

# WANDGESETZE TURBULENTER GRENZSCHICHTSTRÖMUNGEN AUF DER GRUNDLAGE DER PRANDTLSCHEN MISCHUNGSWEGHYPOTHESE

Witold Szablewski (Berlin)

## I) Einleitung

Auf der Grundlage der Mischungsweghypothese hat L. Prandtl\* bekanntlich für eine wandnahe Zone turbulenter Grenzschichten ein logarithmisches Verteilungsgesetz der Geschwindigkeit abgeleitet. Dieses Gesetz hat eine vielfache experimentelle Bestätigung gefunden und ist heute als gesicherter Bestandteil der Theorie anzusehen. Es gilt allerdings nur für die vollturbulente Schicht und erfaßt also nicht die Übergangsschicht zu der bei turbulenten Grenzschichten stets an der Wand vorhandenen laminaren Unterschicht, deren Geschwindigkeitsverteilung sich leicht analytisch angeben läßt. Wir werden in der vorliegenden Schrift zeigen, daß sich diese Lücke auf der Grundlage der Prandtl'schen Hypothese schließen läßt, und werden eine analytische Formel für die Geschwindigkeitsverteilung in der Übergangsschicht angeben. Gleichzeitig gewinnt man dabei für die in der Prandtl'schen Formulierung des logarithmischen Gesetzes auftretende Integrationskonstante eine Analyse vom Standpunkt der Theorie.

Das log. Gesetz hat, wie erwähnt, zahlreiche experimentelle Bestätigungen für turbulente Grenzschichten mit Druckabfall bis zu schwachem Druckanstieg hin gefunden. Bei mittlerem oder starkem Druckanstieg jedoch zeigt uns das Experiment und auch theoretische Überlegung, daß von einem log. Gesetz nur noch sehr eingeschränkt oder überhaupt nicht mehr die Rede sein kann. Wir werden hier zeigen, daß sich — ebenfalls auf der Grundlage der Prandtl'schen Hypothese — ein Wandgesetz turbulenter Grenzschichten mit Druckanstieg ableiten läßt. Dieses bisher nicht bekannte Gesetz, das von einiger Bedeutung sein dürfte, hat seine erste experimentelle Bestätigung durch einen Vergleich mit den von J. Nikuradse durchgeführten Messungen turbulenter Strömungen in divergenten Kanälen gefunden.

\* L. Prandtl, *Ergebn. der AVA Göttingen III* (1927).

## II) Turbulente Grenzschichten

Die Bewegungsgleichung einer ebenen Grenzschichtströmung lautet bekanntlich

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} . \quad (1)$$

Es bedeuten dabei in üblicher Bezeichnungsweise  $x$  die Bogenlänge der Kontur (gemessen vom Staupunkt),  $y$  den Wandabstand,  $u$ ,  $v$  die Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ ,  $y$ -Richtung,  $\rho$  die hier als konstant angenommene Dichte,  $p(x)$  den der Grenzschicht aufgeprägten statischen Druck der Potentialströmung und  $\tau$  die Schubspannung.

Dazu tritt noch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Als Randbedingung haben wir die Haftbedingung der Strömung an der Wand  $u=v=0$  für  $y=0$  zu erfüllen. Für große  $y$  hat Übergang in die Potentialströmung zu erfolgen.

In Gl. (1) konstituiert sich für turbulente Grenzschichten die Schubspannung aus einem laminaren und turbulenten Anteil:

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb} \quad (3)$$

mit  $\tau_{lam} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ , wo  $\mu$  die Zähigkeit bedeutet.

Die Problematik bildet derzeit in der Forschung die durch die Turbulenz erzeugte Schubspannung  $\tau_{turb}$ . Gliedern wir die momentane Geschwindigkeit einer im zeitlichen Mittel stationären turbulenten Strömung (nur solche Strömungen werden hier betrachtet) auf in die zeitlichen Mittelwerte  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  und die momentanen Schwankungen  $u'$ ,  $v'$ :

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v',$$

und gehen wir mit diesem Ansatz in die Grenzschichtgleichung (1) ein, so erhalten wir vom Standpunkt der im zeitlichen Mittel stationären Strömung die bereits von O. Reynolds\* abgeleitete Beziehung

$$\tau_{turb} = -\rho \overline{u'v'} \quad (4)$$

Fruchtbar für theoretische Untersuchungen kann diese Beziehung allerdings erst dann werden, wenn es gelingt, sie durch die mittleren Werte  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  auszudrücken.

Prandtl\*\* hat in Analogie zur kinetischen Gastheorie auf Grund anschaulicher Vorstellungen über die Erzeugung der turbulenten Schubspannung durch den Impulstransport ganzer Flüssigkeitsteilchen, der sog. Turbulenzballen, die Hypothese aufgestellt:

$$\tau_{turb} = \rho l^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (5)$$

\* O. Reynolds, Phil. Trans. Roy. Soc., 186 (1895).

\*\* L. Prandtl, ZAMM, 5 (1925).

Dabei bedeutet  $l$  in Analogie zur freien Weglänge der Moleküle den sog. Mischungsweg der Turbulenzballen.

Wir wollen hier noch darauf hinweisen, daß der Prandtlsche Ansatz identisch ist mit der Nahwirkungshypothese, daß die turbulente Schubspannung bestimmt wird durch den lokalen Verlauf der mittleren Verteilung  $\bar{u}$ . Betrachten wir nämlich die Grenzschichtströmung  $\bar{u} = \bar{u}(y)$ ,  $\bar{v} = 0$  — eine solche Strömung stellt den Prototyp einer Grenzschicht dar — so wird die lokale Geschwindigkeitsverteilung beschrieben durch  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ . Aus dimensionsanalytischen

Gründen folgt dann sofort  $\tau = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$  mit der Länge  $l$ .

