SUR LA DÉFORMATION PROJECTIVE DES SURFACES DÉVELOPPABLES

Eduard Čech (Praha)

La déformation projective des surfaces développables a été considérée en 1920 par E. Cartan [1] qui a donné une construction géométrique simple de toutes telles déformations. Ici j'étudie surtout les déformations que j'appelle spéciales et qui sont caractérisées par la propriété d'admettre une homographie osculatrice fixe le long de chaque génératrice.

1. Dans l'espace projectif à trois dimensions S_3 considérons une surface développable s. Soit $g=[AC]$ la génératrice courante de s, où C désigne le point de rebroussement et A un autre point quelconque de g. Les deux points A et C dépendent d'un paramètre t et l'on a

$$[AA'A''C]\neq 0 \tag{1.1}$$

les accents indiquant toujours des dérivées par rapport à t. On peut supposer que le facteur scalaire du point C soit soumis à la condition

$$C'=aA, \tag{1.2}$$

où $a=a(t)$. D'après (1.1) il existe des fonctions p, p_1, p_2, q de t telles que

$$A'''=pA''+p_1A'+p_2A+qC. \tag{1.3}$$

Il est évident que

$$a=0 \tag{1.4}$$

si et seulement si la développable s est un cône; C en est alors le sommet.

Soit γ une correspondance arbitraire (droite $\to$ droite) entre deux développables $s, \bar{s}$; on peut supposer que les génératrices $g, \bar{g}$ soient données en fonctions d'un paramètre t de sorte que deux génératrices $g, \bar{g}$ correspondantes l'une à l'autre dans γ appartiennent toujours à la même valeur de t. Pour chaque valeur de t, choisissons une projectivité $\pi=\pi(t)$ qui porte les points de la génératrice $g=g(t)$ de s aux points de la génératrice correspondante $\bar{g}=\bar{g}(t)$ de $\bar{s}$, π étant soumise à la condition de porter le point de rebroussement C de g au point de rebroussement $\bar{C}$ de $\bar{g}$. L'ensemble des ∞^1 projectivités π est une transformation ponctuelle P de s en $\bar{s}$. On sait [1] que P est une déformation projective de s et que, réciproquement, chaque déformation projective d'une développable peut être décrite de cette façon. On peut poser

$$\pi C = C, \qquad \pi A = \bar{A} \tag{1.5}$$

et on peut encore soumettre le facteur scalaire de $\bar{C}$ à la condition

$$\bar{C}' = \bar{a}\bar{A} \tag{1.6}$$

analogue à (1.2). On a aussi l'équation

$$\bar{A}''' = \bar{p}\bar{A}'' + \bar{p}_1\bar{A}' + \bar{p}_0\bar{A} + \bar{q}\bar{C} \tag{1.7}$$

analogue à (1.3). Nous appellerons φ la *correspondance base* et π la *projectivité déterminante* de la déformation projective P.

2. Nous allons vérifier le fait que P est une déformation projective en indiquant, pour chaque couple

$$X = A + uC, \qquad \bar{X} = \bar{A} + u\bar{C} \tag{2.1}$$

de points correspondants X de s et $\bar{X}$ de $\bar{s}$ une *homographie osculatrice* $K = K(t, u)$, c'est-à-dire une transformation homographique de S_3 réalisant le contact analytique du second ordre des surfaces s, $\bar{s}$ aux points X, $\bar{X}$. On sait [2] que, t et u étant données, l'homographie osculatrice K dépend encore d'un paramètre k. Je dis que

$$\begin{gathered} KA = \bar{A}, \qquad KC = \bar{C}, \qquad KA' = \bar{A}' + \beta u(2\bar{A} + u\bar{C}), \\ KA'' = \bar{A}'' + 3\beta u\bar{A}' + u\{\beta' + (\bar{a} + \beta)\beta u\}\bar{A} + k(\bar{A} + u\bar{C}), \end{gathered} \tag{2.2}$$

où

$$\beta = \bar{a} - a. \tag{2.3}$$

Le fait que l'homographie K définie par (2.2) est une homographie osculatrice découle immédiatement des formules

$$\begin{gathered} KX = \bar{X}, \quad KdX = d\bar{X} + \beta u dt \bar{X}, \\ Kd^2X = d^2\bar{X} + 2\beta u dt d\bar{X} + [\beta u d^2t + (a\beta u^2 + k)dt^2 - 2\beta dt du]\bar{X} \end{gathered} \tag{2.4}$$

que l'on vérifie sans peine.

Pour t, u données, nous avons ∞^1 homographies osculatrices K déterminées par les équations (2.2) qui montrent que toutes ces ∞^1 K transforment de la même façon les points du plan

$$\Gamma = [AA'C] \tag{2.5}$$

tangent à s le long de g aux points du plan

$$\bar{\Gamma} = [\bar{A}\bar{A}'\bar{C}] \tag{2.6}$$

tangent à $\bar{s}$ le long de $\bar{g}$. En général, cette transformation commune de Γ en $\bar{\Gamma}$ dépend non seulement de t, c'est-à-dire de la génératrice g

de s, mais aussi de u, c'est-à-dire de la position du point X sur g. La déformation projective P de s soit nommée s p é c i a l e si la partie des K relative au plan (2.5) ne dépend que de la génératrice g, c'est-à-dire si l'on a

$$(2.7) \qquad \bar{\alpha}=\alpha \quad \text{ou} \quad \beta=0.$$

Si P est spéciale, alors les équations (2.2) prennent la forme simple

$$(2.8) \qquad KA=\bar{A}, \quad KC=\bar{C}, \quad KA'=\bar{A}', KA''=\bar{A}''+k(\bar{A}+u\bar{C});$$

en particulier pour $k=0$ on obtient l'homographie K_0 telle que

$$(2.9) \qquad K_0A=\bar{A}, \; K_0C=\bar{C}, \; K_0A'=\bar{A}', K_0A''=\bar{A}''.$$

