans un plan non soumis à rotation, on obtient ici le résultat analogique intéressant: si q pendules sont dirigés en haut, les conditions (4) et (6) étant satisfaites, l' n pendule physique multiple perd à son mouvement relatif, q familles de mouvements périodiques en échange de quoi apparaît une famille de mouvements asymptotiques dépendant de q paramètres.

Le travail est terminé par des études détaillées sur le pendule double à valeurs differentes de la vitesse angulaire.