ВЪРХУ ДВИЖЕНИЕТО НА ТВЪРДО ТЯЛО С ПОСТОЯННА ТОЧКА

Ив. Ценов

В тази работа ще изведем уравненията на Ойлер и Резал за движението на твърдо тяло с постоянна точка O, като приложим уравненията на аналитичната динамика [1], [2].

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T''}{\partial \ddot{q}_i}=\frac{\partial \delta'\tau}{\partial \delta q_i} \qquad i=1,\ 2, \ldots, s, \tag{1}$$

в които $q_1, q_2, \ldots, q_s$ са обобщените координати на материална система, T'' — втората пълна производна на кинетичната енергия T, $\delta'\tau$ — сумата от виртуалните работи на дадените сили и на нови сили, произхождащи от функцията на сили ${}^3/{}_2T$, разглеждана като функция само на обобщените координати и на времето, т. е. разгледана с постоянни обобщени скорости.

Движението на твърдото тяло спрямо постоянната координатна система $Ox_1y_1z_1$ отнасяме на подвижните оси $Oxyz$ в тялото и в пространството, на които движението относно осите $Ox_1y_1z_1$ се определя с ротационния вектор $\vec{\Omega}$. Ако векторът $\vec{\omega}$ е абсолютната ротация на тялото относно осите $Ox_1y_1z_1$, то неговата релативна ротация относно $Oxyz$ се дава с вектора $\vec{\omega}-\vec{\Omega}$ (собствена ротация на тялото); векторът $\vec{\Omega}$ е преносната ротация на тялото следствие движението на $Oxyz$ спрямо $Ox_1y_1z_1$. Така че абсолютният вектор $\vec{\omega}$ е геометричната сума от релативния вектор $\vec{\omega}-\vec{\Omega}$ и от преносния вектор $\vec{\Omega}$: $\vec{\omega}=(\vec{\omega}-\vec{\Omega})+\vec{\Omega}$. Нека аналитичните изрази на векторите $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$ относно осите $Oxyz$ са

$$\vec{\omega}=p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}, \qquad \vec{\Omega}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}.$$

Към тези оси ще отнасяме и всички вектори, които ще се явят понататък.

Допускаме, че осите Ox, Oy, Oz са главни инерчни оси и инерчните моменти A, B, C спрямо тези оси са постоянни, макар че осите се движат в тялото. Тогава кинетичната енергия на тялото се дава с равенството

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2).$$

Да изчислим втората производна на функцията T относно постоянните оси $Ox_1y_1z_1$, като производните на величините спрямо тези оси ще означаваме с „$'$" или „$\frac{d'}{dt}$", вариациите с „δ'", а производните спрямо подвижните оси $Oxyz$ — с „ $\dot{}$ " или „$\frac{d}{dt}$", а вариациите — с „δ". Имаме

$$T'=App'+Bqq'+Crr',$$

$$T''=Ap'^2+Bq'^2+Cr'^2+App''+Bqq''+Crr'',$$

гдето неизвестните p', q', r' и p'', q'', r'' са алгебричните проекции върху осите $Oxyz$ на производните $\vec{\omega}'$ и $\vec{\omega}''$ на абсолютния вектор $\vec{\omega}$ спрямо осите $Ox_1y_1z_1$: $\vec{\omega}'=p'\vec{i}+q'\vec{j}+r'\vec{k}$, $\vec{\omega}''=p''\vec{i}+q''\vec{j}+r''\vec{k}$. От друга страна тези производни на $\vec{\omega}$ са равни на производните на релативния вектор $\vec{\omega}-\vec{\Omega}$ относно осите $Oxyz$, увеличени с производните на преносния вектор $\vec{\Omega}$ спрямо осите $Ox_1y_1z_1$:

$$\vec{\omega}'=(\dot{\vec{\omega}}-\dot{\vec{\Omega}})+\vec{\Omega}'=(\dot{\vec{\omega}}-\dot{\vec{\Omega}})+(\dot{\vec{\Omega}}+\vec{\Omega}\times\vec{\Omega})=(\dot{\vec{\omega}}-\dot{\vec{\Omega}})+\dot{\vec{\Omega}},$$

$$\vec{\omega}''=(\ddot{\vec{\omega}}-\ddot{\vec{\Omega}})+(\ddot{\vec{\Omega}}+\vec{\Omega}\times\dot{\vec{\Omega}}).$$

