ВЪРХУ АБСОЛЮТНОТО СУМИРАНЕ НА РАЗХОДЯЩИТЕ РЕДОВЕ С АРИТМЕТИЧНИТЕ СРЕДНИ

Н. Обрешков

Нека е даден редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n . \tag{1}$$

Под аритметичните средни на реда (1) се разбира редицата от числа s_n^k, определени с

$$s_n^k = \frac{S_n^k}{A_n^k} \qquad S_n^k = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^k u_\nu , \qquad A_n^k = \binom{n+k}{n},$$

където k е произволно реално число, по-голямо от -1. Редът (1) се нарича сумируем с аритметичните средни от ред k със сума s или накъсо (C, k) сумируем със сума s, ако редицата s_n^k е сходяща и границата й е равна на s. Това сумиране, въведено отначало от Чезаро за k цяло неотрицателно число и разширено от Кпорр и Schapman за k произволно реално число > -1, има голямо приложение в теорията на редовете. Редът (1) се нарича абсолютно сумируем от ред k с аритметичните средни, накъсо C, k сумируем, ако трансформираният ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s_n^k - s_{n-1}^k) \tag{2}$$

е абсолютно сходящ. Последното сумиране е въведено от Fekete и подробно изучено след това от Когбетлианц. Едно елементарно свойство на сумирането е, че всеки сходящ ред е и (C, k) сумируем със същата сума за всяко $k > 0$. От основно значение е да се намерят допълнителни условия за реда (1), при изпълнението на които от сумируемостта (C, k) на реда (1) за някое k следва сходимостта на същия ред. По Tauber такова условие е редицата

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu \tag{3}$$

да е сходяща и границата й да е равна на нула. Последното условие се явява в известен смисъл и необходимо. Именно от сходимостта на реда (1) следва сходимостта на редицата (3) към границата нула. В частност от горната теорема следва простият резултат, също дължим на Tauber: Ако $\lim_{n\to\infty} nu_n=0$ и редът (1) е сумируем за някое k, то същият ред е сходящ. По една теорема на Hyslop [1] от $|C, k$ сумируемостта на реда (1) за някое k и сходимостта на реда

$$\sum |t_n-t_{n+1}|, \tag{4}$$

където $\{t_n\}$ е редицата (3), следва абсолютната сходимост на същия ред.

В тази работа установявам някои теореми от Тауберов характер за абсолютно сумируемите редове. Въпросните теореми са следните:

1. Да означим с s_n^k средните на Чезаро от ред k на реда (1). Ако редът (4) е сходящ, то при всяко цяло k редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n^k-s_{n-1}^k-u_n|$$

е също така сходящ.

2. Нека $\{\lambda_n\}_1^\infty$ е редица от реални числа, удовлетворяващи условията

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots, \quad \lambda_n\to\infty. \tag{5}$$

Необходимо и достатъчно условие от сумируемостта $|R, \lambda, 1$ на реда

$$a_1+a_2+a_3+\ldots \tag{6}$$

да следва неговата абсолютна сходимост е редицата $\{t_n\}_1^\infty$, където

$$t_n=\frac{1}{\lambda_{n+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu,$$

да бъде с ограничена вариация.

3. Нека $\{n_\mu\}_1^\infty$ и $\{m_\mu\}_1^\infty$ са две редици от положителни цели числа, такива, че да имаме

$$n_\mu<m_\mu\le n_{\mu+1}, \quad \mu=1, 2, \ldots, \quad \frac{\lambda_{m_\mu}}{\lambda_{n_\mu}}>q>1,$$

като числата λ_n удовлетворяват условията (5). Да предположим, че за членовете на реда (6) да имаме

$$a_n=0 \quad \text{за} \quad n_\mu<n<m_\mu, \quad \mu=1, 2, 3, \ldots$$

и че този ред е $|R, \lambda, 1$ — сумируем. Тогава редът

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\sum_{n=m_\mu}^{n_{\mu+1}} a_n\right|$$

е сходящ.

1. Тауберова теорема за абсолютното сумиране с аритметичните средни

I. Нека с $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^k$ означим трансформирания от ред k с метода на Чезаро на даден ред $\sum_0^{\infty} u_n$, като k е естествено число. Ако редът

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \Big| \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, a_\nu \Big| \tag{1}$$

където $a_\nu = \nu u_\nu - (\nu-1) u_{\nu-1}$, е сходящ, то редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^k - u_n)$$

е абсолютно сходящ.

Ако s_n^k означават аритметичните средни от ред k на реда $\sum u_n$, то $\sigma_n^k = s_n^k - s_{n-1}^k$ и с прости преобразования получаваме за σ_n^k израза

$$\sigma_n^k = \frac{1}{nA_n^k} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{k-1} \nu u_\nu ,$$

получен за пръв път от Когбетлианц. С непосредствени преобразования получаваме

$$\sigma_n^k = \frac{1}{nA_n^k} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{k-1} \nu u_\nu = \frac{1}{nA_n^k} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{k-1} \sum_{\tau=1}^{\nu} a_\tau =$$

$$= \frac{1}{nA_n^k} \sum_{\tau=1}^{n} a_\tau \sum_{\nu=\tau}^{n} A_{n-\nu}^{k-1} = \frac{1}{nA_n^k} \sum_{\tau=1}^{n} A_{n-\tau}^{k} a_\tau ,$$

