SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DE FOURIER DES FONCTIONS PÉRIODIQUES À VARIATION BORNÉE

J. Favard (Paris)

1. Le plus ancien des résultats, de quelque généralité, relatifs à la convergence vers la fonction du développement en série de Fourier d'une fonction périodique, est celui de Dirichlet qui concerne les fonctions à variation bornée dans un cas simple. Ce résultat apparaît encore aujourd'hui, théoriquement au moins, comme l'un des plus difficiles des résultats de cette nature, car on n'a pas encore réussi à le rattacher à un principe suffisamment général.

Cette note constitue un essai dans cette direction, en ce sens qu'on y trouvera la condition nécessaire et suffisante pour qu'un procédé triangulaire de sommation de la série de Fourier réussisse pour toute fonction à variation bornée, soit qu'il s'agisse de la convergence faible, soit qu'il s'agisse de la convergence forte, dans le cas de fonctions continues dans un intervalle contenu dans la période.

Dans les espaces de Banach, où il s'agit de l'approximation par des polynômes formés à partir d'un ensemble fondamental, le théorème de Banach—Steinhaus (ou de la résonance) permet de donner une réponse complète à la question et si, théoriquement, on ne peut souhaiter mieux, au point de vue technique on doit donner des cas particuliers simples, mieux adaptés aux besoins de la pratique et, à bon droit, on peut en souhaiter d'autres que ceux déjà connus. Mais ce résultat ne suffit pas à donner une explication valable du résultat de Dirichlet, et la raison en est dans le fait que, si l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues, il ne l'est pas dans l'espace des fonctions continues à variation borneé où la norme est la variation dans une période (que nous prendrons égale à 2π). En d'autres termes, pour une telle fonction $x(t)$, et pour $\varepsilon>0$ donné quelconque, il est possible de trouver un polynome trigonométrique $p(t)$ tel que:

$$|x(t)-p(t)|<\varepsilon, \text{ pour } -\infty<t<+\infty$$

mais c'est seulement dans le cas où $x(t)$ est absolument continue, qu'on peut trouver, pour tout ε, un polynome $q(t)$ tel que:

$$\underset{0\leqslant t\leqslant 2\pi}{\text{variation}}\,[x(t)-q(t)]=\int_0^{2\pi}|d\,(x-q)|<\varepsilon.$$

Le phénoméne mis en évidence dans cette note est l'existence d'une fonction particulière à variation bornée:

(1) $$l(\tau)=\frac{\pi-\tau}{2}, \text{ pour: } 0<\tau<2\pi;\ l(0)=l(2\pi)=0$$

qu'on peut appeler un *mannequin* de l'ensemble des fonctions à variation bornée, et qui est telle que si un procédé de sommation réussit pour cette fonction, alors il réussit pour toute fonction à variation bornée.

Nous ferons remarquer ensuite, sur des exemples, que le théorème de Banach-Steinhaus sur la convergence peut, dans des cas classiques, s'exprimer au moyen d'un mannequin (qui peut appartenir à un autre espace); le résultat donné n'apparaît donc pas comme isolé.

2. Soit

$$x(t)\backsim\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

une fonction à variation bornée périodique et de période 2π, et sa série de Fourier $\left[x(t)=x(t+2\pi),\ x(t)=\frac{x(t+0)+x(t-0)}{2}\right]$;

soit γ un procédé de sommation défini par les constantes:

$$\gamma_n^k\ (k=1,\ldots,n-1;\ n=2,3,\ldots),$$

en l'appliquant à la série de Fourier de $x(t)$, nous sommes amenés à considérer la suite de polynome:

$$\sigma_n^\gamma[x(t)]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_n^k(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

Au moyen d'une intégration par parties, on trouve facilement:

(2) $$x(t)-\sigma_n^\gamma[x(t)]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[l_n^\gamma(\tau)-l(\tau)]\,dx(t+\tau)$$

où $l(\tau)$ est définie par (1), et où on a posé:

$$l_n^\gamma(\tau)=\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_n^k\frac{\sin k\tau}{k}.$$

Examinons d'abord, pour mémoire, le cas où $x(t)$ est absolument continue, nous écrirons alors plus volontiers:

(2') $$x(t)-\sigma_n^\gamma[x(t)]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[l_n^\gamma(\tau-t)-l(\tau-t)]\,x'(\tau)\,d\tau$$

et, pour t donné avec, par exemple: $0<t<2\pi$, nous examinerons d'abord seulement le probléme de la convergence des fonctionnelles $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ vers $x(t)$. La fonction $x'(t)$ appartient à l'espace L, et est assujettie à la condition: $\int_0^{2\pi}x'(\tau)d\tau=0$, mais cette restriction est ici sans importance car, en ajoutant une constante à x', le second membre de (2) ne change pas.