Прочее

$$\vec{\omega}'=\dot{\vec{\omega}},\quad \vec{\omega}''=\ddot{\vec{\omega}}+\vec{\Omega}\times\dot{\vec{\Omega}};$$

тогава

$$p'=\dot{p},\quad q'=\dot{q},\quad r'=\dot{r};$$

$$p''=\ddot{p}+Q\dot{R}-R\dot{Q},\ q''=\ddot{q}+R\dot{P}-P\dot{R},\ r''=\ddot{r}+P\dot{Q}-Q\dot{P}$$

и функцията T'' приема вида

$$T''=A\dot{p}^2+B\dot{q}^2+C\dot{r}^2+A p\ddot{p}+Bq\ddot{q}+Cr\ddot{r}+$$

$$(2)\qquad +(BqR-CrQ)\dot{P}+(CrP-ApR)\dot{Q}+(ApQ-BqP)\dot{R}.$$

Уравнения на Ойлер. Нека тялото е неизменно свързано с осите $Oxyz$; тогава релативата ротация $\vec{\omega}-\vec{\Omega}=0$ и абсолютната ротация $\vec{\omega}$ е равна на преносната ротация $\vec{\Omega}$; при $P=p$, $Q=q$, $R=r$ от (2) имаме

$$T''=A\dot{p}^2+B\dot{q}^2+C\dot{r}^2+Ap\ddot{p}+Bq\ddot{q}+Cr\ddot{r}+$$

$$+(B-C)qr\dot{p}+(C-A)rp\dot{q}+(A-B)pq\dot{r}.$$

При движението на тялото спрямо осите $Ox_1y_1z_1$ нека $d\mu_1$, $d\mu_2$ и $d\mu_3$ са елементарните ъгли, на които трябва да завъртим тялото около осите Ox, Oy, Oz, за да го доведем от едно положение в друго безкрайно близко положение. Тогава ние можем да вземем за обобщени координати на тялото ъглите μ_1, μ_2, μ_3 и да заменим абсолютния ротационен вектор $\vec{\omega}=p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}$ с ъгловата скорост $\frac{d\vec{\mu}}{dt}=\dot{\vec{\mu}}=\dot{\mu}_1\vec{i}+\dot{\mu}_2\vec{j}+\dot{\mu}_3\vec{k}$, така че получаваме равенствата

$$p=\dot{\mu}_1, \qquad q=\dot{\mu}_2, \qquad r=\dot{\mu}_3.$$

Тогава функцията T'', изразена с обобщените координати, приема вида

$$T''=A\ddot{\mu}_1^2+B\ddot{\mu}_3^2+C\ddot{\mu}_2^2+(B-C)\dot{\mu}_2\dot{\mu}_3\ddot{\mu}_1+$$
$$+(C-A)\dot{\mu}_3\dot{\mu}_1\ddot{\mu}_2+(A-B)\dot{\mu}_1\dot{\mu}_2\ddot{\mu}_3+\cdot \tag{3}$$

като изпуснахме израза $Ap\ddot{p}+Bq\ddot{q}+Cr\ddot{r}$, понеже не зависи от $\ddot{\mu}_1$, $\ddot{\mu}_2$, $\ddot{\mu}_3$.