откъдето имаме

$$\sigma_n^k - u_n = \frac{1}{nA_n^k} \sum_{\nu=1}^{n} (A_{n-\nu}^k - A_n^k) a_\nu .$$

За разликата $A_{n-\nu}^k - A_n^k$ получаваме

$$A_{n-\nu}^k - A_n^k = \binom{n-\nu+k}{k} - \binom{n+k}{k} = \frac{(n-\nu+k)\ldots(n-\nu+1)}{k!} - \frac{(n+k)\ldots(n+1)}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^\nu}{k!} [\nu^k - s_1 \nu^{k-1} + s_2 \nu^{k-2} - \ldots + (-1)^{\nu-1} \nu s_{k-1}] ,$$

където $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ са елементарни симетрични функции на числата $n+1, n+2, \ldots, n+k$. Следователно ще имаме

$$(2)\qquad \sigma_n^k - u_n = \frac{1}{nA_n^k\, k!}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu\,[\nu^k - s_1\nu^{k-2} + s_2\nu^{k-2} - \ldots + (-1)^{\nu-2}s_{k-1}\nu]\,a_\nu,$$

като $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ са полиноми на n съответно от степени 1, 2, 3, ..., $k-1$. Ще установим, че редовете

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nA_n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^p s_{k-p}\,a_\nu$$

са абсолютно сходящи. Да въведем означението

$$\alpha_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu\,.$$

От предното равенство имаме

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu = n\,(n+1)\,\alpha_n\,,$$

откъдето получаваме

$$(4)\qquad a_n = (n+1)\,\alpha_n - (n-1)\,\alpha_{n-1}\,.$$

На основание на предната формула имаме

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^p a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n}\nu^p(\nu+1)\alpha_\nu - \sum_{\nu=2}^{n}\nu^p(\nu-1)\alpha_{\nu-1} = \sum_{\nu=1}^{n}\nu^p(\nu+1)\,\alpha_\nu -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n-1}(\nu+1)^p\nu\alpha_\nu = n^p\,(n+1)\,\alpha_n + \sum_{\nu=1}^{n-1}[\nu^p(\nu+1)-(\nu+1)^p\nu]\,\alpha_\nu =$$

$$=(n+1)^p\,n\alpha_n + \sum_{\nu=1}^{n}g_p(\nu)\,\alpha_\nu\,,$$

$$(5)\qquad \beta_n = \frac{s_{k-p}}{nA_n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^p a_\nu = \frac{(n+1)^p s_{k-p}}{A_n^k}\,\alpha_n + \frac{s_{k-p}}{nA_n^k}\sum_{\nu=1}^{n}g_p(\nu)\,\alpha_\nu\,,$$

като $g_p(\nu)$ е полином на ν от степен p с коефициенти, които не зависят от n.

От (5) получаваме очевидно

$$(6)\qquad \beta_n < K\,\alpha_n + L\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^p\,|\,\alpha_\nu\,|,$$

където K и L са константи, независими от n. Оттук за всяко N имаме

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_n < K\sum_{n=1}^{N}\alpha_n + L\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^p\,\alpha_\nu$$

$$<K\sum_{n=}^{\infty}|a_n|+L\sum_{\nu=1}^{N}\nu^p|a_\nu|\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$$

$$<K\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+L_1\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|,\quad L_1=\text{const},$$

откъдето следва сходимостта на реда $\sum\limits_{1}^{\infty}|\beta_n|$ с което теоремата е установена.

На предната теорема ще дадем друга формулировка, като използуваме следната теорема, която има и самостоятелен интерес:

II. Нека $\{u_n\}_1^{\infty}$ е произволна безкрайна редица. Редът

(7) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu\right| \qquad a_n=nu_n-(n-1)u_{n-1},$$

е само тогава сходящ, когато редицата

(8) $$d_n=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu$$

е с ограничена вариация.

Нека редът (7) е сходящ. Ако с α_n означим общия му член

$$\alpha_n=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu,$$

то имаме

$$a_n=(n+1)\alpha_n-(n-1)\alpha_{n-1}.$$

Оттук за u_n получаваме

(9) $$nu_n=n\alpha_n+\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu.$$

Ще трябва да докажем, че редът

(10) $$\sum_{n=2}^{\infty}|d_n-d_{n-1}|$$

е сходящ. От (9) за d_n-d_{n-1} получаваме

$$d_n-d_{n-1}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu u_\nu+u_n=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu+\frac{n}{n-1}u_n=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\nu\alpha_\nu+j,\quad j=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{t=1}^{\nu}\alpha_t+\frac{1}{n-1}\left(n\alpha_n+\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\right).$$

Като вземем предвид, че

$$j=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\sum_{\iota=1}^{n}a_\iota\sum_{\nu=\iota}^{n}1+\frac{n}{n-1}a_n+\frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu=$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu-1)a+\frac{n}{n-1}a_n,$$

за d_n-d_{n-1} получаваме

$$d_n-d_{n-1}=-\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu+\frac{n}{n-1}a_n,$$

откъдето имаме

$$\sum_{n=2}^{\infty}|d_n-d_{n-1}|\leq\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|+2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|=\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|+2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$$

С това сходимостта на реда (10) е установена.