Akzeptiert man den Prandtlschen Ansatz, so liegt die Problematik derzeit in der Bestimmung der funktionalen Abhängigkeit der Länge  $l$  von der Geometrie der Strömung.

Wir wollen noch die für das Folgende wichtige Anmerkung machen, daß turbulente Grenzschichten hinsichtlich der Reibung eine Struktur aufweisen. Unmittelbar an der Wand haben wir, bedingt durch das Haften der Strömung an der Wand, eine Schicht mit wesentlich laminarem Strömungszustand, die sog. laminare Unterschicht. Diese Schicht ist allerdings sehr dünn; ihre Dicke beträgt z. B. bei der Rohrströmung ungefähr 0,15% des Rohrradius. Es setzt dann merkbar die Turbulenz ein und in einer Übergangsschicht sind laminare und turbulente Reibung von gleicher Größenordnung; auch die Dicke der Übergangsschicht ist sehr gering und beträgt bei der Rohrströmung ungefähr 1% des Radius. In den verbleibenden rund 99% der Grenzschichtdicke (bzw. des Rohrradius), der sog. vollturbulenten Schicht, spielt dann die laminare Reibung gegenüber der turbulenten Reibung keine Rolle mehr.

### III) Die Wandgesetze turbulenter Grenzschichten\*

Prandtl hat das log. Gesetz bekanntlich für eine wandnahe Zone der vollturbulenten Schicht unter der Annahme

$$\tau \approx \tau_0 \quad (\tau_0 \text{ Wandschubspannung}) \quad (6)$$

erschlossen. Wenn man bedenkt, daß, z. B. bei der Rohrströmung die Schubspannung linear über dem Rohrradius verteilt ist, so könnte diese Annahme als etwas gewagt angesehen werden. Sie ist für das Rohr nach der Formel

$$\tau = \tau_0 (1 - \eta)$$

$$\left( \eta = \frac{r_0 - r}{r_0} \text{ dimensionsloser Wandabstand} \right)$$

gleichbedeutend mit der Näherung

$$1 - \eta \approx 1$$

Beachtet man jedoch, daß — wie wir oben erwähnten — die vollturbu-

\* Im folgenden lassen wir die Querstriche, die zeitliche Mittelwertbildung bedeuten, fort.

lente Schicht bereits bei  $\eta = 0,01$  einsetzt, so ist ersichtlich, daß die Annahme konstanter Schubspannung eine gesunde Basis hat.

Bei der turbulenten Strömung längs der ebenen Platte liegen die Dinge ähnlich. Hier entspricht die Annahme konstanter Schubspannung der Vernachlässigung der Trägheit der Strömung. Eine vom Verf.\* durchgeführte Abschätzung ergibt, daß diese Vernachlässigung der Näherung

$$\left( 1 - \frac{2}{3} \eta \approx 1 \right. \\ \left. \left( \eta = \frac{y}{\delta}, \delta \text{ Grenzschichtdicke} \right) \right)$$

entspricht, wobei hier für große Reynoldssche Zahlen nach den Messungen von Schultz—Grunow\*\* ein Einsetzen der vollturbulenten Schicht bei  $\eta \approx 0,016$  stattfindet.

Ganz allgemein kennzeichnet die Prandtlsche Annahme  $\tau \approx \tau_0$  eine wandnahe Schicht, für die sowohl die Trägheit wie auch der Einfluß des aufgeprägten Druckgradienten vernachlässigbar sind:

Vernachlässigung der Trägheitsglieder in der Grenzschichtgleichung

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

— eine solche Vernachlässigung ist wegen der Haftbedingung immer für eine hinreichend wandnahe Schicht möglich — ergibt nämlich die Gleichung

$$- \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

aus der durch Integration folgt

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y. \quad (8)$$

Bei turbulenten Grenzschichten mit Druckabfall ist es nun für die Konstituierung eines Wandgesetzes der vollturbulenten Schicht — wie wir an zwei Beispielen oben zeigten — möglich, auch noch den Einfluß des Druckgradienten zu vernachlässigen:

$$\tau = \tau_0 \quad (\tau_0 \neq 0).$$

In diesen Gleichungen ist nach (3)  $\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb}$  zu setzen. Dabei ist  $\tau_{lam} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  und nach der Prandtschen Hypothese

$$\tau_{turb} = \rho l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Um rechnen zu können, muß man nun jedoch eine Annahme über  $l$  treffen. Da der Mischungsweg seiner anschaulichen Bedeutung nach zur Wand hin gegen Null abklingen muß und für das entsprechende Verhalten in Wandnähe nur die Länge  $y$  (Wandabstand) zur Verfügung steht, setzt Prandtl aus dimensionsanalytischen Gründen

$$l \approx y \quad (9)$$

\* W. Szablewski, ZAMM, 31 (1951), S. 309.

\*\* P. Schultz—Grunow, Lufo, 17 (1940).

Hierzu ist zu bemerken, daß eine Analyse\* von wandnahen Messungen an Hand des Prandtl'schen Schubspannungsansatzes (5) diese Annahme zu bestätigen scheint.