Да изчислим сега функцията $\delta'\tau$, като заменяме ротацията $\vec{\omega}$ с ъгловата скорост $\vec{\mu}=\mu_1\vec{i}+\mu_2\vec{j}+\mu_3\vec{k}$. Ако P_i е точка от тялото и $\vec{F}_i$ е приложената ѝ дадена сила, то виртуалната работа на дадените сили е

$$\Sigma\vec{F}_i\,.\,\delta'\overrightarrow{OP_i}=\Sigma\vec{F}_i\,.\,(\delta\vec{\mu}\times\overrightarrow{OP_i})=\Sigma(\overrightarrow{OP_i}\times\vec{F}_i)\,.\,\delta\vec{\mu}=L\delta\mu_1+M\delta\mu_2+N\delta\mu_3,$$

където L, M, N са сумите от моментите на дадените сили относно осите Ox, Oy, Oz.

Виртуалната работа на силите, произхождащи от функцията на сила $^3/_2\,T$, е равна на $^3/_2\,\delta'T$. Вариацията на T спрямо $Ox_1y_1z_1$ е

$$\delta'T=A\dot{\mu}_1\delta\mu'_1+B\dot{\mu}_2\delta\mu'_2+C\dot{\mu}_3\delta\mu'_3, \tag{4}$$

където неизвестните $\delta\mu'_1$, $\delta\mu'_2$, $\delta\mu'_3$ са алгебричните проекции върху осите $Oxyz$ на вариацията $\delta\vec{\mu}'$ на производната на вектора $\vec{\mu}=\mu_1\vec{i}+\mu_2\vec{j}+\mu_3\vec{k}$ спрямо осите $Ox_1y_1z_1$: $\delta\vec{\mu}'=\delta\mu'_1\vec{i}+\delta\mu'_2\vec{j}+\delta\mu'_3\vec{k}$. Тази вариация се дава с равенството

$$\delta\vec{\mu}'=\delta(\dot{\vec{\mu}}+\vec{\mu}\times\dot{\vec{\mu}})=\delta\dot{\vec{\mu}}+\delta\vec{\mu}\times\dot{\vec{\mu}}+\vec{\mu}\times\delta\vec{\mu}=\dot{\vec{\mu}}\times\delta\vec{\mu},$$

понеже $\delta\dot{\vec{\mu}}=\delta\dot{\mu}_1\vec{i}+\delta\dot{\mu}_2\vec{j}+\delta\dot{\mu}_3\vec{k}=0$, тъй като функцията T се разглежда с постоянни обобщени скорости $\dot{\mu}_1$, $\dot{\mu}_2$, $\dot{\mu}_3$. От сравнението на двата израза на $\delta\vec{\mu}'$ получаваме

$$\delta\mu'_1=\dot{\mu}_2\delta\mu_3-\dot{\mu}_3\delta\mu_2, \qquad \delta\mu'_2=\dot{\mu}_3\delta\mu_1-\dot{\mu}_1\delta\mu_2, \qquad \delta\mu'_3=\dot{\mu}_1\delta\mu_2-\dot{\mu}_2\delta\mu_1.$$

Стойностите на $\delta\mu'_1$, $\delta\mu'_2$, $\delta\mu'_3$ поставяме в (4) и за търсената функция $\delta'\tau$ получаваме

$$(5)\qquad \delta'\tau = L\delta\mu_1 + M_1\delta\mu_2 + N\delta\mu_3 + \frac{3}{2}\left[(B-C)\dot\mu_2\dot\mu_3\delta\mu_1 + (C-A)\dot\mu_3\dot\mu_1\delta\mu_2 + (A-B)\dot\mu_1\dot\mu_2\delta\mu_3\right].$$

Въз основа на (3) и (5) от (1) получаваме уравненията на движението

$$A\ddot\mu_1+(C-B)\dot\mu_2\dot\mu_3=L,\qquad B\ddot\mu_2+(A-C)\dot\mu_3\dot\mu_1=M,\qquad C\ddot\mu_3+(B-A)\dot\mu_1\dot\mu_2=N,$$

от които получаваме уравненията на Ойлер, като заместим $\dot\mu_1$, $\dot\mu_2$, $\dot\mu_3$, $\ddot\mu_1$, $\ddot\mu_2$, $\ddot\mu_3$ съответно с p, q, r, $\dot p$, $\dot q$, $\dot r$.