Обратно, да предположим, че редът (10) е сходящ. При същите означения от (8) имаме

$$nu_n=nd_n-(n-1)d_{n-1} \tag{11}$$

Ако $a_n=nu_n-(n-1)u_{n-1}$, то имаме

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2u_\nu-\sum_{\nu=2}^{n}\nu(\nu-1)u_{\nu-1}=-\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu u_\nu+n^2u_n=n(n+1)u_n-\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu,$$

откъдето за числата

$$\alpha_n=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu$$

получаваме

$$\alpha_n=u_n-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu=u_n-\frac{d_n}{n+1}.$$

Като заместим тук u_n с равното му от (11), получаваме

$$\alpha_n=d_n-\frac{n-1}{n}d_{n-1}-\frac{d_n}{n+1}=\frac{n}{n+1}(d_n-d_{n-1})+\frac{1}{n(n+1)}d_{n-1},$$

откъдето имаме

$$\alpha_n\leq|d_n-d_{n-1}|+\frac{1}{n(n+1)}|d_1+(d_2-d_1)+\cdots+(d_{n-1}-d_{n-2})|\leq$$

$$\leq|d_n-d_{n-1}|+\frac{1}{n(n+1)}|d_1|+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=2}^{n-1}|d_\nu-d_{\nu-1}|,$$

От горното неравенство следва, че

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\leq\sum_{n=2}^{\infty}|d_n-d_{n-1}|+|d_1|+\sum_{\nu=2}^{\infty}|d_\nu-d_{\nu-1}|,$$

с което сходимостта на реда (7) е установена.

На основание на теорема II условието редът (7) да бъде сходящ може да се замести с условието редицата (8) да бъде с ограничена вариация, т. е. на теорема I може да се даде следната форма:

III. Нека с $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sigma_n^k$ да означим трансформирания от ред k с метода на Чезаро на дадения ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$, като k е естествено число. Ако редицата $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu u_n\right\}_1^{\infty}$ е с ограничена вариация, то редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_n^k-u_n)$$

е абсолютно сходящ.

В частност от III получаваме теоремата:

Ако редицата (8) е с ограничена вариация и редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ е $|C,k|$—сумируем от някой ред k (може да се предположи без ограничение, че k е естествено число), то редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ е абсолютно сходящ.

Това предложение следва също така от една теорема на Хислоп, според която от $|A|$—сумируемостта на един ред и сходимостта на $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n-t_{n+1}|$, където t_n е редицата (8), следва абсолютната сходимост на същия ред. Именно трябва да се приложи един резултат на Фекете, според който от $|C,k|$ — сумируемостта на един ред (за някое k), следва $|A|$—сумируемостта на същия ред.

Ако един ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ *е абсолютно сходящ, то съответната редица* $t_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu$ *е с ограничена вариация.*

Действително от неравенството

$$|t_n-t_{n-1}|\leq\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\nu\,|u_\nu|+\frac{1}{n-1}\,|u_n|$$

получаваме

$$\sum_{n=2}^{N}|t_n-t_{n-1}|\leq\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\nu|u_\nu|+2\sum_{n=2}^{N}|u_n|<4\sum_{n=2}^{N}|u_n|$$

Следователно ако от $|C, k|$ — сумируемостта на един ред за някое k, следва абсолютната сходимост на същия ред, е необходимо редицата $\left\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu\right\}_1^\infty$ да е с ограничена вариация.

Ще установим сега аналогична теорема на I за сумируемостта (C, k).

IV. Нека s_n^k означават средните на Чезаро от ред k (k цяло число >0) на реда $\sum_0^\infty u_n$ и нека редът

$$(12)\qquad \sum_{n=1}a_n,\qquad a_n=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=1}\nu a_\nu,\qquad a_n=nu_n-(n-1)u_{n-1},$$

е сходящ. Тогава редицата $s_n^k-\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu$ е сходяща.

Доказателството се основава на формулата (2). Ще установим, че редовете (5) са сходящи, $1\leq p\leq k$. Както непосредствено се вижда, въпросът се свежда към установяване сходимостта на редовете $\sum\beta_n$, като

$$\beta_n=\frac{(n+1)^p S_{k-p}}{A_n^k}a_n+\frac{S_{k-p}}{nA_n^p}\sum_{\nu=1}^{n}g_p(\nu)a_\nu.$$

Сходимостта на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n,\qquad \lambda_n=\frac{(n+1)^p S_{k-p}}{A_n^k},$$

се установява лесно. Трябва да вземем предвид, че ще имаме

$$\lambda_n=c_0+\frac{c_1}{n+1}+\qquad+\frac{c_k}{(n+1)\ldots(n+k)},$$

откъдето следва, че

$$\Delta\lambda_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и следователно редът $\Sigma|\Delta\lambda_n|$ е сходящ. Остава да се установи сходимостта на редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty}g_n,\qquad g_n=\frac{S_{k-p}}{nA_n^k}\sum_{\nu=1}^{n}g_p(\nu)a_\nu.$$

Но имаме

$$\frac{S_{k-p}}{nA_n^k}=\sum_{\nu=0}^{k-p}\frac{\gamma_\nu}{(n+\nu)(n+\nu+1)\dots(n+k)},$$