### A. Turbulente Grenzschichten mit Druckabfall

Aus der, wie oben dargelegt, sachgemäßen Annahme (6)

$$\tau = \tau_0$$

für eine wandnahe Zone der vollturbulenten Schicht folgt unter entspr. Vernachlässigung von  $\tau_{lam}$  mit dem Ansatz (9) bzw.

$$l = \kappa y \quad (10)$$

aus (6) die Gleichung

$$\rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \tau_0$$

bzw. mit der von Prandtl eingeführten sog. Schubspannungsgeschwindigkeit

$$v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$$

die Gleichung

$$v_* = \kappa y \frac{\partial u}{\partial y} \quad (11)$$

Integration ergibt

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + \text{const.}$$

Unter Heranziehung der weiteren für die Wandnähe charakteristischen Länge  $\frac{y}{v_*}$  ( $\nu = \mu / \rho$  kinematische Zähigkeit) kann man die obige Gleichung dimensionslos schreiben und erhält das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz in seiner universellen Gestalt

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + \text{const.} \quad (12)$$

In ihm treten zwei empirische Koeffizienten  $\kappa$  und const. auf. In Abb. 1 bringen wir einen Vergleich mit Messungen der turbulenten Rohrströmung. Zur Abb. ist zu bemerken, daß im logarithmischen Maßstab die Wandnähe auseinandergezerrt wird, während der der Rohrmitte benachbarte Teil zusammengeschoben wird. Das hier auftretende log Gesetz

$$\frac{u}{v_*} = 5,52 \log \frac{v_* y}{\nu} + 5,84, \quad (13)$$

das nach (12) einem  $\kappa = 0,417$  entspricht, wird in Abb. 1 durch eine Gerade wiedergegeben.

Erscheint so die experimentelle Bestätigung des log. Gesetzes als eine Stütze für den Prandtl'schen Schubspannungsansatz, so ist jedoch zu bemerken, daß nach Millikan\*\* aus der Existenz eines von den äuße-

\* L. Prandtl, Durand, Bd. III (1935).

\*\* C. B. Millikan, V. Congr., Cambridge, Mass. (1938).

ren Bedingungen unabhängigen Wandgesetzes und aus der Existenz eines von der Zähigkeit unabhängigen Mittengesetzes der logarithmische Charakter des Wandgesetzes auch rein dimensionsanalytisch erschlossen werden kann. Danach ist die Existenz des log. Gesetzes zunächst nicht als starke Stütze der Prandtlischen Hypothese anzusehen.

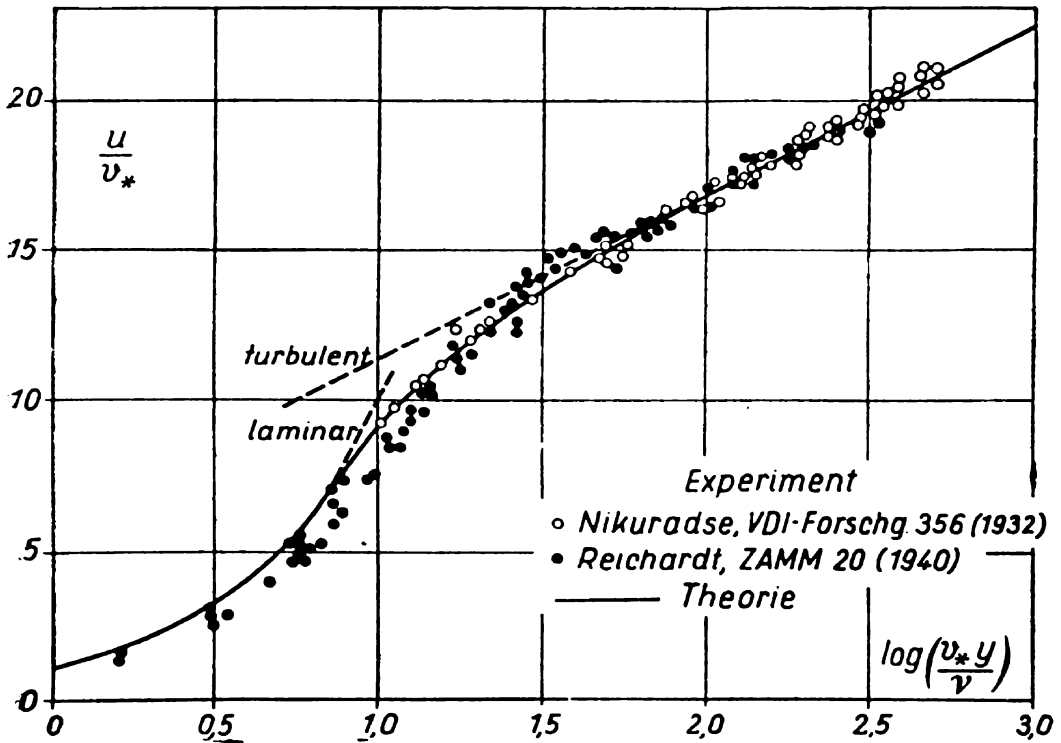


Abb. 1

Das log. Gesetz hat, wie eingangs erwähnt, eine vielfache experimentelle Bestätigung gefunden. Es bleiben jedoch noch manche Wünsche offen. Zunächst erscheint es wünschenswert, auch die Geschwindigkeitsverteilung in der Übergangsschicht analytisch zu beschreiben. Ferner ist es unbefriedigend, daß in der Formulierung (12) eine theoretisch nicht analysierbare Konstante auftritt.

Die so vorhandenen Mängel lassen sich nun jedoch durch eine Modifikation des Ansatzes (10) für den Mischungsweg in Wandnähe

$$l = \alpha y$$

beseitigen. In dieser Formulierung wird offenbar nicht der Existenz der laminaren Unterschicht, die frei von merkbarer Turbulenz ist, Rechnung getragen. Der Physik besser angepaßt ist der Ansatz\*

$$l = \alpha (y - \delta_0), \quad (14)$$

wo  $\delta_0$  ein Maß für die Dicke der laminaren Unterschicht ist.

