SUR LA DÉPENDANCE LINÉAIRE DES FONCTIONS

Paul Montel (Paris)

1. Soient $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x)$, des fonctions de la variable réelle x, definies dans un intervalle (a, b) et admettant des derivées jusqu'a l'ordre $(n-1)$ inclus. Le déterminant de Wronski s'écrit,

$$D_n = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_n \\ u'_1 & u'_2 & u'_n \\ \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

en désignant par $u_i^{(j)}$ la dérivée d'ordre j de la fonction u_i.

On sait qui l'annulation de D_n est la condition nécessaire et suffisante pour que les n fonctions soient liées par une relation linéaire et homogène à coefficients constants C_i:

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdot \qquad + C_n u_n = 0.$$

2. La condition fournie par l'évanouissement du déterminant de Wronski n'est plus applicable lorsque certaines fonctions u_i n'admettent pas toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ inclus. Quel critère pouvons-nous alors introduire?

Nous ferons appel dans ce cas au déterminant de Casorati:

$$D_{(n-1)h} = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_n(x) \\ u_1(x+h) & u_2(x+h) & u_n(x+h) \\ \\ u_1(x+\overline{n-1}h) & u_2(x+\overline{n-1}\,h) \cdot & u_n(x+\overline{n-1}h) \end{vmatrix}$$

h désignant une constante, que l'on peut écrire aussi, en désignant par Δu, $\Delta^2 u$, . , $\Delta^{n-1} u$ les différences d'ordre $1, 2, \ldots, (n-1)$ de u pour l'accroissement h

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ \Delta u_1 & \Delta u_2 & \cdots & \Delta u_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta^{n-1} u_1 & \Delta^{n-1} u_2 & \cdots & \Delta^{n-1} u_n \end{vmatrix}$$

3. Nous introduirons dans la suite des déterminants d'un type voisin de celui de Casorati que nous appellerons des d é t e r m i n a n t s m i x t e s d e C a s o r a t i. Ce sont les déterminants de la forme

$$D_{ph, qk} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1(x+h) & u_2(x+h) & \cdots & u_n(x+h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1(x+ph) & u_2(x+ph) & \cdots & u_n(x+ph) \\ u_1(x+k) & u_2(x+k) & \cdots & u_n(x+k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1(x+qk) & u_2(x+qk) & \cdots & u_n(x+qk) \end{vmatrix}$$

avec $p+q=n-1$, h et k désignant des accroissements différents. Pour p ou q nul, on retrouve le déterminant de Casorati.

4. Considérons le cas de deux fonctions $u(x)$, $v(x)$, vérifiant les conditions

$$D_h = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(x+h) & v(x+h) \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(x+k) & v(x+k) \end{vmatrix} = 0,$$

le rapport h/k étant irrationnel.

La relation $D_h=0$ donne, si $u(x+h) \neq 0$,

$$v(x) = f(x)\, u(x),$$

$f(x)$ désignant une fonction périodique de période h.

La relation $D_k=0$ devient alors, en supposant par exemple $u(x) \neq 0$,

$$\begin{vmatrix} u(x) & v(x) - f(x)\, u(x) \\ u(x+k) & v(x+k) - f(x)\, u(x+k) \end{vmatrix} = 0$$

ou
$$v(x+k) = f(x)\, u(x+k).$$

Or
$$v(x+k) = f(x+k)\, u(x+k),$$

donc
$$u(x+k)\, [f(x+k) - f(x)] = 0,$$

et, si $u(x+k) \neq 0$, $\Delta_k f = 0$. On a donc

$$\Delta_h f = \Delta_k f = 0$$

et, comme h/k est irrationnel, f est une constante.

Considérons encore le cas de trois fonctions u, v, w. Si elles sont liées par une relation linéaire à coefficients constants, les déterminants

$$D_{2h}=\begin{vmatrix} u & v & w \\ u(x+h) & v(x+h) & w(x+h) \\ u(x+2h) & v(x+2h) & w(x+2h) \end{vmatrix}$$

$$D_{h,k}=\begin{vmatrix} u & v & w \\ u(x+h) & v(x+h) & w(x+h) \\ u(x+k) & v(x+k) & w(x+k) \end{vmatrix}$$

$$D_{2k}=\begin{vmatrix} u & v & w \\ u(x+k) & v(x+k) & w(x+k) \\ u(x+2k) & v(x+2k) & w(x+2k) \end{vmatrix}$$

sont nuls. Réciproquement, supposons nuls les trois déterminants et h/k irrationnel. $D_{2h}=0$ montre que l'on a, si $D_h[u(x+h), v(x+h)]\neq 0$, par exemple,

$$w=fu+gv,$$

$$w(x+h)=fu(x+h)+gv(x+h),$$

f et g étant périodiques de période h.

