О КОМПЛЕКСАХ ПРЯМЫХ С ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ*

Г. Георгиев (Яссы)

Известно, что каждому лучу данного комплекса прямых можно присоединить канонический взаимноортогональный трёхгранник, одна ось которого совпадает с лучём, а вторая с нормалью к касательной плоскости цилиндра комплекса, содержащего данный луч; вторая плоскость трёхгранника, проходящая через луч, является касательной плоскостью к конусу комплекса, вершина которого—центр луча комплекса—и является вершиной этого репера. Известно также, что отношение тангенса угла нормалей к конусам комплекса с вершинами в какой либо точке луча и в его центре, и их расстояния, даёт кривизну комплекса. Это простое соотношение было найдено Koenigs' ом в конце прошлого столетия и является вполне аналогичным формуле Chasles' я для образующих линейчатой поверхности.

1. Если Cl_3 поле центральных единичных векторов, определяющих данный комплекс, и l_1, l_2 — остальные оси канонического репера, то имеем

(1) $$dC=\omega_0^i\, l_i, \qquad dl_i=\omega\times l_i,$$

где

(2) $$\overline{\omega}=pl_1+ql_2+rl_3$$

мгновенная ось вращения репера определяемая функциональной матрицей

(3) $$\begin{Vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & q_2 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{Vmatrix}$$

Её элементы удовлетворяют соотношению [3]

(4) $$r_1p_3-r_3p_1+q_2(p_1+r_3)=0.$$

Если обозначить

(5) $$dq_2=\chi_i\omega_0^i,$$

---

* Содержание доклада представленного на Научной сессии болгарских математиков. София, октябрь 1956.

то, как следует из уравнений структуры, χ_2, вообще, независимый инвариант, а

$$\chi_1 = p_1 r_2 - p_2 r_1 - q_2 r_2, \quad \chi_3 = p_3 r_2 - p_2 r_3 + p_2 q_2. \tag{6}$$

Мне кажется небезинтересно исследовать класс комплексов (K) для которых последние два инварианта равны нулю, то есть

$$(p_1 - q_2) r_2 - p_2 r_1 = 0, \quad p_3 r_2 + (q_2 - r_3) p_2 = 0. \tag{6'}$$

Первым долгом покажем, что (6′) равносильно

(7) $p_2 = r_2 = 0$ (исключаются цилиндрические комплексы).

Действительно, если предположить $p_2 \neq 0$ (или $r_2 \neq 0$), то из (6′) можно вычислить r_1 и r_3 (или p_1 и p_3) и, вставляя в (4) приходим к исключенному случаю цилиндрического комплекса ($q_2 = 0$).

Итак матрица (3) получает в этом случае симметрическую форму:

$$\begin{Vmatrix} p_1 & 0 & p_3 \\ 0 & q_2 & 0 \\ r_1 & 0 & r_3 \end{Vmatrix}. \tag{3'}$$

Отмечу, между прочим, что конгруэнция центральных линий комплекса будет минимальной.

Для поля главных нормалей* центральных линий соответствующая матрица будет [2]

$$\begin{Vmatrix} r_3 & r_1 & 0 \\ p_3 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

а это показывает, что класс комплексов (K) обладает свойством — „комплекс главных нормалей его центральных линий вырождается в прямолинейную конгруэнцию“. Отсюда следует, что пары центральных кривых, получаемых смещением по направлению главной нормали одной из них, будут кривыми Bertrand'a.

Из вывода очевидна справедливость и обратного свойства: „если комплекс главных нормалей центральных линий одного комплекса вырождается в прямолинейную конгруэнцию, то это комплекс (K)“.

Нетрудно установить еще одно важное свойство этого комплекса.

Производная уравнения (4) по направлению главной нормали, имея в виду уравнения структуры, приводит к простому соотношению

$$\chi_2 (p_1 + r_3) = 0. \tag{9}$$

Возможны два случая: а) если

* Бинормали луча комплекса, в смысле Гаака—Финикова.

(10) $$p_1+r_3=0$$

данный комплекс будет одновременно и комплексом Финикова [4]; тогда из (4) следует

(11) $$p_1r_3-p_3r_1=0.$$

(10) указывает, что прямолинейная конгруэнция главных нормалей комплекса (K) будет нормальной, а (11) — что она будет цилиндрической. В этом случае кривизна комплекса (q_2) изменяется только вдоль главных нормалей его центральных линий.