\* Für das Folgende vgl. W. Szablewski, ZAMM, 31 (1951), S. 131.

Aus der Gleichung (6)  $\tau = \tau_0$ , wobei man nunmehr zur Erfassung der Übergangsschicht in  $\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb}$  auch  $\tau_{lam}$  berücksichtigt, erhält man dann

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \kappa^2 (y - \delta_0)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \tau_0. \quad (15)$$

Als Randbedingung tritt dabei die Geschwindigkeit am Rande der laminaren Unterschicht auf, die mit der Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{u}{v_*} = \frac{v_* y}{\nu} \quad (16)$$

$\frac{v_* \delta_0}{\nu}$  beträgt.

Elementare Integration ergibt dann, wenn wir die Abkürzungen  $\psi = \frac{u}{v_*}$ ,  $\chi = \frac{v_* y}{\nu}$  einführen, die Geschwindigkeitsverteilung

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{\kappa^2} \frac{1 - \sqrt{1 + 4\kappa^2(\chi - \chi_0)^2}}{2(\chi - \chi_0)} \\ &+ \frac{1}{\kappa} \ln \{ 2\kappa(\chi - \chi_0) + \sqrt{1 + 4\kappa^2(\chi - \chi_0)^2} \} + \chi_0 \quad (17) \\ &\left( \chi_0 = \frac{v_* \delta_0}{\nu} \right). \end{aligned}$$

Für große  $\chi$  — genauer gesagt für  $\chi \gg \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa}$  und  $\chi \gg \chi_0$ , wobei die erstere Bedingung gleichbedeutend ist mit der Vernachlässigbarkeit der laminaren Reibung bzw. dem Eintritt in die vollturbulente Schicht, wie sich am schnellsten aus dem Vergleich der Formel (18) mit der unter Vernachlässigung von  $\tau_{lam}$  gewonnenen Formel (12) ergibt — folgt aus (17)

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + \frac{1}{\kappa} \left[ -1 + \ln 4\kappa + \kappa \frac{v_* \delta_0}{\nu} \right]. \quad (18)$$

Damit erscheint aber wieder das logarithmische Gesetz. Gleichzeitig haben wir nunmehr eine Analyse der in (12) auftretenden Integrationskonstante erhalten.

Als empirische Koeffizienten treten  $\kappa$  und  $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$  auf. Der Koeffizient  $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$  kann dabei als die mit der Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_*$  gebildete charakteristische Reynoldssche Zahl der laminaren Unterschicht an der Grenze der merkbaren Turbulenz gedeutet werden. Der Vergleich der Formel (18) mit (13) ergibt für die turbulente Rohrströmung

$$\kappa = 0,417, \quad \frac{v_* \delta_0}{\nu} = 7,01.$$

Die mit diesen Koeffizienten sich ergebende Geschwindigkeitsverteilung für die Übergangsschicht ist in Abb. 1 eingetragen. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist gut und ist nunmehr als Stütze der

Prandtl'schen Hypothese anzusehen. Auch folgendes ist zu bemerken: Der ermittelte Wert von 7,01 für  $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$  bzw. die Dicke der laminaren Unterschicht in  $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$  Koordinaten scheint sich  $y$  gut in das Bild der Messung einzufügen.

Was läßt sich nun über die empirischen Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$  im allgemeinen sagen? Man findet oft die Ansicht vertreten, daß z. B.  $\alpha$  eine universelle Konstante wäre. Leider dürfte dem nicht so sein. Aus der Sichtung experimentellen Materials, das der Verf. vorgenommen hat, scheint sich vielmehr zu ergeben, daß  $\alpha$  und  $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$  zwar den Charakter von Modellkonstanten haben, jedoch von einer die Messung kennzeichnenden Reynoldsschen Zahl — die vermutlich den Turbulenzgehalt des Versuchsluftstromes mißt — abhängig zu sein scheinen.

**Anmerkung!**

Über seine Bedeutung als Wandgesetz turbulenter Grenzschichten mit Druckabfall hinaus besitzt das log. Gesetz insofern eine für technische Berechnungen wichtige Bedeutung, als es recht gut die Geschwindigkeitsverteilung über der gesamten Grenzschichtdicke approximiert. Das zeigen z. B. die Messungen von Ludwig und Tillmann\*. Es