Уравнения на Резал. Нека тялото е такова, че инерчният му елипсоид за точката O е връщателен. Тогава осите $Oxyz$ дефинираме така: оста Oz е връщателната ос на тялото, която е свързана с него; оста Ox е нормалата на равнината z_1Oz и най-сетне оста Oy е перпендикулярна на равнината xOz. Положението на осите $Oxyz$ спрямо осите $Ox_1y_1z_1$ е определено с ъглите $\theta=(Oz_1, Oz)$ и $\psi=(Ox_1, Oz)$ и ротационният вектор $\vec\Omega$ на осите $Oxyz$ спрямо осите $Ox_1y_1z_1$ се дава с равенството

$$\vec\Omega=\dot\theta\,\vec i+\dot\psi\sin\theta\,\vec j+\dot\psi\cos\theta\,\vec k.$$

Ротационният вектор $\vec\omega$ на тялото е

$$\vec\omega=\dot\theta\,\vec i+\dot\psi\sin\theta\,\vec j+(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)\,\vec k=p\vec i+q\vec j+r\vec k,$$

гдето $\varphi=(Ox, OX)$, OX е ос, свързана с тялото и лежаща в равнината xOy. Тогава

$$\vec\Omega=P\vec i+Q\vec j+R\vec k=p\vec i+q\vec j+q\operatorname{cotg}\theta\,\vec k.$$

Понеже инерчният елипсоид е връщателен около оста Oz, то осите Ox, Oy, Oz са главни инерчни оси и инерчните моменти относно осите Ox и Oy са равни на една и съща константа A, макар че тези оси се движат в тялото. Тогава формулата (2) за функцията T'' е приложима; ако поставим в нея $B=A$, $P=r$, $Q=q$, $R=q\operatorname{cotg}\theta$, получаваме

$$(6)\qquad T''=A(\dot p^2+\dot q^2)+C\dot r^2+A(p\ddot p+q\ddot q)+Cr\ddot r+ (Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)q\dot p+(Cr-Aq\operatorname{cotg}\theta)p\dot q.$$

За обобщени координати на тялото вземаме пак ъглите μ_1, μ_2, μ_3 и формулата (6) приема формата

$$(7)\qquad T''=A(\ddot\mu_1^2+\ddot\mu_2^2)+C\ddot\mu_3^2+(A\dot\mu_2\operatorname{cotg}\theta-C\dot\mu_3)(\dot\mu_2\mu_1-\dot\mu_1\mu_2)+\cdot$$

Функцията $\delta'\tau$ се пресмята както по-горе. Вариацията на $T=\frac{1}{2}\left[A(\dot\mu_1^2+\dot\mu_2^2)+C\dot\mu_3^2\right]$ спрямо осите $Ox_1y_1z_1$ е

$$(8)\qquad \delta'T=A(\dot\mu_1\delta\mu_1'+\dot\mu_2\delta\mu_2')+C\dot\mu_3\delta\mu_3'.$$

Неизвестните $\delta\mu_1'$, $\delta\mu_2'$, $\delta\mu_3'$ се определят по следния начин. Полагаме

$$(9) \qquad \vec{\Omega} = \frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \frac{d\mu_1}{dt}\vec{i} + \frac{d\mu_2}{dt}\vec{j} + \frac{d\mu_2}{dt}\operatorname{cotg}\theta\,\vec{k};$$

отгдето $$\delta\vec{\lambda} = \delta\mu_1\vec{i} + \delta\mu_2\vec{j} + \delta\mu_2\operatorname{cotg}\theta\,\vec{k}.$$