като $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-p}$ са фиксирани числа, които не зависят от n. На основание на горната формула достатъчно е да установим сходимостта на редовете с общи членове

$$\frac{1}{(n+s)(n+s+1)\dots(n+k)}\sum_{\nu=1}^{n} g_p(\nu)\,a_\nu=t_n.$$

За парциалната сума $\sum_1^N t_n$ получаваме

$$\sum_{n=1}^{N} t_n=\sum_{\nu=1}^{N} g_p(\nu)\,a_\nu\sum_{n=\nu}^{N}\frac{1}{(n+s)\dots(n+k)}=\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu T_\nu-U_N,$$

където

$$T_\nu=\frac{1}{k-s}\,\frac{g_p(\nu)}{(\nu+s)\dots(\nu+k-1)},$$

$$U_N=\frac{1}{(k-s)(N+s+1)\dots(N+k)}\sum_{\nu=1}^{N} g_p(\nu)\,a_\nu.$$

Числата T са отношения на два полинома на ν, като степента на числителя не надминава степента на знаменателя. Както по-горе виждаме, че редът $\Sigma|T_\nu-T_{\nu+1}|$ е сходящ и следователно редът $\sum a_n T_n$ е сходящ. Ако $S_n=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$, то втората сума U_N може да се пише така

$$U_N=\sum_{\nu=1}^{N-1} h_{N\nu}S_\nu+l_N S_N,$$

където

$$h_{N\nu}=\frac{g_p(\nu)-g_p(\nu+1)}{(k-s)(N+s+1)\dots(N+k)},$$

$$l_N=\frac{g_p(N)}{(k-s)(N+s+1)\dots(N+k)}.$$

Понеже $g_p(\nu)-g_p(\nu+1)$ са полиноми на ν от степен $p-1$ с коефициенти, независими от n, то числата $\lambda_{N\nu}$ клонят към нула, когато $N\to\infty$ и сумата $\sum_{\nu=1}^{N-1}|h_{N\nu}|$ е ограничена спрямо N. По елементарни теореми от теорията на редиците следва, че сумата U_N ще клони към определена граница, когато $N\to\infty$. Така теоремата IV е установена.

Нека S_m означава парциалната сума на реда (12), т. е.

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu .$$

Като използуваме релацията

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu=n(n+1)u_n-\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu ,$$

получаваме

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}u_n-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu=$$

$$=\sum_{n=1}^{m}u_n-\sum_{\nu=1}^{m}\nu u_\nu\sum_{n=\nu}^{m}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{m}u_n-\sum_{\nu=1}^{m}\nu u_\nu\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{m+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{m+1}\sum_{\nu=1}^{m}\nu u_\nu .$$

Следователно в теорема IV условието редът (12) да бъде сходящ може да се замести с условието редицата с общ член $\tau_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu$ да бъде сходяща.

В частност, ако редът $\sum_{0}^{\infty}u_n$ е (C, k)—сумируем за някое k, и редицата $\tau_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu$ е сходяща (към границата s'), то същият ред ще бъде сходящ. Но тогава s' трябва да е равна на нула. Действително от $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{0}^{n}u_\nu=s$ следва

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=0,$$

което е един познат резултат.

2. Тауберови теореми за абсолютното сумиране на интеграли със средните на Чезаро

Нека $f(x)$ е интегруема функция във всеки интервал $(0, A)$, $A>0$. Интегралът

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \tag{1}$$

се нарича сумируем с метода на Чезаро от ред $k\geq0$, накъсо (C, k) сумируем със сума s, ако функцията

$$\varphi_k(x)=\int_0^x\left(1-\frac{t}{x}\right)^k f(t)\,dt,\qquad k>0,\qquad \varphi_0(x)=\int_0^x f(t)\,dt,$$

клони към граница s, когато x расте неограничено.

Съгласно една дефиниция, въведена от мене [3], интегралът (1) е абсолютно сумируем от ред $k\geqq 0$ с метода на Чезаро, накъсо $|C, k|$ сумируем, ако функцията $\varphi_k(x)$ е с ограничена вариация в интервала (a, ∞), $a>0$, т. е. интегралът

$$\int_a^\infty |d\varphi_k(x)|$$

е сходящ. Известно е, че всеки $|C, \alpha|$ сумируем интеграл е и $|C, \beta|$ сумируем за всяко $\beta>\alpha$. Ще установим сега аналогична на II теорема.

V. Нека интегралът

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

е $|C, k|$ сумируем за някое число k. Нека интегралът

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}\left|\int_0^x t\,dg(t)\right|,\qquad g(x)=xf(x) \tag{2}$$

е сходящ. Тогава интегралът (1) е абсолютно сходящ.

Предполагаме, че функцията $f(x)$ е с ограничена вариация във всеки интервал $(0, A)$, $A>0$.

Тази теорема следва от по-общата теорема, аналогична на теорема I. Именно имаме:

VI. Нека интегралът (2) е сходящ. Следва тогава, че и интегралът

$$\int_a^\infty |\varphi_k'(x)+f(x)|\,dx,\qquad a>0, \tag{3}$$

е сходящ. Тук k е произволно естествено число.