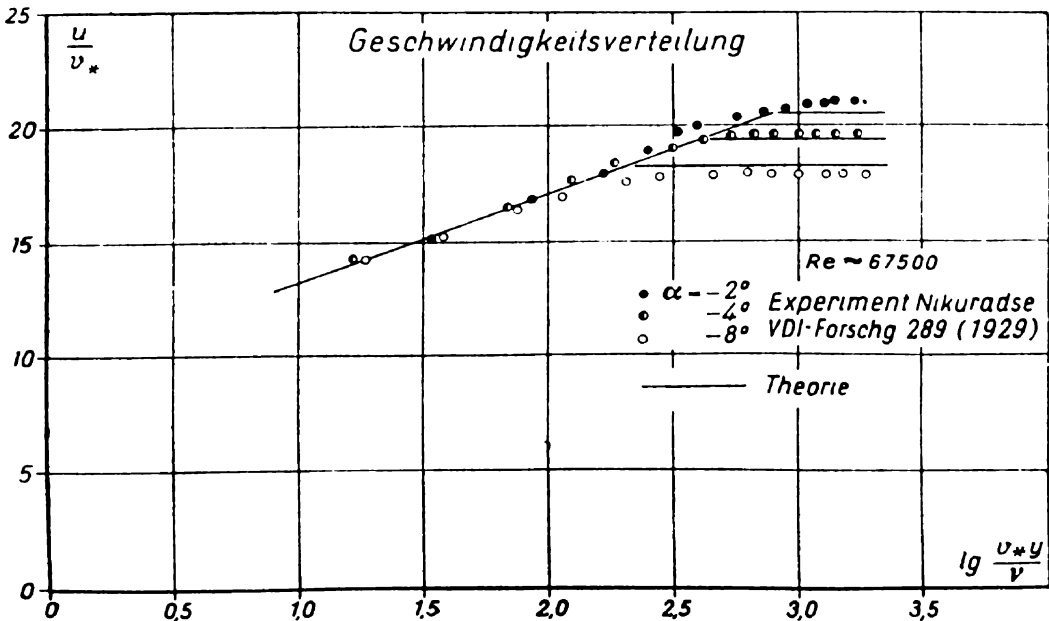


Abb. 2

ergibt sich auch aus den von Nikuradse\*\* durchgeführten Messungen der turbulenten Strömung in konvergenten Kanälen, vgl. Abb. 2. Vgl. fer-

\* H. Ludwig und W. Tillmann, Ing. Arch., 17 (1949).

\*\* J. Nikuradse, VDI-Forschungsheft, 289 (1929).



ner die turbulente Rohrströmung, Abb. 1. Der Grund für diesen Sachverhalt wird später einmal aufzuzeigen sein.

Man kann, wie gesagt, diesen Sachverhalt dazu benutzen, um turbulente Grenzschichten mit Druckabfall in guter Näherung zu berechnen, indem man die Geschwindigkeitsverteilung über der gesamten Grenzschichtbreite durch das log. Gesetz approximiert. Vgl. hierzu die vom Verf.\* durchgeführten Berechnungen der turbulenten Strömungen in konvergenten Kanälen und des Einlaufs einer turbulenten Rohrströmung.

## B. Turbulente Grenzschichten mit Druckanstieg\*\*

Wenn auch das aus dem Ansatz  $\tau = \tau_0$  folgende log. Gesetz bis zu Grenzschichten mit schwachem Druckanstieg experimentell bestätigt ist, so ist doch dem umfassenderen Ansatz (8)

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y$$

zu entnehmen, daß bei einer Grenzschichtströmung gegen wachsenden Druckanstieg, der schließlich die Ablösung ( $\tau_0 = 0!$ ) erzwingt, der Druckgradient immer weiter zur Wand hin bestimmend in das Gleichgewicht der Kräfte eingreift und für die Konstituierung eines Wandgesetzes, das bis in die vollturbulente Schicht reicht, schließlich nicht mehr vernachlässigbar ist. Für das log. Gesetz heißt das, daß seine Existenzschicht mit wachsendem Druckanstieg immer weiter eingeengt und schließlich ausgelöscht wird (für die Ablösungsstelle  $\tau_0 = 0$  kann nach (8) von einem log. Gesetz offenbar nicht mehr die Rede sein).

Legen wir nun der Konstituierung eines Wandgesetzes, das die Übergangsschicht mit erfaßt, für turbulente Grenzschichten mit Druckanstieg Gleichung (8) zugrunde, so erhalten wir mit

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb}$$

$$\left( \tau_{lam} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \tau_{turb} = \rho l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right)$$

und dem Mischungswegansatz (14) für Wandnähe

$$l = \alpha(y - \delta_0)$$

die Differentialgleichung

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \alpha^2 (y - \delta_0)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y. \quad (19)$$

Wir führen vorerst die dimensionslosen Koordinaten  $\frac{u}{V_*}$  und  $\frac{V_* y}{\nu}$  mit der zunächst noch unbestimmten charakteristischen Geschwindigkeit  $V_*$  ein und erhalten aus (19)

$$\frac{\partial \frac{u}{V_*}}{\partial \frac{V_* y}{\nu}} + \alpha^2 \left( \frac{V_* y}{\nu} - \frac{V_* \delta_0}{\nu} \right)^2 \left( \frac{\partial \frac{u}{V_*}}{\partial \frac{V_* y}{\nu}} \right)^2$$

\* W. Szablewski, Ing. Arch. 20 (1952), S. 37 und Ing. Arch. 21 (1953), S. 232.

\*\* Für das Folgende vgl. W. Szablewski, Ing. Arch. 23 (1955), S. 295.

$$= \frac{1}{V} \left( \frac{\tau_0}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \delta_0 \right) + \frac{v}{V_*} \frac{dp/dx}{\rho V_*^2} \left( \frac{V_* y}{v} - \frac{V_* \delta_0}{v} \right),$$

aus der sich als charakteristische Geschwindigkeit in Wandnähe die Schubspannungsgeschwindigkeit

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \delta_0} \quad (20)$$

ablesen läßt.

Mit den Abkürzungen  $\omega = \frac{u}{V_*}$ ,  $\xi = \frac{V_* y}{v} - \frac{V_* \delta_0}{v}$  ergibt sich dann aus (19) die Gleichung

$$-\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \kappa^2 \xi^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right)^2 = 1 + F \xi \quad (21)$$

$$\text{wo } F = \frac{v}{V_*} \frac{dp/dx}{\rho V_*^2}$$

Die äußeren Bedingungen bzw. der aufgeprägte Druckgradient manifestieren sich nunmehr in dem Formparameter  $F$ , der technisch eine positive kleine Zahl ist ( $\ll 1$ ).