Тогава от равенството $\vec{\omega} = (\vec{\omega} - \vec{\Omega}) + \vec{\Omega}$ получаваме $\vec{\mu} = (\vec{\mu} - \vec{\lambda}) + \vec{\lambda}$ и производната на $\vec{\mu}$ спрямо $Ox_1y_1z_1$ е равна на производната на $\vec{\mu} - \vec{\lambda}$ спрямо $Oxyz$, увеличена с производната на $\vec{\lambda}$ спрямо $Ox_1y_1z_1$: $\dot{\vec{\mu}}' = (\dot{\vec{\mu}} - \dot{\vec{\lambda}}) + \dot{\vec{\lambda}} + \dot{\vec{\lambda}} \times \vec{\lambda} = \dot{\vec{\mu}} + \dot{\vec{\lambda}} \times \vec{\lambda}$. Вариацията на $\vec{\mu}'$ се дава с равенството

$$\delta\dot{\vec{\mu}}' = \delta\dot{\vec{\mu}} + \delta\dot{\vec{\lambda}} \times \vec{\lambda} + \dot{\vec{\lambda}} \times \delta\vec{\lambda} = \dot{\vec{\lambda}} \times \delta\vec{\lambda},$$

понеже обобщените скорости $\dot{\mu}_1$, $\dot{\mu}_2$, $\dot{\mu}_3$ се разглеждат като постоянни и $\dot{\vec{\mu}}$ и $\dot{\vec{\lambda}}$ не зависят от обобщените координати μ_1, μ_2, μ_3. Оттук въз основа на (9) получаваме

$$\delta\vec{\mu}' = -(\mu_1 \operatorname{cotg}\theta\,\delta\mu_2 - \dot{\mu}_2 \operatorname{cotg}\theta\,\delta\mu_1)\vec{j} + (\dot{\mu}_1\delta\mu_2 - \dot{\mu}_2\delta\mu_1)\vec{k},$$

отгдето

$$\delta\mu_1' = 0, \quad \delta\mu_2' = (\dot{\mu}_2\delta\mu_1 - \dot{\mu}_1\delta\mu_2)\operatorname{cotg}\theta, \quad \delta\mu_3' = \dot{\mu}_1\delta\mu_2 - \mu_2''\delta\mu_1.$$

Стойностите на $\delta\mu_1'$, $\delta\mu_2'$, $\delta\mu_3'$ поставяме в (8) и функцията $\delta'\tau$ се дава с равенството

$$(10) \qquad \delta'\tau = L\delta\mu_1 + M\delta\mu_2 + N\delta\mu_3 + {}^3/_2(A\dot{\mu}_2\operatorname{cotg}\theta - C\dot{\mu}_3)(\dot{\mu}_2\delta\mu_1 - \dot{\mu}_1\delta\mu_2).$$

Като имаме предвид (7) и (10), уравненията на движението (I) са:

$$A\ddot{\mu}_1 + (C\dot{\mu}_3 - A\dot{\mu}_2\operatorname{cotg}\theta)\dot{\mu}_2 = L, \quad A\mu_2 - (C\dot{\mu}_3 - A\dot{\mu}_2\operatorname{cotg}\theta)\dot{\mu}_1 = M, \quad C\dot{\mu}_3 = N,$$

от които получаваме уравненията на Резал, като заместим $\dot{\mu}_1$, $\dot{\mu}_2$, $\dot{\mu}_3$, $\ddot{\mu}_1$, $\ddot{\mu}_2$, $\ddot{\mu}_3$ съответно с $p, q, r, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$.

Забележка. Уравненията на Ойлер и Резал могат да се изведат и от уравненията $\frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{q}_i} = \frac{\partial\delta\tau}{\partial\delta q_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, като диференцираме функцията T спрямо осите $Oxyz$ и вземем за обобщени координати трите Ойлерови ъгли φ, ψ, θ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ив. Ценов. Годишник на СДУ, ФМФ, т. 49, кн. 1, ч. II (1954/55).
2. Ив. Ценов. C. R. de l'Académie Bulgare de Sciences, t. 9, № 3 (1956).