L'homographie K_0 ne dépend que de t; c'est donc une homographie qui est osculatrice tout le long de la génératrice g et que nous allons nommer h o m o g r a p h i e p r i n c i p a l e; cette notion n'est donc définie que si P est une déformation projective s p é c i a l e de s.

La condition analytique (2.7) montre que la déformation projective P est toujours spéciale si toutes les deux développables s, $\bar{s}$ sont des cônes et que P n'est jamais spéciale si une seule d'entre eux est un cône. Si enfin les deux développables s, $\bar{s}$ se composent des tangentes à deux courbes (C), $(\bar{C})$, alors la déformation projective P peut être définie en choisissant d'abord la correspondance base φ qui se reduit maintenant à une correspondance ponctuelle arbitraire entre les deux courbes (C), $(\bar{C})$ et en choisissant ensuite les projectivités déterminantes π. On voit sans peine que pour les P spéciales les deux courbes (C) et $(\bar{C})$, ainsi que la correspondance base φ, peuvent être choisies arbitrairement, tandis que chaque π est soumise à la condition d'être t a n g e n t e à φ, ce qui veut dire que les homographies de S_3 contenant π réalisent le contact analytique du premier ordre (au moins) entre les deux courbes (C), $(\bar{C})$.

3. Les déformations projectives spéciales d'une développable s jouissent d'une propriété importante. Pour y arriver, posons

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} B&=(\bar{p}-p)\,A''+(\bar{p}_1-p_1)A'+(\bar{p}_0-p_0)\,A+(\bar{q}-q)C, \\ \bar{B}&=(p-\bar{p})\,\bar{A}''+(p_1-\bar{p}_1)\bar{A}'+(p_0-\bar{p}_0)\bar{A}+(q-\bar{q})\,\bar{C}, \end{aligned}$$

de sorte que $B=B(t)$, $\bar{B}=\bar{B}(t)$,

$$(3.2) \qquad K_0B=-\bar{B},$$

et considérons les équations

$$(3.3) \qquad K_0X=\bar{X}, \; K_0dX=d\bar{X}, \; K_0d^2X=d^2\bar{X}, \; K_0d^3X=d^3\bar{X}+\bar{B}dt^3,$$

qu'on déduit de (1.2), (1.3), (1.6), (1.7), (2.1), (2.7) et (2.9). Notons que les points B et $\bar{B}$ passent l'un dans l'autre en échangeant mutuellement les deux surfaces s et $\bar{s}$. Ceci étant, considérons une courbe γ tracée sur s et son image $\bar{\gamma}$ moyennant P. En fixant une valeur de t, considérons aussi l'image $K_0\gamma$ de γ moyennant $K_0=K_0(t)$ ainsi que les points X, $\bar{X}$, B et $\bar{B}$ appartenant à la valeur fixée de t. Les deux courbes $\bar{\gamma}$ et $K_0\gamma$ ont en tout cas au point $\bar{X}$ un contact analytique du second ordre. Or les équations (3.3) montrent que, si le point B n'est pas situé sur la tangente à γ en X ou, ce qui est la même chose, si le point $\bar{B}$ n'est pas situé sur la tangente commune à $\bar{\gamma}$ et à $K_0\gamma$ en $\bar{X}$, les projections de $\bar{\gamma}$ et $K_0\gamma$ du point de vue $\bar{B}$ ont un contact analytique du deuxième ordre au point projection de $\bar{X}$; si le point B est situé sur la tangente à γ en X ou, ce qui est la même chose, si le point $\bar{B}$ est situé sur la tangente commune à $\bar{\gamma}$ et à $K_0\gamma$ en $\bar{X}$, alors les deux courbes $\bar{\gamma}$ et $K_0\gamma$ ont en $\bar{X}$ un contact du troisième ordre qui est analytique si (et seulement si) le point B coïncide avec X ou, ce qui est la même chose, si le point $\bar{B}$ coïncide avec $\bar{X}$.

