# EINFACHE SELBSTERREGTE SCHWINGUNGEN*

**Rolf Reissig (Berlin)**

Das Differentialgleichungssystem

$$\text{(D)} \qquad \dot{x} = v, \quad \dot{v} = -G(x) - F(v)$$

beschreibe das Verhalten eines einfachen Schwingers (mit dem Ausschlag $x$ und der Geschwindigkeit $v$), der mit nichtlinearer Rückstellkraft und Selbststeuerung ausgestattet ist. Dann liegt es in der Natur der Sache, für die beiden wirksamen Kräfte folgende Voraussetzungen zu treffen, die sehr allgemein sind.

a) Solange die schwingende Punktmasse genügend langsam ist, darf die Kraft $-F(v)$ nicht als Dämpfung wirken. Wenn sich die Masse aber schnell bewegt, darf $-F(v)$ keine Antriebskraft darstellen; dann soll während der Bewegung in positiver Richtung sogar eine echte Dämpfung auftreten.

Das heisst:

$$F(v)v \leqq 0 \text{ für } |v| \leqq y \quad (y > 0),$$

$$F(v) \geqq \delta > 0 \text{ für } v \geqq Y > y,$$

$$F(v) \leqq 0 \text{ für } v \leqq -Y.$$

(Die positive Konstante $\delta$ darf beliebig klein sein.)

Im Abschnitt $-Y \leqq v \leqq +Y$ bezeichnen wir:

$$\text{Max } F(v) = F > 0,$$

$$\text{Min } F(v) = f \leqq 0.$$

b) Das Glied $-G(x)$ entspricht einer echten Rückführkraft, die in gewissem Abstand von der Gleichgewichtslage $x=0$ eine vorgeschriebene Mindeststärke erreicht.

Das heisst:

$$G(x)x > 0 \text{ für } x \neq 0,$$

$$G(x) \geqq -f + \delta \quad \text{für } x \geqq X > 0,$$

$$G(x) \leqq -F - \delta \quad \text{für } x \leqq -X.$$

---

* Vortrag auf der Bulgarischen Mathematikertagung. Sofia, Oktober 1956.

Wir definieren noch:

$$J(x) = \int_0^x G(\xi)\, d\xi.$$

Die Funktion $J(x)$ ist natürlich positiv-definit.

c) Eine zusätzliche Annahme besteht darin, dass die Funktionen $G(x)$, $G'(x)$ sowie $F(v)$, $F'(v)$ für alle Werte der unabhängigen Variablen $x$ bzw. $v$ stetig sein sollen.

Diese Voraussetzung kann gemildert werden, wenn man an Stelle des Bendixsonschen Theorems einen anderen Satz als Grundlage für den nachfolgenden Beweis verwendet.

Die Voraussetzungen a) bis c) sind beispielsweise in dem bekannten Van der Polschen Falle erfüllt, wo wir schreiben können

$$F(v) = \varepsilon(v^3/3 - v) \quad (\varepsilon > 0) \text{ und } G(x) = x.$$

Für den somit beschriebenen Schwinger wollen wir jetzt beweisen, dass zu den möglichen Bewegungen mindestens eine periodische gehört, d. h. dass die Punktmasse wenigstens einer selbsterregten Schwingung fähig ist.

Zu dem Zweck veranschaulichen wir uns die Lösungen von $(D)$ in der $xv$-Ebene durch die (orientierten) Charakteristiken mit der Parameterdarstellung

$$x = x(t), \quad v = v(t).$$

Aus zwei doppelpunktfreien geschlossenen Wegen konstruieren wir um den Ursprung (den einzigen singulären Punkt) herum ein Ringgebiet, aus dem keine Charakteristik entweichen kann.

Wir stützen uns nun auf einen bekannten Satz von I. Bendixson*, aus dem hervorgeht: Jede Charakteristik in unserem Ringgebiet ist entweder eine geschlossene Kurve oder nähert sich unbegrenzt einer solchen Kurve. Damit ist die Existenz einer geschlossenen Charakteristik bewiesen; diese ist offenbar das Bild einer Schwingung. Hauptaufgabe ist demzufolge die Konstruktion des Ringgebietes, d. h. seines inneren Randes $W_i$ und seines äußeren Randes $W_a$.

Hierzu werden wir die Hilfsfunktion benötigen:

$$w(x, v) = J(x) + \frac{v^2}{2}$$

Für ihre zeitliche Ableitung ergibt sich aus $(D)$:

$$\frac{d}{dt} w(x, v) = G(x)\dot{x} + v\dot{v} = -F(v)v.$$

Konstruktion des inneren Randes $W_i$.

Für $|v| \leqq y$ gilt nach a):

$$\dot{w}(x, v) \geqq 0.$$

* Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Mathematica, 24 (1901).

Die Kurven $w(x, v)=C$ stellen ineinander geschachtelte Ovale dar, die den Ursprung einschliessen und zur $x$-Achse symmetrisch sind. Wählt man den Parameter $C$ so klein, dass das zugehörige Oval den horizontalen Streifen $|v| \leqq y$ nicht überschreitet, so eignet es sich als innerer Rand des gesuchten Ringgebietes.

Konstruktion des äußeren Randes $W_a$.