Für die laminare Unterschicht lautet die Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{u}{V} = \frac{V_* y}{v} \left[ 1 - F \left( \frac{V_* \delta_0}{v} - \frac{1}{2} \frac{V_* y}{v} \right) \right], \quad (22)$$

die für  $F \approx 0$  in die bekannte Relation (16)

$$\frac{u}{V_*} = \frac{v_* y}{v}$$

übergeht.

Beachtet man, daß für die Geschwindigkeitsverteilung in der Übergangsschicht als Randbedingung die Geschwindigkeit am Rande der laminaren Unterschicht auftritt, so folgt aus (21) durch elementare Integration

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa^2} \int_0^\xi \frac{\sqrt{1 + 4\kappa^2 \xi^2 (1 + F\xi)} - 1}{\xi^2} d\xi + \frac{V_* \delta_0}{v} \left( 1 - \frac{F}{2} \frac{V_* \delta_0}{v} \right). \quad (23)$$

Es handelt sich also um ein elliptisches Integral. Die Berechnung könnte im Einzelfall mittels der Theorie der elliptischen Integrale erfolgen. Im Folgenden werden wir jedoch in sehr guter Approximation eine einfache Beschreibung mittels elementarer Funktionen geben, die insbesondere auch den Zusammenhang mit dem log. Gesetz, in das unser Integral für  $F \approx 0$  ja übergehen muß, klar in Erscheinung treten läßt.

Wir nehmen zunächst folgende identische Umformung vor:

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa^2} \int_0^\xi \frac{\sqrt{1 + 4\kappa^2 \xi^2} - 1}{\xi^2} d\xi + \frac{V_* \delta_0}{v} \left( 1 - \frac{F}{2} \frac{V_* \delta_0}{v} \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa^2} \int_0^\xi \frac{\sqrt{1 + 4\kappa^2 \xi^2 (1 + F\xi)} - \sqrt{1 + 4\kappa^2 \xi^2}}{\xi^2} d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Das erste Integral läßt sich elementar berechnen und ergibt in der Asymptote, abgesehen von der Integrationskonstante, das log. Gesetz. Das zweite Integral enthält also die Verformung des log. Gesetzes durch den Druckgradienten!

Im zweiten Integral setzen wir nun approximativ

$$\sqrt{1+4x^2\xi^2(1+F\xi)} - \sqrt{1+4x^2\xi^2} \approx 2x \left( \frac{\sqrt{1+F\xi}-1}{\xi} \right). \quad (25)$$

Diese Approximation ist physikalisch so zu interpretieren, daß bei der Berechnung der durch den Druckgradienten erfolgenden Verformung die laminare Reibung aus dem Spiel gelassen wird. (Vernachlässigt man nämlich in der Ausgangsdifferentialgleichung (21) die laminare Reibung, so erhält man

$$x^2 \xi^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right)^2 = 1 + F\xi$$

und für  $F=0$

$$x^2 \xi^2 \left( \frac{\partial \omega_0}{\partial \xi} \right)^2 = 1$$

bzw.

$$\frac{\partial(\omega-\omega_0)}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1+F\xi}-1}{x\xi}.$$

Man kann also schon vermuten, daß der Fehler der Approximation klein sein wird.

Das bestätigt eine Fehlerabschätzung, die wir hier wenigstens andeuten wollen. Die Fehlerfunktion lautet

$$\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \left\{ \int_0^{\xi} \frac{\sqrt{1+4x^2\xi^2(1+F\xi)}}{\xi^2} d\xi - 2x \int_0^{\xi} \frac{\sqrt{1+F\xi}}{\xi} d\xi - \left( \int_0^{\xi} \frac{\sqrt{1+4x^2\xi^2}}{\xi^2} d\xi - 2x \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\xi} \right) \right\}$$

und stellt eine negative, monoton fallende Funktion dar, so daß man sich auf die Ermittlung einer Schranke für den asymptotischen Fehler beschränken kann. Dazu ist eine numerische Abschätzung des elliptischen Integrals erforderlich, die mittels Reihenentwicklung des Integranden stattfindet:

$$\text{für } x \leq x_* \text{ (wobei } 4x_*^2(1+Fx_*)=1)$$

$$\sqrt{1+4x^2x^2(1+Fx)} = \sqrt{1+4x^2x^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{4x^2Fx^3}{1+4x^2x^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{4x^2Fx^3}{1+4x^2x^2} \right)^2 + \dots \right\},$$

$$\text{für } x \geq x_*$$

$$\sqrt{1+4x^2x^2(1+Fx)} = 2xx \sqrt{1+Fx} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4x^2x^2(1+Fx)} \right] - \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{4x^2x^2(1+Fx)} \right]^2 + \dots \right\}.$$

Für die weitere Rechnung müssen wir auf die Originalarbeit verweisen.

Unsere approximative Lösung für die Geschwindigkeitsverteilung in der Übergangsschicht lautet dann nach (24) und (25)

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \frac{1 - \sqrt{1 + 4x^2 \xi^2}}{\xi} + \frac{1}{x} \ln \left( 2x\xi + \sqrt{1 + 4x^2 \xi^2} \right) \tag{26}$$

$$+ \frac{2}{x} \left( \sqrt{1 + F\xi} - 1 \right) + \frac{1}{x} \ln \frac{4}{F} \frac{1}{\xi} \frac{\sqrt{1 + F\xi} - 1}{\sqrt{1 + F\xi} + 1} + \frac{V_* \delta_0}{V_*} \left( 1 - \frac{F}{2} \frac{V_* \delta_0}{V_*} \right).$$

Für große  $\xi$ , d. h. für  $\frac{V_* y}{v} \gg \frac{1}{2} \frac{1}{x}$  und  $\frac{V_* y}{v} \gg \frac{V_* \delta_0}{v}$ , erhält man das Wandgesetz (27), wobei die erstere angegebene Bedingung gleichbedeutend ist mit der Vernachlässigbarkeit der laminaren Reibung bzw. dem Eintritt in die vollturbulente Schicht, wie ein Vergleich der aus bei Vernachlässigung von  $\tau_{lam}$  durch Integration erhaltenen Formel mit (27) zeigen würde.