В частности, если конгруэнция центральных линий будет нормальной ($p_1+q_2=0$), то $\chi_2=2q_2r_1$ — данный комплекс будет линейным [3]; как хорошо известно, в этом случае центральные линии суть винтовые линии соосных круговых цилиндров.

В этом смысле комплекс (K), случай a) можно было бы назвать неголономным линейным комплексом. Система пфаффовых уравнений к которым приводит задача определения неголономного линейного комплекса находится в инволюции; решение зависит от трёх произвольных функций одного аргумента.

b) Если

(10′) $$\chi_2=0,$$

то в этом случае $q_2=\text{const}$ — комплексы (K) имеют постоянную кривизну. Из (8) следует, что средний параметр (анормальность) прямолинейной конгруэнции главных нормалей будет

(12) $$\pi=\frac{p_1+r_3}{p_1r_3-p_3r_1}$$

Тогда из (4) следует, что $\pi=1/q_2=\text{const}$.

Итак, имеем: Комплексы прямых постоянной кривизны обладают свойством, что их нормали (главные нормали центральных линий) вырождаются в прямолинейную конгруэнцию с постоянным средним параметром равным кривизне комплекса.

Система пфаффовых уравнений, к которым приводит задача определения комплекса прямых постоянной кривизны находится в инволюции; решение зависит от одной произвольной функции двух аргументов.

2. Укажу на одно применение комплексов (K) в гидродинамике. Если движение жидкости стационарное и поле скоростей будет $v=vI_3$, то присоединяя к полю MI_3 трёхгранник Frenet линий тока, уравнение неразрывности

(13) $$\operatorname{div}(\rho v)=0 \quad (\rho\text{—плотность жидкости})$$

имеет вид

(14) $$v_3+\rho_3=i_2,$$

где

(15) $$i_2=p_2-q_1,\quad v_3=\frac{[d\log v, \omega_0^1, \omega_0^2]}{[\omega_0^3,\ \omega_0^1,\ \omega_0^2]}\qquad \rho_3=\frac{[d\log\rho,\ \omega_0^1,\ \omega_0^2]}{[\omega_0^3,\ \omega_0^1,\ \omega_0^2]}.$$

В частности, если жидкость несжимаема, то $\rho_3=0$, а если движение равномерно на каждой линии тока (меняясь при переходе от одной линии на другую), то $v_3=0$.

Справедлива следующая теорема:

„Если при стационарном движении некоторой жидкости комплекс главных нормалей линий тока вырождается в прямолинейную конгруэнцию и удовлетворены два из следующих условий:

1^0 жидкость несжимаема, 2^0 движение происходит равномерно на каждой линии тока, 3^0 конгруэнция линий тока минимальная ($i_2=0$), то справедливо и третье условие и в этом случае комплекс касательных к линиям тока будет комплексом (K).“

Комплекс главных нормалей линий вырождается в прямолинейную конгруэнцию если $p_2=r_2=0$; доказательство теоремы следует непосредственно из соотношения (14).

Можно сказать, что эта теорема является одним из пространственных обобщений одной замечательной теоремы, доказанной F. Sbrana в 1928 году [6], а именно: при плоском движении несжимаемой жидкости, чтобы линии тока были изотахейными линиями — необходимо и достаточно чтобы они были, в каждой плоскости, ортогональными траекториями семейства ∞^1 прямых.

Её доказательство получается непосредственно, если $q_2=r_3=0$.

Интересно заметить, что сферического движения в условиях теоремы быть не может, а движение происходит в плоскостях только для случая F. Sbran'ы (если исключаются прямолинейные движения).

Если жидкость идеальна и баротропна, а внешние силы, действующие на неё, консервативны, то тогда, для равномерного движения на линиях тока необходимо и достаточно [5]:

$$p_1+r_3=0,\quad (\lg p_3)_3=p_2. \tag{16}$$

Применяя доказанную теорему к этому частному случаю, из первого соотношения (16) следует, что комплекс касательных к линиям тока будет неголономным линейным комплексом, а из второго равенства (16) вытекает, что линии тока имеют постоянную кривизну. Когда конгруэнция линий тока будет и нормальной, то комплекс касательных будет линейным и получаем один из частных случаев движения жидкости исследованный L. Castoldi в 1947 г. [1].