La signification géométrique des points B et $\bar{B}$ étant expliquée, nous partageons les déformations projectives spéciales P d'une développable s en quatre espèces de la façon suivante. P est dite de p r e m i è r e e s p è c e si

(3.4) $$p \neq \bar{p},$$

c'est-à-dire si le point B n'appartient pas au plan Γ tangent à s le long de la génératrice g correspondante de s (et $\bar{B}$ n'appartient pas à $\bar{\Gamma}$); P est dite de s e c o n d e e s p è c e si

(3.5) $$p=\bar{p}, \quad p \neq \bar{p}_1,$$

c'est-à-dire si (pour chaque valeur de t) le point B appartient au plan Γ, mais n'appartient pas à la droite g (et $\bar{B}$ appartient à $\bar{\Gamma}$, mais non á $\bar{g}$); P est dite de t r o i s i è m e e s p è c e si

(3.6) $$p=\bar{p},\ p_1=\bar{p}_1,\ p_0 \neq \bar{p}_0,$$

c'est-à-dire si (pour chaque valeur de t) le point B est situé sur la génératrice g, mais est différent de C (et $\bar{B} \neq \bar{C}$ est situé sur $\bar{g}$); enfin, P est dite de q u a t r i è m e e s p è c e si

(3.7) $$p=\bar{p},\ p_1=\bar{p}_1,\ p_0=\bar{p}_0,\ q \neq \bar{q},$$

c'est-à-dire si (pour chaque valeur de t) le point B coïncide avec C (et $\bar{B}$ avec $\bar{C}$). Nous excluons le c a s b a n a l

(3.8) $$p=\bar{p},\ p_1=\bar{p}_1,\ p_0=\bar{p}_0,\ q=\bar{q},$$

où les points B et $\bar{B}$ deviennent indéterminés et P se réduit à une transformation p r o j e c t i v e de s en $\bar{s}$.

4. On sait [2] que dans le cas de déformation projective d'une surface s n o n d é v e l o p p a b l e les homographies osculatrices réalisent un contact analytique du second ordre non seulement pour chaque courbe γ tracée sur s et passant par le point considéré, mais aussi pour chaque „courbe" γ^* de l'espase S_3^* corrélatif à S_3, les „points" de la-

quelle sont les plans tangents à s le long de λ. Nous allons voir que pour une développable s cette propriété est en général invalide; nous verrons aussi que sa validité ne dépend pas du choix du nombre k en (2.2).

Des équations (1.2), (1.3), (1.6), (1.7), (2.2), (2.3), (2.5) et (2.6) on déduit

$$K\Gamma=\bar{\Gamma},\quad K\Gamma'=\bar{\Gamma}' \tag{4.1}$$

$$K\Gamma''=\bar{\Gamma}''+(p-q+2\beta u)\bar{\Gamma}'+(\cdot)\bar{\Gamma}.$$

La propriété énoncée est donc valide si et seulement si

$$p-q+2\beta u=0. \tag{4.2}$$

Si la déformation projective P n'est pas spéciale, il existe sur la génératrice g un seul point $X=A+uC$ tel que la valeur correspondente de u satisfait à l'équation (4.2). Si P est une déformation projective spéciale de première espèce, alors aucune valeur de u ne satisfait à (4.2). Enfin, pour une déformation projective spéciale d'espèce supérieure à la première la propriété énoncée au commencement de ce n^0 est valide tout le long de g.

5. Si l'on veut étudier de plus près les déformations projectives spéciales, on doit considérer séparément deux cas suivant que s (et par suite aussi $\bar{s}$) est ou non un cône. Commençons par le cas où s et s sont les lieux des tangentes aux deux courbes (C) et (C'). On voit sans peine que, sans restreindre la généralité, on peut supposer qu'on ait

$$a=1 \tag{5.1}$$

en (1.2) et par suite, en vertu de (2.7),

$$\bar{a}=1 \tag{5.2}$$

en (1.6). Les équations (1.3) et (1.7) s'écrivent alors

$$C''''=pC'''+p_1C''+p_0C'+qC, \tag{5.3}$$

$$\bar{C}''''=\bar{p}\bar{C}'''+\bar{p}_1\bar{C}''+\bar{p}_0\bar{C}'+\bar{q}\bar{C}. \tag{5.4}$$

La correspondance base φ (v.n^{0}1) peut être considérée comme une correspondance ponctuelle entre les deux courbes (C) et $(\bar{C})$. Nous allons nommer homographie ponctuelle de φ et indiquer par H la transformation homographique de S_3 qui réalise, pour la valeur envisagée de t, un contact analytique du quatrième ordre de (C) et $(\bar{C})$. L'homographie H est déterminée par les conditions

$$\begin{aligned} HC &= \bar{C}, \\ HC' &= \bar{C}'+\varrho_1\bar{C}, \\ HC'' &= \bar{C}''+2\varrho_1\bar{C}'+\varrho_2\bar{C}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$HC''' = \bar{C}''' + 3\varrho_1 \bar{C}'' + 3\varrho_0 \bar{C}' + \varrho_3 \bar{C},$$

$$(5.6) \qquad HC'''' = C''' + 4\varrho_1 C''' + 6\varrho_2 \bar{C}'' + 4\varrho_3 C' + \varrho_4 C.$$

En remplaçant dans (5.6) C'''' et $\bar{C}''''$ par leurs valeurs (5.3) et (5.4) on obtient, faisant usage de (5.5),

$$pC''' + (p_1 + 3\varrho_1 p)C'' + (p_0 + 2\varrho_1 p_1 + 3\varrho_2 p)\bar{C}' + (q + \varrho_1 p_0 + \varrho_2 p_1 + \varrho_3 p)\bar{C} =$$

$$= (p + 4\varrho_1)C''' + (p_1 + 6\varrho_2)C'' + (p_0 + 4\varrho_3)C' + (q + \varrho_4)C.$$

Or l'arête de rebroussement (C) de la développable s ne peut être une courbe plane de sorte que

$$[C C' C'' \bar{C}'''] \neq 0$$

et on obtient les relations

$$(5.7) \qquad p - p - 4\varrho_1 = 0,$$

$$\bar{p}_1 - p_1 - 3\varrho_1 p + 6\varrho_2 = 0,$$

$$p_0 - p_0 - 2\varrho_1 p_1 - 3\varrho_2 p + 4\varrho_3 = 0$$

qui jointes aux relations (5.5), déterminent sans ambiguité l'homographie ponctuelle H, ainsi que la relation

$$\bar{q} - q - \varrho_1 p_0 - \varrho_2 p_1 - \varrho_3 p + \varrho_4 = 0$$

qui détermine la quantité ϱ_4.