D'après le théorème de Banach-Steinhaus et d'après un principe connu de convergence*, pour que $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ converge vers $x(t)$, quelle que soit la fonction absolument continue $x(t)$, il faut et il suffit:

1° qu'il existe une constante M telle que:

$$|I_n^\gamma(\tau-t)| < M$$

ou, comme il s'agit de fonctions périodiques:

$$|I_n^\gamma(\tau)| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_n^k \frac{\sin kt}{k}\right| < M \tag{3}$$

2° que, pour tout $k > 1$, on ait:

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k = 1. \tag{4}$$

D'après un résultat de Lebesgue, cette condition peut d'ailleurs être remplacée par:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\tau I_n^\gamma(t)\,dt \qquad \int_0^\tau I(t)\,dt \qquad (0<\tau<2\pi)$$

ou, ce qui revient au même par:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_n^k \frac{\cos k\tau}{k^2}\right] = \pi\frac{\tau}{2} - \frac{\tau^2}{4} - \frac{\pi^2}{6}. \tag{4'}$$

On remarque que la condition (3) est indépendante de t, c'est-à-dire que la convergence en un point t, entraîne la convergence uniforme de $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ vers $x(t)$, pour toutes les valeurs de t.

Bien que tout ceci ne constitue qu'un rappel de résultats familiers, nous énoncerons le résultat:

Théorème I. *Pour que le procédé de sommation réussisse pour toute fonction absolument continue, il est nécessaire et suffisant que les conditions* (3) *et* (4), *ou* (4') *soient remplies, et il s'agit alors de la convergence forte, la convergence faible seule ne se présente pas.*

3. Dans le cas général, pour t donné, soit $\delta < \pi$ un nombre donné, considérons les fonctions à variation bornée, nulles pour: $t \quad \tau+t<\delta+t$ et $2\pi-\delta+t<\tau+t \quad 2\pi+t$, il suit alors de (2) que, pour que $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ converge vers $x(t)$, il est nécessaire et suffisant que $I_n^\gamma(\tau)$ converge faiblement vers $I(\tau)$ dans: $\delta<\tau<2\pi-\delta$; comme, d'autre part, d'après (3), on doit avoir: $|I_n^\gamma(\tau)| < M$, nous exprimerons ce fait en disant que la suite $\{I_n^\gamma(\tau)\}$, *doit converger faiblement vers* $I(\tau)$ *dans l'intervalle*: $0<\tau<2\pi$, c'est-à-dire qu'on doit avoir, outre la condition (2), la condition:

* Pour l'exposé des principes de convergence voir, par exemple, mon article: Sur l'approximation dans les espaces vectoriels (Annali di Matematica, 4e série, t. 29 (1949).

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} I_n^\gamma(\tau) = I(\tau), \text{ pour } 0 < \tau < 2\pi$$

qui peut aussi s'exprimer au moyen de la condition (4) en ajoutant que la suite $\{I_n^\gamma(\tau)\}$ doit être convergente quel que soit τ; la limite est alors $I(\tau)$ d'après le fait bien connu que la série de Fourier de cette fonction est uniformément convergente dans: $\delta < \tau < 2\pi - \delta$.

On a donc le théorème suivant:

Théorème II. Pour que le procédé de sommation γ réussisse pour toute fonction à variation bornée, il est nécessaire et suffissant que $I_n^\gamma(\tau)$ converge faiblement vers $I(\tau)$ dans $0 < \tau < 2\pi$, ou que les conditions (3) et (5) soient réalisées, ou que les conditions (3) et (4) soient realisées et que $\{I_n^\gamma(\tau)\}$ converge pour tout τ de l'intervalle $(0, 2\pi)$.