С интегриране по части имаме

$$\varphi_k'(x)=-\frac{k}{x^{k+1}}\int_0^x (x-t)^{k-1}g(t)\,dt=\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x g(t)\,d(x-t)^k=$$

$$=-\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x (x-t)^k\,dg(t).$$

Оттук получаваме за $\varphi_k'(x)+f(x)$

$$\varphi_k'(x)+f(x)=-\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x [(x-t)^k-x^k]\,dg(t)=$$

$$=-\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}h_\nu(x),$$

където с $h_\nu(x)$ сме означили функциите

$$h_\nu(x) = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^x t^\nu \, dg(t),$$

Ако означим с $G(x)$ функцията

$$G(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x tg(t),$$

по предположение интегралът

$$\int_a^\infty |G(x)| \, dx$$

е сходящ за някое число $a > 0$. Очевидно

$$h_1(x) = G(x)$$

и следователно интегралът

$$\int_a^\infty |h_1(x)| \, dx$$

е сходящ. Ще установим, че и интегралите

$$j_\nu = \int_a^\infty h_\nu(x) \; dx, \quad \nu = 2, 3, \ldots, k,$$

са сходящи. С интегриране по части получаваме

$$h_\nu(x) = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^x t^{\nu-1} \, d[t^2 G(t)] =$$

$$= \frac{1}{x^{\nu+1}} \left[t^{\nu-1} t^2 G(t) \Big|_0^x - (\nu-1) \int_0^x t^\nu G(t) dt \right] =$$

$$= G(x) - \frac{\nu-1}{x^{\nu+1}} \int_0^x t^\nu G(t) \, dt.$$

Оттук имаме

$$|h_\nu(x)| \leq |G(x)| + \frac{\nu-1}{x^{\nu+1}} \int_0^x t^\nu |G(t)| \, dt$$

и следователно ($A > a$),

$$\int_a^A |h_\nu(x)| \, dx \leq \int_a^A |G(x)| \, dx + (\nu-1) \int_a^A \frac{dx}{x^{\nu+1}} \int_0^x t^\nu |G(t)| \, dt.$$

Ако означим с K втория интеграл вдясно за всяко $A > a$, имаме

$$K = (\nu-1) \int_a^A \frac{dx}{x^{\nu+1}} \int_0^a t^\nu |G(t)| \, dt + (\nu-1) \int_a^A t^\nu \; G(t) | \, dt \int_t^A \frac{dx}{x^{\nu+1}}$$

$$< (\nu-1) \int_a^A \frac{dx}{x^{\nu+1}} \int_0^a t^\nu |G(t)| \, dt + \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \int_a^\infty |G(t)| \, dt.$$

Теоремата е така установена.

Условието интегралът (2) да бъде сходящ може да се замести с условието функцията

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x t f(t)\,dt \tag{4}$$

да бъде с ограничена вариация в интервала (A, ∞). Именно имаме предложението:

Интегралът (2) е само тогава сходящ, когато функцията $\varphi(x)$ е с ограничена вариация в интервала (A, ∞).

Действието с диференциране на (4) получаваме

$$\varphi'(x)=f(x)-\frac{1}{x^2}\int_0^x t f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{x}g(x)-\frac{1}{x^2}\int_0^x g(t)\,dt.$$

От друга страна с интегриране по части имаме

$$\int_0^x t\,dg(t)=xg(x)-\int_0^x g(t)\,dt.$$

Следователно ще имаме равенството

$$\int_A^\infty \frac{dx}{x^2}\left|\int_0^x t\,dg(t)\right|=\int_A^\infty |\varphi'(x)|\,dx.$$

Не е трудно да се установи следното предложение:

Ако интегралът

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

е сходящ, то функцията (4) е с ограничена вариация в интервала (a, ∞).

Действително от равенството

$$\varphi'(x)=f(x)-\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$$

получаваме

$$\int_a^\infty |\varphi'(x)|\,dx<\int_a^\infty |f(x)|\,dx+\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}\int_0^x t\,|f(t)|\,dt.$$

Но имаме

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}\int_0^x t\,|f(t)|\,dt=\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}\int_0^a t\,|f(t)|\,dt+\int_a^\infty t\,|f(t)|\,dt\int_t^\infty \frac{dx}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^a t\,|f(t)|\,dt+\int_a^\infty |f(t)|\,dt.$$

Следователно ще имаме

$$\int_a^\infty |\varphi'(x)|\,dx \leq \frac{1}{a}\int_0^a t\,|f(t)|\,dt + 2\int_a^\infty |f(t)|\,dt,$$

с което предложението е доказано.

От теорема V и горното предложение следва, *че необходимо и достатъчно условие от сумируемостта* $|C, k|$ *на интеграла*

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

да следва неговата абсолютна сходимост е функцията (4) *да бъде с ограничена вариация в интервала* (a, ∞), $a>0$.

Теореми за сумирането $|R, \lambda, 1|$

Достатъчно условие за обръщането на сумирането $|R, \lambda, k|$, отговарящо на условието на Hyslop при някои ограничения за редицата λ_n, бе дадено наскоро от Pati [2].

За сумирането $|R, \lambda, 1|$ доказваме следните теореми, отговарящи на теоремите I и II.

VII. Нека е даден редът

$$a_1+a_2+a_3+\cdots \tag{1}$$

и редицата $\{\lambda_n\}_1^\infty$ от произволни числа, подчинени на условията

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots,\ \lambda_n\to\infty.$$

Да положим

$$\alpha_\nu=\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu}\,a_\nu-\frac{\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}\,a_{\nu-1},\quad \nu=1,\ 2,\ldots,\ a_0=0. \tag{2}$$

Необходимо и достатъчно условие от сумируемостта $|R, \lambda, 1|$ на реда (1) да следва неговата абсолютна сходимост е редът

$$\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left|\sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu\alpha_\nu\right| \tag{3}$$

да бъде сходящ.