De (1.5), (5.5) et (5.7) il résulte que, les courbes (C) et $(\bar{C})$ et la correspondance base φ étant données, il existe une et une seule déformation projective P de s en s qui soit de seconde espèce ou d'espèce supérieure. Pour chaque valeur de t, la projectivité déterminante π de P fait partie de l'homograghie ponctuelle.

6. En étudiant la correspondance φ entre les courbes (C) et (C) on peut supposer que les facteurs scalaires des points C et $\bar{C}$ soient choisis de telle façon que les déterminants

$$[CC'C''C'''], \quad [C\bar{C}'\bar{C}''C''']$$

aient des valeurs constantes. Des équations (5.3) et (5.4) ou déduit alors que

$$(6.1) \qquad p = p = 0,$$

de manière que

$$(6.2) \qquad C'''' = p_1 C'' + p_0 C' + qC, \qquad C'''' = p_1 \bar{C}'' + p_0 C' + qC.$$

L'homographie ponctuelle H est maintenant donnée par les formules [v. (5.5) et (5.7)].

(6.3) $$HC=\bar{C},\ HC'=\bar{C}',HC''=\bar{C}''+\frac{1}{6}(\bar{p}_1-p_1)\bar{C},$$

$$HC'''=\bar{C}'''+\frac{1}{2}(\bar{p}_1-p_1)C'+\frac{1}{4}(\bar{p}_0-p_0)C.$$

La déformation projective P de seconde espèce ou d'espèce supérieure appartenante à la correspondance base φ porte le point

(6.4) $$X=C'+uC$$

au point

(6.5) $$\bar{X}=\bar{C}'+u\bar{C}.$$

On peut discerner les trois cas possibles de 2-nde, 3-me et 4-me espèce en considérant, à côté de l'homographie ponctuelle H, l'homographie planaire H^* qu'on obtient en appliqant à la définition de H le principe de dualité. Pour trouver l'expression analytique de H'', introduisons, outre les plans [v. (1.2), (1.6), (2.5), (2.6), (5.1) et (5.2)]

(6.6) $$\Gamma=[CC'C''],\ \bar{\Gamma}=[\bar{C}\bar{C}'\bar{C}''],$$

encore les plans

(6.7) $$\Gamma_1=[CC'C'''],\ \Gamma_2=[CC''C'''],\ \Gamma_3=[C'C''C'''],$$

$$\bar{\Gamma}_1=[\bar{C}\bar{C}'\bar{C}'''],\ \bar{\Gamma}_2=[\bar{C}\bar{C}''\bar{C}'''],\bar{\Gamma}_3=[\bar{C}'\bar{C}''\bar{C}'''].$$

On déduit alors de (6.2_1)

$$\Gamma'=\Gamma_1,\ \Gamma_1'=p_1\Gamma+\Gamma_2,\ \Gamma_2'=-p_0\Gamma+\Gamma_3,\ \Gamma_3'=q\Gamma$$

ce qui donne

(6.8) $$\Gamma'=\Gamma_1,\ \Gamma''=p_1\Gamma+\Gamma_2,\ \Gamma'''=(p'_1-p_0)\Gamma+p_1\Gamma_1+\Gamma_3,$$

$$\Gamma''''=(q+p_1''+p_1^2-p_0')\Gamma'+(2p_1'-p_0)\Gamma_1+p_1\Gamma_2.$$

Il en résulte

(6.9) $$\Gamma''''=p_1\Gamma''+(2p_1'-p_0)\Gamma'+(q+p_1''-p_0')\Gamma$$

et, naturellement, on a aussi

(6.10) $$\bar{\Gamma}''''=\bar{p}_1\bar{\Gamma}''+(2\bar{p}_1'-\bar{p}_0)\bar{\Gamma}'+(\bar{q}+\bar{p}_1''-\bar{p}_0')\bar{\Gamma}.$$

Du reste, nous aurions pu éviter le calcul précédent en employant le fait connu que les équations (6.9) et (6.10) sont adjointes à (6.2).