En portant ces valeurs dans $D_{h,k}$, on obtient, par une combinaison évidente portant sur les deux premières colonnes,

$$D_{h,k}=\begin{vmatrix} u(x) & v(x) & 0 \\ u(x+h) & v(x+h) & 0 \\ u(x+k) & v(x+k) & w(x+k)-fu(x+k) \\ & & -gv(x+k) \end{vmatrix}=0.$$

On en déduit, puisque $D_{h,k}$ est nul, si $D_h(u, v)\neq 0$,

$$w(x+k)=fu(x+k)+gv(x+k).$$

En portant enfin les valeurs de $w(x)$ et $w(x+k)$ dans D_{2k}, on obtient

$$D_{2k}=\begin{vmatrix} u(x) & v(x) & 0 \\ u(x+k) & v(x+k) & 0 \\ u(x+2k) & v(x+2k) & w(x+2k)-fu(x+2k)-gv(x+2k) \end{vmatrix}=0,$$

d'où, si $D_k(u, v)\neq 0$

$$w(x+2k)=fu(x+2k)+gv(x+2k).$$

Les égalités

$$w(x)=fu(x)+gv(x),$$
$$w(x+k)=fu(x+k)+gv(x+k),$$
$$w(x+2k)=fu(x+2k)+gv(x+2k)$$

montrent comme précédemment que l'on a, si $D_k[u(x+k), v(x+k)]\neq 0$,

$$\Delta_k f=\Delta_k g=0,$$

et, comme

$$\Delta_h f=\Delta_h g=0,$$

et que h/k est irrationnel, f et g sont des constantes.

On est ainsi conduit à la proposition générale suivante:

Théorème. Pour que les fonctions continues $u_1(x)$, $u_2(x), \dots, u_n(x)$ soient liées par une relation linéaire à coefficients constants, il faut et il suffit que les déterminants

$$D_{(n-1)h},\ D_{(n-2)h,\,k},\ D_{(n-3)h,\,2k},\ \dots,\ D_{h,\,(n-2)k},\ D_{(n-1)k}$$

soient tous nuls et que le rapport h/k soit irrationnel.

La démonstration ne diffère pas de celle donnée pour $n=3$; elle introduit seulement de plus longues écritures. Les n déterminants peuvent être aisément remplacés par n autres possèdant les mêmes propriétés et de même forme.

5. Au cours de la démonstration, nous avons été amené à introduire différentes restrictions relatives, dans le cas de $n=3$, à certains déterminants D_h et D_k. Au début, on a supposé que l'un des trois D_h, pous $x+h$, par exemple celui relatif à $u(x+h)$, $v(x+h)$ est différent de zéro; la seconde identité $D_{hk}=0$ introduit la condition que l'un des D_h pour x est différent de zéro; nous avons pris par exemple celui relatif à u, v. La condition $D_{2k}=0$, nous a conduit à supposer qu'un D_k, relatif à u, v, est différent de zèro. Enfin, nous avons dû admettre que le D_k relatif à $u(x+k)$, $v(x+k)$ n'est pas nul.

Remarquons que si deux D_h sont nuls, le troisième l'est aussi en général; si donc les trois D_h ne sont pas nuls à la fois, un seul peut être nul; il en est de même pour les D_k. On peut donc choisir un couple des trois fonctions u, v, w pour lequel les D_h et D_k correspondants sont tous deux différents de zéro.

En résumé, il suffit de supposer que les trois D_h ne sont pas nuls à la fois pour x et $x+k$, ni les trois D_k, pour x et $x+k$.

Cette conclusion s'étend aisément au cas général où le nombre n des fonctions est supérieur à 3.

Reçu le 8. 7. 1957

ВЪРХУ ЛИНЕЙНАТА ЗАВИСИМОСТ МЕЖДУ ФУНКЦИИТЕ

П. Монтел (Париж)

РЕЗЮМЕ

За да бъдат n функции на една реална променлива свързани с една линейна зависимост с постоянни коефициенти, е необходимо и достатъчно детерминантата на Вронски да е тъждествено равна на нула. Това предполага, че тези функции имат производни до ред $n-1$. Изучава се случаят, когато това условие не е изпълнено, като детерминантата на Вронски се замества с детерминантата на Казорати. Така се получава една система от n детерминанти, чието анулиране влече след себе си съществуването на линейна зависимост.

О ЛИНЕЙНОИ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ

П. Монтел (Париж)

РЕЗЮМЕ

Необходимым и достаточным условием для существования линейной зависимости с постоянными коэффициентами между n функциями одной вещественной переменной является тождественное исчезновение определителя Вронского. При этом делается предположение, что функции дифференцируемы $n-1$ раз. В этой работе изучается противоположный случай, заменяя определитель Вронского определителем Казорати. Получается система n определителей, исчезновение которых влечет за собой существование линейной зависимости.