Das Wandgesetz für die vollturbulente Schicht lautet

$$\frac{u}{V_*} = \frac{2}{x} \left( \sqrt{1 + F \frac{V_* y}{v}} - 1 \right) \tag{27)*}$$

$$+ \frac{1}{x} \ln \frac{4}{F} \frac{\sqrt{1 + F \frac{V_* y}{v}} - 1}{\sqrt{1 + F \frac{V_* y}{v}} + 1} + \frac{1}{x} \left[ -1 + \ln 4x + x \frac{V_* \delta_0}{v} \left( 1 - \frac{F}{2} \frac{V_* \delta_0}{v} \right) \right]$$

Dieses Wandgesetz schließt das log. Gesetz mit ein! Bei schwachem Druckanstieg mit  $V_* \approx v_*$  und  $F \approx 0$  erhält man aus (27) das log. Gesetz (18)

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{x} \ln \frac{v_* y}{v} + \frac{1}{x} \left[ -1 + \ln 4x + x \frac{v_* \delta_0}{v} \right].$$

Empirische Koeffizienten sind  $\alpha$  und  $\frac{V_* \delta_0}{v}$ . Den Koeffizienten  $\alpha$  kennen wir bereits aus dem log. Gesetz (18).  $\frac{V_* \delta_0}{v}$  kann wieder aufgefaßt werden als die mit der Schubspannungsgeschwindigkeit gebildete charakteristische Reynoldssche Zahl der laminaren Unterschicht am Rande der Grenze der merkbaren Turbulenz, wobei hier entsprechend dem Umstand, daß die Schubspannung nunmehr in Wandnähe durch  $\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y$  beschrieben wird,  $V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \delta_0}$  auftritt.

\* **Anmerkung:** Solange eine Schicht mit logarithmischem Geschwindigkeitsgesetz zumindest noch rudimentär vorhanden ist, was bei mäßigem Druckanstieg noch der Fall sein dürfte, kann man statt (27) die einfachere Form

$$\frac{u}{v_*} = \frac{2}{x} \left( \sqrt{1 + F \frac{v_* y}{v}} - 1 \right) + \frac{1}{x} \ln \frac{4}{F} \frac{\sqrt{1 + F \frac{v_* y}{v}} - 1}{\sqrt{1 + F \frac{v_* y}{v}} + 1} + \frac{1}{x} \left[ -1 + \ln 4x + x \frac{v_* \delta_0}{v} \right]$$

$$\min F = \frac{v}{v_*} \frac{dp/dx}{\rho v_*^2}$$

Wie bei der Erörterung des log. Gesetzes erwähnt wurde, sind  $\alpha$  und der dort auftretende Koeffizient  $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$  als Modellkonstanten anzusehen. Wenn man nun bedenkt, daß für schwachen Druckanstieg  $\frac{V_* \delta_0}{\nu} \approx v_* \delta_0$  so ist es naheliegend anzunehmen, daß der Koeffizient  $\frac{V_* \delta_0}{\nu}$  eine Modellkonstante vom Betrage der Konstanten  $\frac{v_* \delta_0}{\nu}$  sein wird. Diese Hypothese wird gestützt durch die oben geschilderte Auffassung von  $\frac{V_* \delta_0}{\nu}$  als charakteristische Reynoldssche Zahl der laminaren Unterschicht.

Die Hypothese  $\frac{V_* \delta_0}{\nu} = \text{const.}$  für ein vorliegendes Strömungsmodell hat eine interessante Konsequenz zur Folge. Der Formparameter  $F = \frac{\nu}{V_*} \frac{dp/dx}{\rho V_*^2}$  nimmt an der Stelle der Ablösung, wenn man die hier sich aus der Definition (20) ergebende Relation  $\frac{dp/dx}{\rho V_*^2} = \frac{1}{\delta_0}$  beachtet, den Wert

$$F_{Abl} = \frac{1}{V_* \delta_0 / \nu} \quad (28)$$

an und ist durch die Modellkonstante  $\frac{V_* \delta_0}{\nu}$  festgelegt.

Eine erste Prüfung der entwickelten Gesetzmäßigkeiten haben wir an den von J. Nikuradse\* durchgeführten Messungen (turbulenter Strömungen in divergenten Kanälen) vorgenommen.

Zunächst erwähnen wir noch eine wichtige technische Anwendungsmöglichkeit des Wandgesetzes (27). Bei Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg bot die Ermittlung der sehr kleinen Werte der Wandschubspannungen  $\tau_0$  (für Ablösung  $\tau_0 = 0$ ) bisher einige Schwierigkeit. Diese wurden früher mittels des gemessenen Druckgradienten und der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung aus dem Impulsintegralsatz berechnet, d. h. aber numerisch als kleine Differenz großer Zahlen, was zu starken Streuungen führte. Neuerdings hat man auch Methoden der direkten Messung\*\* der Wandschubspannung entwickelt, die allerdings umständlich und kostspielig sind. Die Ermittlung ist nun jedoch in einfacher und sicherer Weise auch mit Hilfe des Wandgesetzes möglich, indem man die Kurve desselben passend durch die experimentellen wandnahen Punkte legt. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß die empirischen Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\frac{V_* \delta_0}{\nu}$  bekannt sind, was aber häufig der Fall sein wird, z. B. aus Messungen im Druckabfallgebiet.