En comparant (6.9) et (6.10) à (6.2) on voit que la dualité conserve la condition (6.1) ainsi que les quantités p_1, $\bar{p}_1$ et remplace les quantités p_0, $\bar{p}_0$ resp. par $2p_1'-p_0$, $2\bar{p}_1'-\bar{p}_0$. On peut donc faire dans (6.3) la substitution

$$\begin{pmatrix} H & C & \bar{C} & p_0 & \bar{p}_0 \\ H^* & \Gamma & \bar{\Gamma} & 2p_1'-p_0 & 2\bar{p}_1'-\bar{p}_0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$H^*\Gamma=\Gamma,\ H^*\Gamma'=\bar{\Gamma}',\ H^*\Gamma''=\Gamma''+\frac{1}{6}(p_1-p_1)\bar{\Gamma},$$

$$H^*\Gamma'''=\bar{\Gamma}'''+\frac{1}{2}(p_1-p_1)\Gamma'+\frac{1}{4}(2p_1'-2p_1'-p_0+\bar{p}_0)\bar{\Gamma}.$$

En appliquant les équations (6.8) et les équations analogues relatives à Γ on obtient

$$H^*\Gamma=\bar{\Gamma},\ H^*\Gamma_1=\bar{\Gamma}_1,\ H^*\Gamma_2=\Gamma_2-\frac{5}{6}(p_1-\bar{p}_1)\bar{\Gamma},$$

$$H^*\Gamma_3=\Gamma_3-\frac{1}{2}(p_1-p_1)\Gamma_1+\left\{\frac{3}{4}(p_0-\bar{p}_0)-\frac{1}{2}(p_1'-p_1'-p_1')\right\}\bar{\Gamma}.$$

Faisant usage de (6.8), on obtient finalement

$$H^*C=C,\ H^*C'=C',\ H^*C''=C''+\frac{1}{2}(p_1-p_1)\bar{C}, \tag{6.11}$$

$$H^*C'''=C'''+\frac{5}{6}(p_1-p_1)C'+\left\{\frac{3}{4}(p_0-p_0)-\frac{1}{2}(p_1'-p_1')\right\}\bar{C}.$$

Rappelons maintenant que dans l'hypothèse actuelle (6.1) on a

$$p_1\neq p_1 \tag{6.12}$$

si la déformation projective spéciale P est de seconde espèce,

$$p_1=\bar{p}_1,\ p_0\neq p_0 \tag{6.13}$$

si P est de troisième espèce, et enfin

$$p_1=\bar{p}_1,\ p_0=\bar{p}_0. \tag{6.14}$$

si P est de quatrième espèce. Les trois cas diffèrent l'un de l'autre par la nature de la correspondance base φ, et on peut décrire géométriquement la différence en comparant les deux homographies H et H^*, données respectivement par (6.3) et par (6.11). En effet, (6.3) et (6.11) montrent que dans le cas de seconde espèce, les deux homographies H et H^* ne transforment toutes les deux de la même façon que les points de la génératrice $g=[CC']$ de s; dans le cas de troisième espèce les points transformés de la même façon par H et par H^* sont ceux qui sont situés au plan tangent Γ à s; enfin dans le cas de quatrième espèce H^* coincide avec H.

Il est aussi utile de comparer, dans les trois cas (6.12), (6.13) et (6.14), l'homographie principale K_0 avec les homographies H et H^*. Rappelons que K_0 est définie par les équations (2.9) qui maintenant, où nous supposons (5.1) et (5.2) peuvent s'écrire

$$K_0C=\bar{C},\ K_0C'=C',\ K_0C''=\bar{C}'',\ K_0C'''=C'''. \tag{6.15}$$

Dans le cas (6.14), toutes les trois homographies K_0, H, H^* coïncident. Dans le cas (6.13), elles transforment toutes de la même façon les points du plan tangent Γ et, si le point M est situé hors de Γ, les quatres points

$$(6.16) \qquad \bar{C}, \quad K_0M, \; HM, \; H^*M$$

sont différents l'un de l'autre, appartiennent toutes à une droite, et leur birapport est égal à 3. Dans le cas (6.12), les homographies K_0, H, H^* ne transforment toutes de la même façon que les points de la génératrice g, et si le point M situé hors de g appartient au plan Γ, les quatre points (6.16) appartiennent toutes à une droite et leur birapport est de nouveau égal à 3.

7. Avant de passer au cas des cônes, il convient d'examiner la question d'existence de déformations projectives spéciales de troisième et quatrième espèce. Nous savons déjà qu'à chaque correspondance base φ entre les courbes (C) et $(\bar{C})$ appartient une et une seule déformation projective spéciale P qui soit de seconde espèce au moins. Pour examiner l'espèce de P relative dax différentes correspondances φ entre les courbes (C) et $(\bar{C})$, en supposant ces courbes fixées, il convient de choisir le paramètre t de manière qu'on ait p_1 0 dans (6.2), c'est-à-dire que (6.2) prenne la forme canonique de Laguerre—Forsyth [3]

$$(7.1) \qquad C'''' = p_0C' + qC.$$

Condition nécessaire et suffisante pour que P soit de troisième ou quatrième espèce est alors que (6.2) prenne aussi la forme canonique

$$(7.2) \qquad \bar{C}'''' = \bar{p}_0\bar{C}' + \bar{q}\bar{C}.$$

En appliquant les résultats classiques de la théorie de la forme canonique de Laguerre—Forsyth on obtient immédiatement que, les courbes (C) et $(\bar{C})$ étant arbitrairement données, il existe toujours ∞^3 correspondance φ entre elles (nous les appellerons correspondances φ canoniques) telles que P soit de troisième espèce au moins. De plus, si une telle correspondance canonique s'obtient en rapportant les deux courbes (C) et $(\bar{C})$ au paramètre commun t, on obtient la correspondance canonique la plus générale entre (C) et $(\bar{C})$ en associant au point du paramètre t de la courbe (C) le point du paramètre.

$$(7.3) \qquad \frac{at+b}{ct+d}$$

de la courbe $(\bar{C})$, où a, b, c, d sont des constantes soumises seulement à la condition $ad-bc \neq 0$. Enfin, on voit que le produit d'une correspondance canonique entre les courbes (C) et $(\bar{C})$ et d'une correspondance canonique entre les courbes $(\bar{C})$ et $(\bar{\bar{C}})$ est toujours une correspondance canonique entre (C) et $(\bar{\bar{C}})$.