De là suit seulement que, pour une fonction à variation bornée, continue dans un intervalle, il y a convergence faible, dans l'intervalle, de la suite $\{\sigma_n^\gamma[x(t)]\}$ vers $x(t)$; occupons nous à présent de la convergence forte.

Pour qu'elle ait lieu, il est d'abord nécessaire que l'égalité (5) ait lieu uniformément dans tout intervalle: $\delta < \tau < 2\pi - \delta$; cela est aussi suffisant, car soit $x(t)$ une fonction à variation bornée continue dans un intervalle (t_0, t_1), prenons $\eta > 0$ quelconque, mais tel que: $t_0 + \eta < < t_1 - \eta$, plus choisissons un nombre $\delta\,(0 < \delta < \eta)$ assez petit pour que la variation de x dans tout intervalle $(t-\delta, t+\delta)$, avec: $t_0 + \eta \quad t \leq t_1 - \eta$, soit inférieure à un nombre $\varepsilon > 0$ donné; prenons enfin n assez grand pour que $I_n^\gamma(\tau) - I(\tau) < \varepsilon$, pour $\delta \quad \tau \quad 2\pi - \delta$, en écrivant:

$$x(t) - \sigma_n^\gamma[x(t)] \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{2\pi-\delta}^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}$$

il vient:

$$x(t) - \sigma^\gamma[x(t)] < \frac{\varepsilon}{\pi}\left(M \cdot \frac{1}{2} + \int_0^{2\pi} dx\right).$$

Cette inégalité démontre le résultat, donc:

Théorème III. Pour que $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ converge uniformément vers $x(t)$ dans tout intervalle où $x(t)$ est continue, il est nécessaire et suffisant que l'égalité (5) ait lieu uniformément dans $0 < \tau < 2\pi$.

Il est facile de voir qu'il existe des procédés γ donnant la convergence faible, mais non la convergence forte en général; il suffit, pour cela, de partir d'une suite de fonctions $k_n(\tau)$ continues à variation bornée convergeant faiblement, mais non fortement, vers $I(\tau)$ dans: $\delta \leq t \leq 2\pi - \delta$ et telles que $k_n(\tau) = I(\tau)$ dans $0 \leq \tau \leq \delta$ et $2\pi - \delta \leq \tau \leq 2\pi$, avec $k_n(\tau + \pi) = k_n(\tau)$ où δ est un nombre donné, puis d'approcher $k_n(\tau)$ d'aussi près qu'on le veut par une somme partielle de sa série de Fourier: un exemple est figuré ci-contre.

Remarquons encore que la condition (5) est relative à $I(\tau)$, tandis que la condition (4') est relative à sa primitive; (5) entraine evidemment (4'), mais la réciproque n'est pas exacte; enfin la condition (5) seule n'entraîne pas la condition (3), on le voit comme ci-dessus, en approchant $l(\tau)$ par des fonctions qui n'en différent que dans des intervalles aussi petits qu'on veut ayant 0 et 2π pour l'une de leurs extrémités.

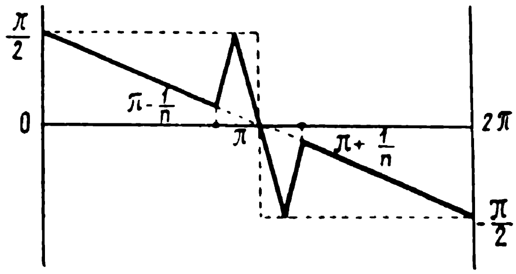

Fig. 1

4. Ainsi, les conditions nécessaires et suffisantes, pour la convergence forte ou faible, s'expriment au moyen du mannequin: $l(\tau) = \bar{B}_1\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)$, où $B_1(\tau)$ désigne le polynome de Bernoulli de degré 1, et $\bar{B}_1$ la fonction périodique de période 1, définie par $\bar{B}_1(\tau) = B_1(\tau)$, pour $0<\tau<1$.

Le résultat précédent peut être étendu au cas des fonctions admettant une dérivée d'ordre $(p-1)$ à variation bornée, le mannequin sera alors la fonction $\bar{B}_p\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)$, où $B_p(\tau)$ désigne le polynome de Bernoulli de degré p, et $\bar{B}_p(\tau)$ la fonction périodique le période 1, égale à $B_p(\tau)$ pour $0<\tau<1$.