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОСТОЯННОЙ ТОЧКОЙ

Ив. Ценов

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе выводятся уравнения Эйлера и Резаля посредством применения новых уравнении аналитической динамики [1], [2], в которых $q_1, q_2, \ldots, q_s$ обозначают обобщенные координаты материальной системы, T'' — вторая производная кинетической энергии T, $\delta' \tau$ — сумма виртуальных перемещений данных сил и новых сил, которые произходят из функции сил $^3/_2\, T$, рассматриваемой только как функция обобщенных координат и времени t.

Движение тела относительно постоянных осей $Ox_1y_1z_1$ относится к подвижным осям $Oxyz$ в теле и пространстве; движение этих последных относительно $Ox_1y_1z_1$ определяется ротационным вектором $\vec{\Omega}$. Если $\vec{\omega}$ абсолютная ротация тела относительно осей $Ox_1y_1z_1$, то его релятивная ротация в отношении осей $Oxyz$ дается вектором $\vec{\omega}-\vec{\Omega}$, так что $\vec{\omega}=(\vec{\omega}-\vec{\Omega})+\vec{\Omega}$, где $\vec{\Omega}$ переносная ротация тела. Аналитические выражения векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$ в отношении осей $Oxyz$ даются равенствами

$$\vec{\omega}=p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}, \qquad \vec{\Omega}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}.$$

Предположим, что оси Ox, Oy, Oz являются главными осями инерции и что моменты инерции A, B, C, в отношении этих осей, постоянны, несмотря на то, что оси движутся в теле. Тогда кинетическая энергия тела дается равенством

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2).$$

Вторая производная кинетической энергий T по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ находится из (2).

Пусть тело неизменно связано с осями $Oxyz$; тогда релятивная ротация $\vec{\omega}-\vec{\Omega}$ равна нулю и из (2) получаем (3).

Пусть $d\mu_1$, $d\mu_2$, $d\mu_3$ элементарные углы, такие, что вращение тела вокруг осей Ox, Oy, Oz на эти углы переводит его из одного

положения в другое безконечно близкое положение. В этом случае мы принимаем в качестве обобщенных координат тела углы μ_1, μ_2, μ_3 и заменяем абсолютный вращающийся вектор $\vec{\omega}=p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}$ на угловой скорости $\frac{d\vec{\mu}}{dt}=\dot{\vec{\mu}}=\dot{\mu}_1\vec{i}+\dot{\mu}_2\vec{j}+\dot{\mu}_2\vec{k}$ так, что

$$p=\dot{\mu}_1, \quad q=\dot{\mu}_2, \quad r=\dot{\mu}_3.$$

Тогда функция T'', выраженная обобщенными ускорениями, дается (3).

Функция $\delta'\tau$ дается равенством

$$\delta'\tau=L\,\delta\mu_1+M\delta\mu_2+N\delta\mu_3+\frac{3}{2}\,\delta'T,$$

где $\delta'T$ — вариация функции $T=\frac{1}{2}\,(A\dot{\mu}_1^2+B\dot{\mu}_2^2+C\dot{\mu}_3^2)$ по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$. Вычисляя эту вариацию находим что функция $\delta'\tau$ дается (5).

На основании (3) и (5) из (1) получаем уравнения движения;

$$A\ddot{\mu}_1+(C-B))\dot{\mu}_2\,\dot{\mu}_3=L, \ldots,$$

из которых находим уравнения Эйлера, заменяя $\dot{\mu}_1$, $\dot{\mu}_2$, $\dot{\mu}_3$ на p, q, r и $\ddot{\mu}_1$, $\ddot{\mu}_2$, $\ddot{\mu}_3$ на $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$.