Dans l'hypothése (7.1) et (7.2), la correspondance canonique φ entre (C) et $(\bar{C})$ définie par l'égalité du paramètre t donne naissance à une déformation projective P de quatrième espèce (nous dirons alors que φ est stricte) si et seulement si $p_0 = \bar{p}_0$. Il en résulte que le produit de deux correspondances canoniques strictes est aussi une correspondance canonique stricte.

Il est évident que la courbe C étant donnée, la famille des courbes $(\bar{C})$ telles qu'il existe au moins une correspondance canonique stricte entre (C) et $(\bar{C})$ dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. On peut se demander quels sont les couples de courbes (C), $(\bar{C})$ tels que toutes les correspondances canoniques entre (C) et $(\bar{C})$ soient strictes; nous verrons que ceci a lieu si et seulement si chacune des deux courbes appartient à un complexe linéaire [1]. Plus généralement, on peut se demander quels sont les couples (C), (C) tels qu'il existe une famille continue de correspondances canoniques strictes. Comme le produit de deux correspondances canoniques strictes est aussi cannonique strict, on voit sans peine qu'il suffit d'examiner la question pour le cas où $(\bar{C})$ coincide avec (C). Considérons donc une courbe C donée par l'équation (7.1) que nous écrivons de nouveau dans la forme

$$\frac{d^4C}{dt^4} = p_0(t)\frac{dC}{dt} + q(t)\,C. \tag{7.4}$$

En posant

$$\tau = \frac{at+b}{ct+d},\quad ad-bc=\delta \neq 0, \tag{7.5}$$

$$\varrho = (ct+d)^{-3},$$

on obtient

$$\frac{d^4(\varrho C)}{d\tau^4} = P_0(\tau)\frac{d(\varrho C)}{d\tau} + Q(\tau)\,\varrho C$$

où

$$P_0(\tau) = \delta^{-3}\,(ct+d)^6 p_0(t).$$

Il s'agit donc de rechercher quand est ce qu'il existe un groupe continu G de transformations de la forme (7.5) telles que, pour chaque transformation du groupe, on ait

$$(ad-bc)^3 . p_0\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) = (ct+d)^6 . p_0(t). \tag{7.6}$$

On voit immédiatement une première solution $p_0(t) = 0$ qui correspond, on le sait, au cas où la courbe C appartient à un complexe linéaire; le groupe G est dans ce cas le groupe de toutes les transformations de la forme (7.5). Dans la recherche des autres solutions, nous allons supposer que la groupe G a un paramètre; la forme des solutions que nous allons obtenir montre immédiatement que, le cas $p_0 = 0$ excepté, le groupe G ne peut avoir plus d'un paramètre. On peut supposer que la forme canonique (7.4) ait été choisie de telle manière que les transformations du groupe G aient soit la forme

$$\tau = at \tag{7.7}$$

soit la forme

(7.8) $$\tau' = t + b.$$

Dans le cas (7.7), l'équation (7.6) devient

$$a^3 p_0(at) = p_0(t)$$

et on obtient la solution $p_0(t) = \frac{k}{t^3}$,

où k est une constante. Dans le cas (7.8), l'équation (7.6) devient $p_0(t+b) = p_0(t)$, d'où $p_0 = \text{const.}$ et sans restraindre la généralité, $p_0 = 1$. La problème proposé a donc, outre $p_0 = 0$, d'autres solutions consistant de familles de courbes dépendantes d'une fonction arbitraire $f(t)$. A chaque valeur de la constante $k \neq 0$ correspond une telle famille appartenante au groupe (7.7) et déterminée par l'équation

(7.9) $$t^3 C''' = kC' + f(t) \, . \, C \, ;$$

il existe en outre une famille appartenante au groupe (7.8) et déterminée par l'équation

(7.10) $$C''' = C' + f(t) \, . \, C.$$

8. Passons enfin à l'examen du cas où les deux développables s, $\bar{s}$ sont des cônes de sorte que

$$C' = 0, \quad \bar{C}' = 0.$$

Nous savons que dans ce cas la déformation projective P est toujours spéciale; il s'agit d'en discuter l'espèce. Remarquons d'abord qu'on peut remplacer les deux points $A = A(t)$, C qui déterminent le cône s par les deux points $gA + fC$, kC, où $g = g(t) \neq 0$, $f = f(t)$ et $k \neq 0$ est une constante; on voit tout de suite que ceci conduit à remplacer p par $p + 3\frac{g'}{g}$. Or le condition pour que P soit d'espèce supérieure à la première est $p = p$ et on voit sans peine que, les cônes s, $\bar{s}$ et la correspondance base φ entre eux étant arbitrairement donnés, cette condition est toujours réalisable par une infinité de choix de projectivités déterminantes π; si

$$C \to C, \ A \to \bar{A}$$

est un tel choix, alors le choix le plus général de π est

$$C \to \bar{C}, \ A \to k\bar{A} + fC,$$

où $k \neq 0$ est une constante et f est une fonction arbitraire de t. Disons que les projectivités déterminantes π sont b i e n c h o i s i e s si la déformation projective P correspondante est d'espèce supérieure à la première.

