SUR UNE CONSEQUENCE DE L'HYPOTHESE DE GOLDBACH

André Schinzel (Varsovie)*

Il est bien connu et facile à démontrer que l'hypothèse H de Goldbach

H. Tout entier pair >4 est une somme de deux nombres premiers impairs

entraine que tout entier impair >7 est une somme de trois nombres premiers impairs.

Le but de cette communication est de démontrer le théorème suivant:

Théorème. L'hypothèse H entraine la proposition P_1 suivante:

P_1. Tout entier impair >17 est une somme de trois nombres premiers distincts.

Démonstration. On verifie sans peine que tout entier impair est un nombre d'une des dix formes $6k+3$, $10k+5$ ou bien $30k+i$, où $i=7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$.

k étant un nombre naturel donné, il resulte de l'hypothèse H qu'il existe des nombres premiers p_i et q_i $(i=1, 2, \ldots, 10)$ tels que

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} 1)\ 6k+3=3+p_1+q_1, & 2)\ 10k+5=5+p_2+q_2, \\ 3)\ 30k+1=13+p_3+q_3, & 4)\ 30k+7=17+p_4+q_4, \\ 5)\ 30k+11=23+p_5+q_5, & 6)\ 30k+13=23+p_6+q_6, \\ 7)\ 30k+17=7+p_7+q_7, & 8)\ 30k+19=7+p_8+q_8, \\ 9)\ 30k+23=13+p_9+q_9, & 10)\ 30k+29=17+p_{10}+q_{10}. \end{array}$$

Si, pour un nombre i de la suite $1, 2, \ldots, 10$ on aurait $p_i=q_i$, on aurait respectivement

1) $p_1=3k$, 2) $p_2=5k$, 3) $p_3=3(5k-2)$, 4) $p_4=5(3k-1)$, 5) $p_5=3(5k-2)$, 6) $p_6=5(3k-1)$, 7) $p_7=5(3k+1)$, 8) $p_8=3(5k+2)$, 9) $p_9=5(3k+1)$, 10) $p_{10}=3(5k+2)$.

Les nombres p_i $(i=1, 2, \ldots, 10)$ étant premiers, les cas 1) et 2) sont impossibles pour k entier >1 et les cas i, où $i=3, 4, \ldots, 10$, sont impossibles pour $k=1, 2, \ldots$

---

* Conférence faite à la Session scientifique des mathématiciens bulgares, Sofia, octobre 1956 (communiquée par M. W. Sierpiński).

Les côtés droits des formules (1) sont de la forme $r_i+p_i+q_i$, où p_i, q_i, r_i sont des nombres premiers notamment $r_i=3$, 5, 13, 17, 23, 23, 7, 7, 13, 17 pour $i=1, 2, \ldots, 10$. Or, nous avons démontré plus haut que $p_i \neq q_i$ pour $k>1$ dans les cas 1) et 2) et pour $k=1, 2, \ldots$ dans les cas i), où $i=3, 4, \ldots, 10$.

Or, supposons que pour un nombre i de la suite $1, 2, \ldots, 10$ les nombres r_i, p_i et q_i ne sont pas tout distincts. On aurait donc $r_i=p_i$ ou bien $r_i=q_i$, et il resulterait tout de suite de (1) q'un des nombres suivants devrait être premier:

1) $6k+3-2.3=3(2k-1)$, 2) $10k+5-2.5=5(2k-1)$,
3) $30k+1-2.13=5(6k-5)$, 4) $30k+7-2.17=3(10k-9)$,
5) $30k+11-2.23=5(6k-7)$, 6) $30k+13-2.23=3(10k-11)$,
7) $30k+17-2.7=3(10k+1)$, 8) $30k+19-2.7=5(6k+1)$,
9) $30k+23-2.13=3(10k-1)$, 10) $30k+29-2.17=5(6k-1)$.

Or, c'est évidemment impossible dans les cas 1)—4) pour $k>1$ et dans les cas 5)—10) pour $k=1, 2, \ldots$

L'implication $H \rightarrow P_1$ se trouve ainsi démontrée sauf peut-être pour les nombres 19 [cas 8), $k=0$], 23 [cas 9), $k=0$], 29 [cas 10), $k=0$], 31 [cas 3), $k=1$] et 37 [cas 4), $k=1$]. Or, on a les décompositions en sommes de trois nombres premiers distincts $19=3+5+11$, $23=3+7+13$, $29=5+7+17$, $31=7+11+13$, $37=7+13+17$.

L'implication $H \rightarrow P_1$ est ainsi vraie et notre théorème se trouve démontré.

Or, M. W. Sierpiński a démontré que la proposition

P_2. Tout entier pair >8 est une somme de trois nombres premiers distincts

équivaut à la proposition H_1 suivante:

H_1. Tout nombre pair >6 est une somme de deux nombres premiers impairs distincts.

En effet, admettons que la proposition P_2 est vraie, et soit $2k$ un nombre pair >6. On a donc $2k+2>8$ et d'après P_2 il existe trois nombres premiers distincts, p, q et r tels que $2k+2=p+q+r$. Les nombres p, q et r, dont la somme est un nombre pair, ne peuvent évidemment être tous les trois impairs Un d'entre eux, soit r, est donc $=2$ et on en trouve $2k=p+q$, où p et q sont des nombres premiers impairs distincts. On a donc $P_2 \rightarrow H_1$.

Or, admettons maintenent que H_1 est vrai et soit $2k$ un nombre pair >8. On a donc $2k-2>6$ et il résulte de H_1 qu'on a $2k-2= =p+q$, où p et q sont des nombres premiers impairs distincts. Il en résulte que $2k=2+p+q$, où 2, p et q sont des nombres premiers distincts. On a ainsi $H_1 \rightarrow P_2$ et, comme plus haut nous avons démontré que $P_2 \rightarrow H_1$, on a $P_2 \equiv H$, c. q. f. d.

Reçu le 10. X. 1956

ВЪРХУ ЕДНО СЛЕДСТВИЕ ОТ ХИПОТЕЗАТА НА ГОЛДБАХ

А. Шинцел (Варшава)

РЕЗЮМЕ

Авторът доказва, че от хипотезата на Голдбах (че всяко четно число > 4 е сума на две нечетни прости числа) следва, че всяко нечетно число > 17 е сума на три различни прости числа.

ОБ ОДНОМ СЛЕДСТВИИ ИЗ ГИПОТЕЗЫ ГОЛЬДБАХА

А. Шинцел (Варшава)

РЕЗЮМЕ

Автор доказывает, что из гипотезы Гольдбаха (что всякое четное число > 4 является суммой двух нечетных простых чисел) вытекает, что всякое нечетное число > 17 является суммой трех различных простых чисел.