Пусть теперь тело такое, что его эллипсоид инерции для точки O вращательный. Тогда определяем оси $Oxyz$ так: ось Oz — ось вращения тела; ось Ox — перпендикулярна плоскости z_1Oz и ось Oy перпендикулярна плоскости zOx. Положение осей $Oxyz$ относительно осей $Ox_1y_1z_1$ определено Эйлеровыми углами θ, ψ; ротационный вектор $\vec{\Omega}$ осей $Oxyz$ и ротационный вектор $\vec{\omega}$ тела соответно даются

$$\vec{\Omega}=\dot{\theta}\,\vec{i}+\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{j}+\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{k},$$

$$\vec{\omega}=\dot{\theta}\,\vec{i}+\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{j}+(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\,\vec{k}=p\,\vec{i}+q\,\vec{j}+r\vec{k}.$$

Тогда

$$\vec{\Omega}=P\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\vec{k}=p\,\vec{i}+q\,\vec{j}+q\operatorname{cotg}\theta\,\vec{k}.$$

Очевидно, что формула (2) применима, несмотря на то, что оси $Oxyz$ движутся в теле. Если положим в ней $B=A$, $P=p$, $Q=q$, $R=q\operatorname{cotg}\theta$, получаем (6). Обобщенными координатами тела берем опять углы μ_1, μ_2, μ_3 и (6) превращается в (7).

Функция $\delta'\tau$ дается (10).

Имея ввиду (7) и (10) для уравнения движения (1), получаем

$$A\ddot{\mu}_1+(C\dot{\mu}_3-A\dot{\mu}_2\operatorname{cotg}\theta)\dot{\mu}_2=L, \quad A\ddot{\mu}_2-(C\dot{\mu}_3-A\dot{\mu}_1\operatorname{cotg}\theta)\dot{\mu}_1=M,$$

$$C\ddot{\mu}_3=N,$$

из которых выводятся уравнения Резаля, заменив $\dot{\mu}_1$, $\dot{\mu}_2$, $\dot{\mu}_3$ значениями p, q, r и $\ddot{\mu}_1$, $\ddot{\mu}_2$, $\ddot{\mu}_3$ значениями $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$.

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AVEC UN POINT FIXE

I. Tzénoff

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire nous déduisons les équations d'Euler et de Résal, en appliquant les équations nouvelles de la dynamique analytique [1], [2], où $q_1, q_2, \ldots, q_s$ sont les coordonnées généralisées du système matériel, T'' — la seconde derivée de l'énergie cinétique T, $\delta' \tau$ la somme des travaux virtuels des forces données et d'autres forces nouvelles, provenant de la fonction de forces $^3/_2\, T$, considerée comme une fonction seulement des coordonnées généralisées et du temps t.

Le mouvement du corps par rapport aux axes $Ox_1y_1z_1$ est rapporté aux axes mobiles $Oxyz$ dans le corps et dans l'espace. Le mouvement de ces axes mobiles et defini par le vecteur de rotation $\vec{\Omega}$.

Soit $\vec{\omega}$ la rotation absolue du corps par rapport $Ox_1y_1z_1$. Sa rotation relative par rapport aux axes $Oxyz$ est donnée avec le vecteur $\vec{\omega} - \vec{\Omega}$. Ainsi $\vec{\omega} = (\vec{\omega} - \vec{\Omega}) + \vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}$ est la rotation d'entraînement du corps. Les expressions analytiques de $\vec{\omega}$ et $\vec{\Omega}$ par rapport aux axes $Oxyz$ sont

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}, \qquad \vec{\Omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}.$$

Admettons que les axes Ox, Oy, Oz sont des axes principales d'inertie et que les moments d'inertie relativement à ces axes sont constants, malgré que les axes se meuvent dans le corps. L'énergie cinétique du corps est donnée par

$$T = \frac{1}{2}\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

La seconde derivée de T par rapport aux axes $Ox_1y_1z_1$ et donnée par (2).