Tandis que la différence entre les déformations de première espèce et celles d'espèce supérieure ne dépend pas de φ et concerne uniquement les projectivités déterminantes π, la différence mutuelle entre les déformations de seconde, troisième et quatrième espèce, au contraire, dépend seulement de la correspondance base φ (quant aux π, il faut seulement qu'elles soit bien choisies). En particulier, les π étant bien choisies, la déformation P est de quatrième espèce si et seulement si la correspondance base φ se réduit à une projectivité (entre les étoiles C et $\bar{C}$). De la théorie de la forme canonique de Laguerre—Forsyth on déduit sans peine que, les deux cônes s et s étant donnés, il existe toujours ∞^3 correspondances φ (droite $\rightarrow$ droite) entre eux qui donne naissance (si les π sont bien choisies) à déformations projectives de troisième (ou exceptionnellement quatrième) espèce; si une telle φ est définie en associant l'une à l'autre les génératrices de s et $\bar{s}$ correspondantes à la même valeur de t, alors la φ la plus générale s'obtient en associant à la génératrice t de s la génératrice

$$\frac{at+b}{ct+d}$$

de s, où a, b, c, d sont de constantes, $ad-bc \neq 0$.

On peut aussi considérer deux homographies H et H^* (dépendantes de t) entre les étoiles C et C'. L'homographie H (qu'on peut nommer *homographie réglée*) est définie par la propriété de réaliser dans la génératrice correspondante à la valeur choisie de t, le contact analytique du troisième ordre; la définition de H^* (qu'on peut nommer *homographie planaire*) s'obtient de celle de H en appliquant dans les deux étoiles le principe de dualité. On peut prouver par un calcul facile que

$$H[AC]=[AC],\ H[A'C]=[A'C]+\frac{1}{3}(p-\bar{p})[A\bar{C}], \tag{8.1}$$

$$H[A''C]=[\bar{A}''\bar{C}]+\frac{2}{3}(p-p)[\bar{A}'\bar{C}]+\left\{\frac{1}{3}(p_1-\bar{p}_1)+\frac{2}{9}p(p-\bar{p})\right\}[\bar{A}\bar{C}],$$

$$H^*[AC]=[AC],\ H^*[A'C]=[\bar{A}'C]+\frac{1}{3}(p-p)[\bar{A}\bar{C}],$$

(8.2)

$$H^*[A''C]=[A''C]+\frac{2}{3}(p-\bar{p})[\bar{A}'\bar{C}]+\left\{\frac{1}{3}(2p_1-p'-2\bar{p}_1+\bar{p}')+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{9}(p-\bar{p})(3p+\bar{p})\right\}[\bar{A}\bar{C}]$$

Il en résulte que H et H^* coïncident si la déformation projective P est de la troisième (ou quatrième) espèce; pour une P de seconde espèce, les droites passant par C et ayant de même image dans H et dans H^* sont précisément celles qui appartiennent au plan tangent $[AA'C]$.

Reçu le 16. 1. 1957

BIBLIOGRAPHIE

1. É. Cartan. Sur la déformation projective des surfaces. Annales de l'École Normale supérieure, 37, 3 (1920), 259—356; v. en particulier p. 340—343.
2. V. p. ex. E. Čech. Déformazioni proiettive nel senso di Fubini e generalizzazioni, Conferenze del seminario di matematica dell' univ. di Bari (1955), fasc. 9.
3. E. J. Wilczynski. Projective differential geometry of curves and ruled surfaces. Leipzig, Teubner, 1906. v. en particulier p. 24—26.
4. V. p. ex. G. Fubini et E. Čech. Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. Paris, Gauthier—Villars, 1931, p. 25.

ВЪРХУ ПРОЕКТИВНАТА ДЕФОРМАЦИЯ НА РАЗВИВАЕМИТЕ ПОВЪРХНИНИ

Е. Чех (Прага)

РЕЗЮМЕ

Нека s и $\bar{s}$ са две развиваеми повърхнини в S_3 и нека образуващите им g и $\bar{g}$ са отнесени към един общ параметър t. По такъв начин е дефинирано едно съответствие φ (права $\rightarrow$ права) между s и $\bar{s}$. Избираме за всяко t проективност $\pi(t)$, трансформираща точките $g=g(t)$ в точките $\bar{g}=\bar{g}(t)$. Множеството ∞^1 проективности π е една точкова трансформация P на s в $\bar{s}$. Това значи, че за всяка точка X от s съществува хомографична трансформация $K=K(X)$, съвпадаща с P в околностите на X с точност до безкрайно малки от трети ред. Известно е [1], че тези трансформации P са най-общите проективни деформации на развиваемите повърхнини. Предмет на настоящата работа е изучаването на проективните деформации P, наречени от нас специални и характеризиращи се със свойството, че може да се избере $K=K_0$ по такъв начин, че да зависи само от образуващата g, но не и от положението на X върху g. Тогава хомографията $K=K_0(t)$ е еднозначно определена. P е винаги специална, ако двете развиваеми повърхнини s и $\bar{s}$ са конуси; P никога не е специална, ако само една от тях е конус. Ако накрая s и $\bar{s}$ се образуват от допирателните към две криви (C) и $(\bar{C})$, тъй че φ може да се разглежда като точкова трансформация на (C) в $(\bar{C})$, то P е специална, ако за всяко t съдържащите $\pi(t)$ хомографии в S_3 осъществяват аналитичен контакт поне от първи ред между (C) и $(\bar{C})$.