Съгласно въведеното от мене [4] определение на $|R, \lambda, k|$ сумиране, редът (1) се нарича сумируем $|R, \lambda, 1|$, ако редът

$$\sum_{\nu=1}^\infty\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}}\omega^{-2}\,|a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\quad+a_\nu\lambda_\nu|\,d\omega,$$

т. е. редът

$$\sum_{\nu=1}^\infty\left(\frac{1}{\lambda_\nu}-\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)|a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\cdots+a_\nu\lambda_\nu| \tag{4}$$

е сходящ. Но непосредствено се проверява тъждеството

$$(5)\qquad \left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu=a_n-\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu.$$

Нека редът (3) е сходящ. Тогава от (5) следва, че редът

$$(6)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu-a_n\right|$$

е сходящ. Това свойство отговаря на теорема I. Да предположим сега, че редът (1) е $R, \lambda, 1$ сумируем. Тогава редът (4) ще бъде сходящ и от сходимостта на реда (6) следва очевидно сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Да предположим сега, че редът (1) е абсолютно сходящ. Ще установим, че и редът (3) ще бъде сходящ. Действително от (5) получаваме

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left|\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu\right|\leq\sum_{n=1}^{N}|a_n|+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left|\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu\right|.$$

По условие редът $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ е сходящ и по едно основно свойство на абсолютното сумиране с типичните средни, установено от мене, а именно, че от абсолютната сходимост на един ред следва сумируемостта му $|C, \lambda, k$, за всяко $k>0$, виждаме, че и редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left|\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu\right|$$

ще бъде сходящ. Впрочем това твърдение се вижда и лесно от неравенствата

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left|\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu\right|\leq\sum_{\nu=1}^{N}\lambda_\nu|a_\nu|\sum_{n=\nu}^{N}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)$$

$$\leq\sum_{\nu=1}^{N}|a_\nu|$$

Ще преобразуваме сега реда (3). Ако въведем означението

$$b_n=\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu,$$

то ще имаме

$$a_n=\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}b_n-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}b_{n-1}.$$

Със събиране получаваме оттук

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} b_n = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} b_n. \tag{7}$$

Но от (2) имаме по същия начин

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} a_n. \tag{8}$$

Като сравним формулите (7) и (8), получаваме

$$a_n\lambda_n = (\lambda_{n+1}-\lambda_n) \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu + b_n\lambda_n.$$

Оттук имаме по-нататък

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\lambda_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\lambda_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu) \sum_{\iota=1}^{\nu} b_\iota =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\lambda_\nu + \sum_{\iota=1}^{n} b_\iota \sum_{\nu=\iota}^{n} (\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu) = \lambda_{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu.$$

Следователно за числата

$$t_n = \frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\lambda_\nu$$

ще имаме

$$t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Последното равенство показва, че сходимостта на реда (3) е еквивалентна на сходимостта на реда $\Sigma|t_n - t_{n-1}|$, т. е. на условието редицата $\{t_n\}_1^\infty$ да бъде с ограничена вариация. На основание на това свойство предната теорема може да се изкаже и така:

VIII. Нека е даден редът (1) и редицата $\{\lambda_n\}_1^{\infty'}$ от произволни числа, подчинени на условията

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \quad \lambda_n \to \infty.$$

Необходимо и достатъчно условие от сумируемостта $R, \lambda, 1$ на реда (1) да следва неговата абсолютна сходимост е редицата $\{t_n\}_1^\infty$, дефинирана с

$$t_n = \frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\lambda_\nu,$$

да бъде с ограничена вариация.

Ще установим сега една теорема за редове с празнини.

IX. Нека

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

е редица от неограничено растящи положителни числа ($\lambda_n < \lambda_{n+1}$) и нека $\{n_\mu\}_1^\infty$ и $\{m_\mu\}_1^\infty$ са две редици от цели положителни числа, подчинени на условията

$$n_\mu < m_\mu \leq n_{\mu+1}, \ \mu = 1, 2, \ldots, \text{ като } \frac{\lambda_{m_\mu}}{\lambda_{n_\mu}} > q > 1.$$

Нека редът

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

е $|R, \lambda, 1|$ сумируем и за членовете му u_n да имаме

$$u_n = 0 \text{ за } n_\mu < n < m_\mu, \ \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогава редът

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \sum_{n=m_\mu}^{n_{\mu+1}} u_n \right|$$

е сходящ.