Le corps soit invariablement lié aux axes $Oxyz$; alors la rotation relative est égale à zéro et de (2) on en deduit (3).

En considérant le mouvement du corps par rapport aux axes $Ox_1y_1z_1$, soient $d\mu_1$, $d\mu_2$, $d\mu_3$ les angles élémentaires auxquels on doit tourner le corps autour des axes Ox, Oy, Oz, pour le deplacer d'une position dans une autre position infiniment voisine. Dans ce cas, nous prenons comme coordonnées généralisées du corps les angles μ_1, μ_2, μ_3; substituons au vecteur de rotation absolue $\vec{\omega}$ avec $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \dot{\vec{\mu}}$ — la vitesse angulaire, de façon que

$$p = \dot{\mu}_1, \quad q = \dot{\mu}_2, \quad r = \dot{\mu}_3 .$$

Alors T'' comme fonction des accélérations generalisées est donnée par (3).

La fonction $\delta'\tau$ est donnée par

$$\delta'\tau = L\delta\mu_1 + M\delta\mu_2 + N\delta\mu_3 + {}^3/_2 \delta' T$$

où $\delta' T$ désigne la variation de $T = \frac{1}{2}(A\dot{\mu}_1^2 + B\dot{\mu}_2^2 + c\dot{\mu}_3^2)$ par rapport aux axes $Ox_1y_1z_1$. En evaluant cette variation, $\delta'\tau$ est donnée par (5).

A titre de (3) et (5) nous recevons de (1) l'équation du mouvement

$$A\ddot{\mu}_1 + (C-B)\dot{\mu}_2\dot{\mu}_3 = L, \ldots, \ldots,$$

d'où on trouve les équations d'Euler en remplaçant $\dot{\mu}_1$, $\dot{\mu}_2$, $\dot{\mu}_3$ par p, q, r et $\ddot{\mu}_1$, $\ddot{\mu}_2$, $\ddot{\mu}_3$ par $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$.

L'ellipsoide d'inertie par rapport à l'origine soit rotatif. Dans ce cas nous definissons les axes $Oxyz$ de la façon suivante: l'axe Oz est l'axe de rotation du corps; l'axe Ox est perpendiculaire au plan z_1Oz et enfin, l'axe Oy est perpendiculaire au plan zOx. La position des axes $Oxyz$ par rapport aux axes $Ox_1y_1z_1$ est definie par les angles d'Euler θ et ψ et le vecteur de rotation $\vec{\Omega}$ des axes $Oxyz$ est

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{i} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{j} + \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{k}.$$

Le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ du corps est

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{i} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{j} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\vec{k} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}.$$

Alors

$$\vec{\Omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = p\vec{i} + q\vec{j} + q\operatorname{cotg}\theta\,\vec{k}.$$

Il est évident que la formule (2) est applicable malgré que les axes $Oxyz$ sont mobiles dans le corps. En posant dans cette formule $B=A$, $P=p$, $Q=q$, $R=q\operatorname{cotg}\theta$, on obtient (6). Comme coordonnées généralisées du corps, on a pris de nouveau les angles μ_1, μ_2, μ_3 et la formule (6) prend la forme (7).

La fonction $\delta' \tau$ est donée par (10).

A titre de (7) et (10) les équations (1) du mouvement sont

$$A\ddot{\mu}_1 + (C\dot{\mu}_3 - A\dot{\mu}_2 \operatorname{cotg} \theta)\,\dot{\mu}_2 = L, \quad A\,\ddot{\mu}_2 - (C\dot{\mu}_3 - A\dot{\mu}_2 \operatorname{cotg} \theta)\,\dot{\mu}_1 = M,$$

$$C\ddot{\mu}_3 = N.$$

On en déduit les équations de Résal, en posant p, q, r au lieu de $\dot{\mu}_1$, $\dot{\mu}_2$, $\dot{\mu}_3$.