Поступило в редакцию 10. X. 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Castoldi, L. Sopra una proprietà dei moti permanenti dei fluidi in cui le linee di corrente formano una congruenza normale di linee isotachee. Atti dei Lincei, (1947), 333—337.
2. Gheorghiev, Gh. Cîteva probleme geometrice legate de un cîmp de vectori unitari. Buletin Şt. Acad. RPR, Secţia Mat.-Fiz. 6 (1954), 101—123.
3. Gheorghiev, Gh. Cîteva observaţii cu privire la teoria metrică a complexelor de drepte. Studii şi Cercetări Şt. Filiala Iaşi Acad. RPR. 6 (1955), 105—113.
4. Gheorghiev, Gh Despre descompunerea unui complex în congruenţe remarcabile de drepte. Analele şt. Univ. Iaşi, новая серия, 1 (1955), 53—68.
5. Gheorghiev, Gh. Cîteva aspecte geometrice legate de mişcarea permanentă a unor fluide ideale. II. Analele şt. Univ. Iaşi, 2 (1956), 69—84.
6. Sbrana, F. Sui moti piani di un fluido incompresibile nei quali le linee di corrente sono isotachee. Atti dei Lincei, (1928), 641—643.

ВЪРХУ КОМПЛЕКСИ ОТ ПРАВИ С ПОСТОЯННА КРИВИНА

Г. Георгиев (Яш)

РЕЗЮМЕ

Разглеждат се комплекси от прави (K), чиято кривина по продължение на един лъч се изменя само при премествания в посоката на главната нормала (според Хаак—Фиников бинормалата на лъча на комплекса) на централната линия.

Установява се следното характерно свойство:

Комплексът от главните нормали на централните линии се свежда на една конгруенция от прави. Към тази класа принадлежат само: 1. Комплексите с постоянна кривина; конгруенцията на главните нормали тогава е с постоянен среден параметър (равен на кривината на комплекса). 2. Комплексите (K_a), чиито главни нормали образуват нормална цилиндрична конгруенция. По-нататък се установява общността на решенията.

Като приложение на комплексите (K) в хидродинамиката имаме теоремата: Нека за едно перманентно движение на флуида главните нормали на линиите на течението да образуват една конгруенция и нека са изпълнени две от следните три условия: 1) флуидът е несвиваем, 2) движението е равномерно (върху всяка линия на течението), 3) конгруенцията на линиите на течението е минимална. Тогава комплексът на допирателните към линиите на тока е един комплекс (K). Тази теорема е едно естествено пространствено обобщение на една теорема на Ф. Сбрана [6] за успоредните движения.

В частност при идеален флуид, подложен на една консервативна сила, линиите на течението са с постоянна кривина, а допирателните им образуват специален комплекс от типа (K_a).

SUR LES COMPLEXES DE DROITES A COURBURE CONSTANTE

Gh. Ghéorghiev (Iassy)

RÉSUMÉ

On considère les complexes de droites (K) dont la courbure au long d'un rayon varie seulement pour des déplacements effectués dans la direction de la normale principale (selon Haack—Finikoff, la binormale du rayon du complexe) de sa ligne centrale. On établit la propriété caractéristique à savoir: le complexe des normales principales des lignes centrales se reduit à une congruençe de droites. Appartiennent à cette classe seulement: 1. Le complexe à courbure constante; la congruence des normales principales en étant à paramètre moyen constant (egal à la courbure du complexe). 2. Le complexe (K_a) dont les normales principales constituent une congruence cylindrique normale. On établie ensuite la généralité des solutions.

Comme application des complexes (K) en hydrodynamique, on a le théorème: „Dans le mouvement permanent d'un fluide, si les normales principales des lignes de courant forment une congruence et sont satisfaites deux des trois conditions: 1) le fluide est incompressible, 2) le mouvement est uniforme (sur chaque ligne de courant), 3) la congruence des lignes de courant est minimale, alors est valable la troisième; dans ces conditions, le complexe des tangentes aux lignes de courant est un complexe (K). La théorème est une extension spatiale naturelle d'un théorème de F. Sbrana [6] pour les mouvements parallèles.

En particulier, si le fluide est idéal et soummis à une force conservative, les lignes de courant sont à courbure constante tandis que leurs tangentes forment un complexe particulier du type (K_a).