Ако поставим

$$\sigma_n = \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) (u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + \cdots + u_n\lambda_n), \tag{9}$$

то по условие редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n| \tag{10}$$

е сходящ. От (9) получаваме

$$u_n = \sigma_n \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} - \sigma_{n-1} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}. \tag{11}$$

Оттук лесно намираме формулата

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} &= \sigma_n + \sigma_{n+1} + \cdots + \sigma_{n+p-1} + \\ &\sigma_{n+p} \frac{\lambda_{n+p+1}}{\lambda_{n+p+1} - \lambda_{n+p}} - \sigma_{n-1} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \end{aligned} \tag{12}$$

По условие $u_n = 0$ за $n_\mu + 1 \leq n \leq m_{\mu-1}$. За тези стойности на n от (11) получаваме

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}} \cdot \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}. \tag{13}$$

Като напишем подобните равенства за индекси $n, n+1, \ldots, n+p$ и умножим така получените равенства, ще имаме

$$\sigma_{n+p} = \sigma_{n-1} \frac{\lambda_n \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+p} \lambda_{n+p+1}} \cdot \frac{\lambda_{n+p+1} - \lambda_{n+p}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \tag{14}$$

Тук числата n и p са подчинени на условието

$$n_\mu < n \leq n+p < m_\mu, \ \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Ако въведем числата $g_n=\frac{1}{\lambda_n}$, то (14) добива вида

$$\sigma_{n+p}=\sigma_{n-1}\frac{g_{n+p}-g_{n+p+1}}{g_{n-1}-g_n}. \tag{15}$$

От (13) следва, че числата σ_n, $n=n_\mu+1,\ldots,m_\mu-1$, са или едновременно равни за нула, или всички са с еднакъв знак. Като приложим формулата (12) за $n=m_\mu$ и $n+p=n_{\mu+1}$, получаваме

$$u_{m_\mu}+u_{m_\mu+1}+\cdots+u_{n_{\mu+1}}=\sigma_{m_\mu}+\sigma_{m_\mu+1}+\cdots+\sigma_{n_{\mu+1}-1}+$$
$$+\sigma_{n_{\mu+1}}\frac{\lambda_{n_{\mu+1}+1}}{\lambda_{n_{\mu+1}+1}-\lambda_{n_{\mu+1}}}-\sigma_{m_\mu-1}\frac{\lambda_{m_\mu-1}}{\lambda_{m_\mu}-\lambda_{m_\mu-1}}.$$

Оттук имаме

$$|u_{m_\mu}+u_{m_\mu+1}+\cdots+u_{n_{\mu+1}}|\leq|\sigma_{m_\mu}+\sigma_{m_\mu+1}+\cdots+\sigma_{n_{\mu+1}-1}|+ \tag{16}$$
$$+|\sigma_{n_{\mu+1}}|\frac{\lambda_{n_{\mu+1}+1}}{\lambda_{n_{\mu+1}+1}-\lambda_{n_{\mu+1}}}+|\sigma_{m_\mu-1}|\frac{\lambda_{m_\mu-1}}{\lambda_{m_\mu}-\lambda_{m_\mu-1}}.$$

Ще докажем, че редовете

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}|\sigma_{m_\mu-1}|\frac{\lambda_{m_\mu-1}}{\lambda_{m_\mu}-\lambda_{m_\mu-1}},\quad \sum_{\mu=1}^{\infty}|\sigma_{n_\mu}|\frac{\lambda_{n_\mu+1}}{\lambda_{n_\mu+1}-\lambda_{n_\mu}} \tag{17}$$

са сходящи, с което теоремата ще бъде установена. От (15) получаваме

$$\sigma_{n-1}=\sigma_{m_\mu-1}\frac{g_{n-1}-g_n}{g_{m_\mu-1}-g_{m_\mu}},$$

като $n_{\mu+1}\leq n\leq m_\mu$. Със събиране имаме оттук

$$A=\sigma_{n_\mu}+\sigma_{n_\mu+1}+\cdots+\sigma_{m_\mu-1}=\sigma_{m_\mu-1}\frac{g_{n_\mu}-g_{m_\mu}}{g_{m_\mu-1}-g_{m_\mu}}. \tag{18}$$

За числата

$$b_\mu=\sigma_{m_\mu-1}\frac{\lambda_{m_\mu-1}}{\lambda_{m_\mu}-\lambda_{m_\mu-1}},$$

като заместим $\sigma_{m_\mu-1}$ от (18), получаваме

$$b_\mu=A\frac{\lambda_{m_\mu-1}}{\lambda_{m_\mu}-\lambda_{m_\mu-1}}\cdot\frac{g_{m_\mu-1}-g_{m_\mu}}{g_{n_\mu}-g_{m_\mu}}=A\frac{\lambda_{n_\mu}}{\lambda_{m_\mu}-\lambda_{n_\mu}}.$$

Понеже $\frac{\lambda_{m_\mu}}{\lambda_{n_\mu}}>q>1$, то от горното равенство следва, че

$$|b_\mu|<|A|\frac{1}{q-1}. \tag{19}$$

Подобно от формулата

$$\sigma_{n_\mu+p+1}=\sigma_{n_\mu}\frac{g_{n_\mu+p+1}-g_{n_\mu+p+2}}{g_{n_\mu}-g_{n_\mu+1}},\quad 0\leq p\leq m_\mu-n_\mu-2,$$

със събиране получаваме

$$B=\sigma_{n_\mu}+\sigma_{n_\mu+1}+\quad+\sigma_{m_\mu-1}=\sigma_{n_\mu}\frac{g_{n_\mu}-g_{m_\mu}}{g_{n_\mu}-g_{n_\mu+1}}.$$

Тогава за числата

$$c_\mu=\sigma_{n_\mu}\frac{\lambda_{n_\mu+1}}{\lambda_{n_\mu+1}-\lambda_{n_\mu}}$$

ще имаме

$$c_\mu=B\frac{g_{n_\mu}-g_{n_\mu+1}}{g_{n_\mu}-g_{m_\mu}}\cdot\frac{\lambda_{n_\mu+1}}{\lambda_{n_\mu+1}-\lambda_{n_\mu}}=B\frac{\lambda_{m_\mu}}{\lambda_{m_\mu}-\lambda_{n_\mu}}.$$

Понеже $\frac{\lambda_{m_\mu}}{\lambda_{m_\mu}}>q>1$, от горното равенство получаваме

$$|c_\mu|<|B|\frac{1}{1-\frac{1}{q}}. \tag{20}$$

От неравенствата (19) и (20) и сходимостта на реда (10) следва сходимостта на редовете (17) и теоремата е така установена.