D'ailleurs, dans bien d'autres espaces, les conditions nécessaires et suffisantes de convergence peuvent s'exprimer au moyen d'un mannequin; reprenons, par exemple, la formule (2'), et supposons que $x'(\tau)$ appartienne à l'espase $L^r (r>1)$, alors, pour que $\{\sigma_n^\nu[x(t)]\}$ converge faiblement vers $x(t)$, il est nécessaire et suffisant que $\{l_n^\nu(t)\}$ converge faiblement vers $l(\tau)$ dans l'espace $L^s \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1\right)$.

Par contre, on voit immédiatement qu'il n'existe pas de mannequin pour l'espace des fonctions continues ou appartenant à L'.

En s'en tenant aux développements en séries trigonomètriques, on peut se demander dans quels espaces il existe un mannequin: c'est là un premier problème.

En voici un second: on voit tout de suite que, pour le problème dont nous venons de nous occuper, avec $l(\tau)$, les fonctions: $kl(\tau-\tau_0)+ +P(\tau)$, où k et τ_0 sont des constantes quelconques, et P un polynome trigonomètrique quelconque, sont aussi des mannequins, mais en existe-t-il d'autres?

Belgrade, Institut mathématique
de l'Académie Serbe des Sciences

Reçu le 20. 3. 1957

ВЪРХУ СУМИРАНЕТО ФУРИЕРОВИТЕ РЕДОВЕ НА ПЕРИОДИЧНИ ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕНА ВАРИАЦИЯ

Ж. Фавар (Париж)

РЕЗЮМЕ

Дават се необходими и достатъчни условия за това, сумирането γ, дефинирано чрез константите $\{\gamma_n^k\}$ (вж. § 2), да сумира фуриеровият ред на всяка периодична с период 2π, функция $x(t)$ с ограничена вариация, т. е. за това $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ да клони към $x(t)$ силно или слабо, ако $x(t)$ е непрекъсната.

Доказва се съществуването на функцията $I(\tau)$, дефинирана с (1) със свойството: ако един метод на сумиране сумира фуриеровия ред на $I(\tau)$, той сумира и фуриеровия ред на всяка периодична функция с ограничена вариация.

Означавайки с $\{I_n^\gamma(t)\}$ редицата от тригонометрични полиноми, получена при сумирането на реда на $I(t)$ по метода се получават следните резултати:

1. Когато $x(t)$ е абсолютно непрекъсната (случай, когато се прилага теоремата на Банах-Щайнхауз), търсените условия се дават с (3) и (4) или (4′) и винаги имаме силна сходимост.

2. В общия случай условията се дават от (3) и (5).

3. За да клони $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ равномерно към $x(t)$ във всеки интервал на непрекъснатост за $x(t)$, е необходимо и достатъчно (5) да е в сила равномерно в $0<t<2\pi$.

На фигурата е показано как може да се построи пример на сумационен метод, за който $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ клони в общия случай само слабо към непрекъснатата функция $x(t)$.

О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ФУРИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Ж. Фавар (Париж)

РЕЗЮМЕ

В этой работе даются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы суммирование γ, определенное константами $\{\gamma_n^k\}$ (см. § 2), суммировало ряд каждой периодической (с периодом 2π) функции ограниченной вариации, т. е. чтобы $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ стремилась сильно (или слабо, когда $x(t)$ непрерывна) к $x(t)$.

Доказывается существование функции $l(\tau)$ определенной (1) и такой, что применимость метода γ для $l(\tau)$ влечет за собой применимость этого метода и для каждой периодической функции ограниченной вариации.

Означая через $\{l_n^\gamma(t)\}$ последовательность тригонометрических многочленов, полученную при применении γ к $l(\tau)$, имеем:

1. Если $x(t)$ абсолютно непрерывна (случай применения теоремы Банаха-Штейнгауза), искомые условия даются (3) и (4) или (4′) и сходимость является всегда сильной.

2. В общем случае условия выражаются через (3) и (5).

3. Для того, чтобы $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ стремилось равномерно к $x(t)$ в каждом интервале непрерывности $x(t)$, необходимо и достаточно равномерное выполнение (5) в $0<t<2\pi$.

Фигура показывает, как построить пример суммирования γ, такого, что $\sigma_n^\gamma[x(t)]$ сходилось бы в общем случае только слабо к непрерывной функции $x(t)$.