Тъй като P е специална деформация, съществува (освен в тривиалния случай, когато P е хомографическа трансформация на s в $\bar{s}$) за всяко t такава точка $B=B(t)$, че двойката $(B,\bar{B})$, дето $\bar{B}=K_0(B)$ да има свойството: нека γ е крива върху s и нека X е точката, съответствуваща на избраната стойност на t. Кривите $P\gamma$, $K_0\gamma$ имат в $\bar{X}=PX=K_0X$ аналитичен контакт от втори ред, но за проекциите на $P\gamma$ и $K_0\gamma$ от $\bar{B}$ този ред е >3. Казваме, че P е от първи вид, ако B не принадлежи на равнината T, допирателна към s по про-

дължение на g; втори вид, ако B принадлежи на T; трети вид, ако B принадлежи на g и четвърти вид, ако B е особена точка на (C) и връх на s, ако s е конус.

Основният резултат на настоящата работа се състои в това, че родът на P може да бъде описан по друг начин, който ние ще изложим само за случая, когато s и $\bar{s}$ не са конуси. Тогава съществува за всяко t хомография H, трансформираща пет безкрайно близки точки на (C) в съответните точки от $(\bar{C})$ и хомография H^*, трансформираща пет безкрайно близки оскулачни равнини на (C) в съответните равнини на $(\bar{C})$. Хомографиите H и H^* трансформират по еднакъв начин всички точки на g. Тогава видът на P е $\geqq 2$, ако за всяко t, π е част от H (или H^*). В такъв случай видът $\geqq 3$, ако H и H^* трансформират по еднакъв начин всички точки на оскулачната равнина T и P е от 4-и вид, ако $H \equiv H^*$.

О ПРОЕКТИВНОЙ ДЕФОРМАЦИИ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Э. Чех (Прага)

РЕЗЮМЕ

Пусть s, s две развертывающиеся поверхности в S_3 и пусть их образующие g, g отнесены к некоторому общему параметру t. Таким образом определено соответствие φ (прямая $\rightarrow$ прямая) между s, s. Выбираем для каждаго t проективность $\pi(t)$, переносящая точки $g = g(t)$ в точках $g = \bar{g}(t)$. Множество ∞^1 проективностей π является точечной трансформацией P, s в s. P является и проективной деформацией s в s. Это означает, что для каждой точки X, принадлежащей к s, существует гомографическая трансформация $K = K(X)$, совпадающая с P в окрестности X с точностью до бесконечно-малых 3-его порядка. Известно, [1], что эти трансформации P являются самыми общими проективными деформациями развертывающейся поверхности. Предметом настоящей работы служит изучение проективных деформаций P, называемых нами специальными, и характеризирующихся тем свойством, что возможно выбрать $K = K_0$ таким образом, чтобы она зависела только от образующей g и не зависела от положений X на g. Тогда гомография $K_0 = K_0(t)$ однозначно определена. P всегда специальная, если две развертывающиеся поверхности s и $\bar{s}$ являются конусами; P никогда не специальная, если только одна из них конус. Если, наконец s, s образуются касательными к двум кривым (C), $(\bar{C})$, так что φ можно рассматривать как точечное преобразование (C) в $(\bar{C})$, то P специальная, если для каждого t содержащие $\pi(t)$ хомографии S_3 осуществляют аналитическое касание первого порядка (по крайней мере), между (C) и $(\bar{C})$.

Так как P специальная деформация, существует (изключая тривиалного случая, когда P гомографическая трансформация s в s) для каждого t такая точка $B = B(t)$, что пара (B, B), где $B = K_0(B)$, имеет следующее свойство: пусть γ кривая, проведенная в s, и пусть X точка, соответствующая выбранному значению t. Кривые $P\gamma$, $K_0\gamma$ имеют в $\bar{X} = PX = K_0(X)$ аналитическое касание второго порядка, но для проекций $P\gamma$ и $K_0\gamma$ из B этот порядок 3. Мы гово-

рим, что P первого рода, если B не принадлежит плоскости T, касательной к s вдоль g; второго рода, если B принадлежит T; третьего рода, если B принадлежит g и четвертого рода, если B является точкой возврата (C) или вершиной s, если s конус.

Основной результат настоящей работы состоит в том, что род P может быт описан другим способом, который мы изложим только для случая, когда s и $\bar{s}$ не являются конусами. Тогда существует для каждаго t гомография H, трансформирующая пять бесконечно близких точек (C) в соответствующих точках (C), и гомография H^*, трансформирующая пять бесконечно близких соприкасающихся плоскостей (C) в соответствующих плоскостях $(\bar{C})$. Гомографии H, H^* трансформируют одинаковым образом все точки g. Тогда род P больше двух, если для каждого t π является частью H (или H^*). В таком случае род ≥ 3, если H, H^* трансформируют одинаковым образом все точки соприкасающейся плоскости T, и P имеет род 4, если $H \equiv H^*$.

Работа содержит также условия существования специальных деформаций различных родов.