От самото доказателство се вижда, че не беше необходимо да предположим, че редът $\sum_1^\infty \sigma_n$ е абсолютно сходящ. Достатъчно е да се предположи, че редът

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\left|\sum_{n=m_\mu}^{n_{\mu+1}-1}\sigma_n\right|+\left|\sum_{m=n_\mu}^{m_\mu-1}\sigma_m\right|\right)$$

е сходящ.

Постъпила на 10. 8. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Hyslop. A Tauberian theorem for absolute summability, Journal Lond. Math. Soc. (1936), 176—180.
2. T. Pati. A Tauberian theorem for absolute summabillity, Mathematische Zeitschrift, 61 (1954), 75—78.
3. N. Obrechkoff. Sulla sommazione assoluta degli integrali cole medie di Cesaro, Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei, 29 (1939), 31—34.
4. N. Obrechkoff. Über die absolute Summierung der Dirichletschen Reihen, Mathematische Zeitschrift, 30 (1929), 375—386.

ОБ АБСОЛЮТНОМ СУММИРОВАНИИ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ АРИФМЕТИЧЕСКИМИ СРЕДНИМИ

Н. Обрешков

РЕЗЮМЕ

В этой работе доказываются следующие Тауберовские теоремы:

1. Обозначим s_n^k средные арифметические k-го порядка ряда

$$u_0+u_1+u_2+\dots$$

и положим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n-t_{n+1}| \qquad t_n=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu,$$

сходящийся. Тогда при k натуралном ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n^k-s_{n-1}^k-u_n|$$

будет тоже сходящимся.

2. Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ последовательность действительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\dots, \quad \lambda_n\to\infty.$$

Необходимое и достаточное условие, чтобы из $|R, \lambda, 1|$ суммируемости ряда

$$a_1+a_2+a_3+\dots$$

следовала абсолютная сходимость того же ряда, состоит в том, что последовательность $\{t_n\}_1$, где $t_n=\frac{1}{\lambda_{n+1}}\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a_\nu$, была бы ограниченной вариации.

3. Пусть $\{n_\mu\}_1^\infty$ и $\{m_\mu\}_1^\infty$ две последователности положительных чисел такие, что

$$n_\mu<m_\mu<n_{\mu+1}, \ \mu=1, 2, 3, \dots, \quad \frac{\lambda_{m_\mu}}{\lambda_{n_\mu}}>q>1, \ \mu=1, 2, 3, \dots$$

Положим, что для членов a_n ряда

$$a_1+a_2+a_3+\cdot$$

имеем $a_n=0$ для $n_\mu<n<m_\mu$, $\mu=1, 2, 3, .$ и что этот ряд $|R, \lambda, 1|$ суммируем. Тогда ряд

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\sum_{n=m_\mu}^{n_{\mu+1}} a_n\right|$$

сходится.

SUR LA SOMMATION ABSOLUE DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES

N. Obrechkoff

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous démontrons les théorèmes suivants:

1. Désignons par s_n^k les moyennes arithmétiques d'ordre k de la série

$$u_0+u_1+u_2+\cdots$$

et supposons que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n-t_{n+1}|, \quad t_n=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu$$

est convergente. Pour k entier la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n^k-s_{n-1}^k-u_n|$$

sera aussi convergente.

2. Soit $\{\lambda_n\}_1^\infty$ une suite des nombres réels qui satisfont aux conditions

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots, \quad \lambda_n\to\infty.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que de la sommabilité $|R, \lambda, 1|$ de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ il découle la convergence absolue de la même série consiste en ceci que la suite $\{t_n\}_1^\infty$, où $t_n=\frac{1}{\lambda_{n+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu$ soit de variation bornée.

3. Soit $\{n_\mu\}_1^\infty$ et $\{m_\mu\}_1^\infty$ deux suites de nombres positifs et entiers, tels que

$$n_\mu<m_\mu\leq n_{\mu+1}, \ \mu=1, 2, 3, \ldots \qquad \frac{\lambda_{m_\mu}}{\lambda_{n_\mu}}>q>1, \ \mu=1, 2, \ldots$$

Supposons que pour les membres u_n de la série

$$u_1+u_2+u_3+\cdots$$

on a $u_n=0$ pour $n_\mu<n<m_\mu$, $\mu=1, 2, \ldots$, et que cette série est sommable $|R, \lambda, 1|$ Alors la série

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\sum_{n=m_\mu}^{n_{\mu+1}} u_n\right|$$

sera convergente.

On démontre aussi des résultats semblables pour la sommabilité absolue $|C, k|$ des intégrales.