Die Konstruktion des äußeren Randes ist wesentlich komplizierter. Um ihn zu bestimmen, sind mehrere Abschätzungen erforderlich, die man wiederum mit Hilfe von a) gewinnt:

$$\text{für } v \geqq 0 \quad \dot{w}(x, v) \leqq -fv, \qquad \text{d. h.} \quad [w(x, v)+fx]^{\cdot} \leqq 0;$$

$$\text{für } v \geqq Y \quad \dot{w}(x, v) \leqq -\delta v, \qquad \text{d. h.} \quad [w(x, v)+\delta x]^{\cdot} \leqq 0;$$

$$\text{für } v \leqq 0 \quad \dot{w}(x, v) \leqq -Fv, \qquad \text{d. h.} \quad [w(x, v)+Fx]^{\cdot} \leqq 0;$$

$$\text{für } v \leqq -Y \qquad \dot{w}(x, v) \leqq 0.$$

Hieraus ergibt sich der folgende Konstruktionsplan.

a) Von $P_1(x_1, Y)$ (wo die Abszisse $x_1$ positiv und hinreichend groß sein soll) nach rechts bis $P_2(x_2, 0)$

$$w(x, v)+fx=w(x_1, Y)+fx_1;$$

b) von $P_1(x_1, Y)$ oberhalb der Horizontalen $v=Y$ nach links bis $P_6(x_6, Y)$

$$w(x, v)+\delta x=w(x_1, Y)+\delta x_1;$$

c) von $P_6(x_6, Y)$ nach links bis $P_5(x_5, 0)$

$$w(x, v)+fx=w(x_6, Y)+fx_6;$$

d) von $P_2(x_2, 0)$ nach links bis $P_3(x_3, -Y)$

$$w(x, v)+Fx=w(x_2, 0)+Fx_2;$$

e) von $P_5(x_5, 0)$ nach rechts bis $P_4(x_4, v_4 \leqq -Y)$

$$w(x, v)+Fx=w(x_5, 0)+Fx_5;$$

f) von $P_3(x_3, -Y)$ unterhalb der Waagerechten $v=-Y$ nach links bis $P_4(x_4, v_4)$

$$w(x, v)=w(x_3, Y).$$

Um nachzuprüfen, ob der Entwurf überhaupt durchführbar ist, braucht man sich mit dem recht unübersichtlichen Weg $W_a$ gar nicht zu befassen. Wir bilden nämlich die $xv$-Ebene nach der Vorschrift $w=w(x, v)$ auf die obere Hälfte der $xw$-Ebene ab, und dabei geht $W_a$ ganz einfach in einen Streckenzug über. Bezeichnet man die Kurve

$$w=w(x, 0)=J(x)$$

mit $C_0$ und die Kurve

$$w=w(x, Y)=J(x)+\frac{Y^2}{2}$$

mit $C_Y$, so entsteht dieser Streckenzug, wie folgt:

a) Der Punkt $x_1$ von $C_Y$ wird nach rechts durch eine Strecke der Steigung $-f$ mit $C_0$ verbunden (Abszisse $x_2$);

b) durch ihn wird außerdem an $C_Y$ die Sehne mit der Steigung $-\delta$ gelegt (Abszisse $x_6$), die $C_Y$ nur an den Stellen $x_1$ und $x_6$ schneidet.

c) Vom Punkt $x_6$ von $C_Y$ wird nach links eine Strecke der Steigung $-f$ bis $C_0$ gezogen (Abszisse $x_5$).

d) Der Punkt $x_2$ von $C_0$ wird nach links durch eine Strecke der Steigung $-F$ mit $C_Y$ verbunden (Abszisse $x_3$).

e) Vom Punkt $x_5$ auf $C_0$ wird nach rechts eine Gerade der Steigung $-F$ gezeichnet und

f) vom Punkt $x_3$ von $C_Y$ nach links eine waagerechte Strecke (die für $x < x_3$ ganz oberhalb von $C_Y$ verlaufen soll) bis zum Schnitt mit der in e) beschriebenen Geraden (Abszisse $x_4$).

Wir können uns jetzt leicht davon überzeugen, daß der Streckenzug (d. h. die Abbildung von $W_a$) allen Anforderungen genügt, sofern die Ausgangsabszisse $x_1$ größer gewählt wurde als eine bestimmte positive Schranke. Hierbei benutzen wir vor allem die Voraussetzung *b*) über $G(x)$. Der Weg $W_a$ enthält dann in seinem Innengebiet den Weg $W_i$, so daß das gewünschte Ringgebiet hergestellt ist.

*Eingegangen am 23. X. 1956*

# ПРОСТИ САМОВЪЗБУДЕНИ ТРЕПТЕНИЯ

Р. Райсиг (Берлин)

РЕЗЮМЕ

Една свободна динамична система може да извършва трептения при следните твърде общи условия: Зависещата от скоростта сила (самоуправление) не бива да спира бавните системи, трябва обаче при достатъчно бързите системи да действува затихващо (макар и произволно слабо). Обратно действуващата сила трябва да има един минимум, растящ заедно с разстоянието до нулевото положение и величината на самоподтикването на бавната система.

# ПРОСТЫЕ САМОВОЗБУЖДЕННЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ

Р. Райсиг (Берлин)

## РЕЗЮМЕ

Свободная динамическая система автоколебательна при следующих, весьма общих, условиях: зависящая от скорости сила (самоуправление) не должна тормозить медленные системы, должна однако при быстрых системах действовать как затухание (хотя бы сколь угодно малое). Для достаточно больших расстояний от нулевого положения величина возвращающей силы должна иметь минимум растущего вместе с величины автотолчка медленной системы.