In Abb. 3 ist die geschilderte Prozedur für die Nikuradseschen Messungen durchgeführt. Dabei wurde das Wandgesetz auf die Koordinaten  $\varphi = \frac{u}{u_1}$  ( $u_1$  Geschwindigkeit in Kanalmitte) und  $\eta = \frac{y}{b/2}$  ( $b$  Ka-

\* J. Nikuradse, a. a. O.

\*\* H. Ludwig, Ing. Arch. 17 (1949), S. 20.

nalbreite) transformiert;  $\alpha$  bedeutet den halben Öffnungswinkel des ebenen Diffusors. Die Koeffizienten  $\kappa, \frac{V_*^2 \rho_0}{\nu}$  waren hier den Nikuradse- schen Messungen der konvergenten Kanalströmungen entnehmbar.

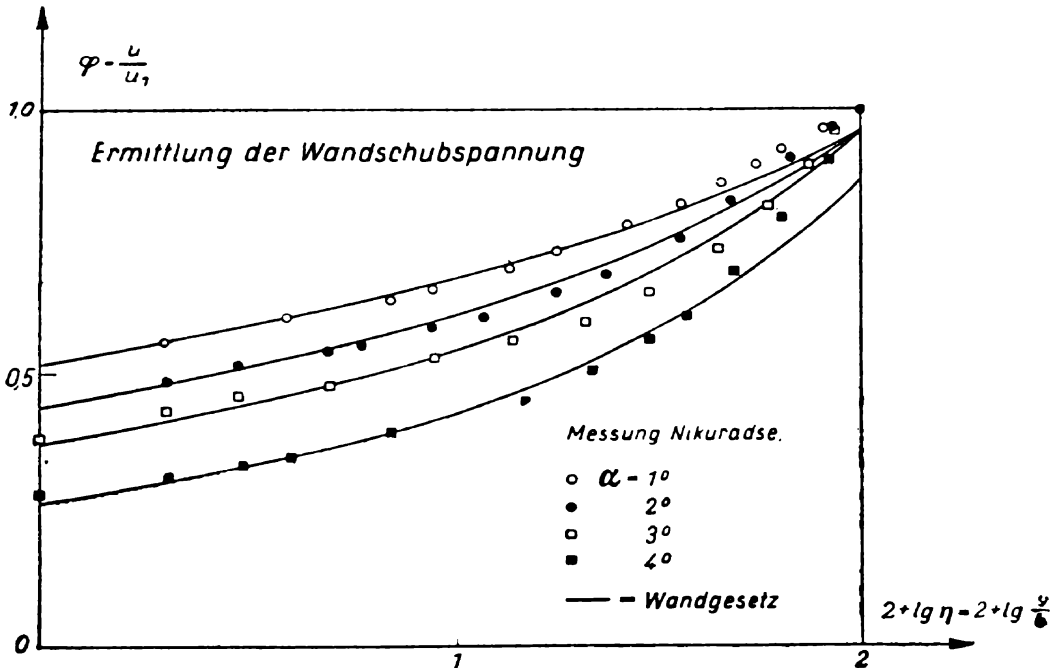


Abb. 3

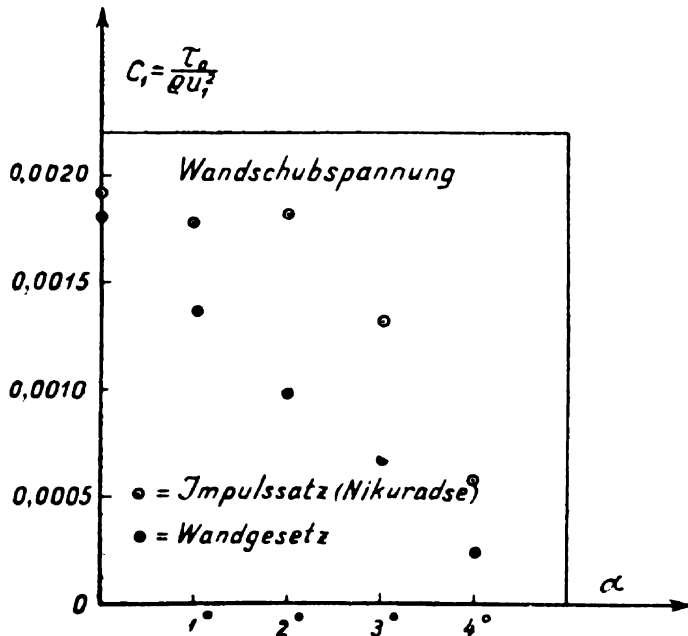


Abb. 4

Abb. 4 zeigt das Ergebnis im Vergleich mit Werten, die Anwendung des Impulssatzes ergab.

In Abb. 5 ist die Gesamtheit der von Nikuradse gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen für wachsende Diffusorwinkel  $\alpha$  bzw. wachsenden Druckanstieg dargestellt.  $\left(\frac{u}{V_*}\right)_0$  bedeutet dabei die Geschwindigkeit am Rande der laminaren Unterschicht. Eingetragen ist noch das log. Gesetz; man kann Abb. 5 entnehmen, daß von einem log. Wandgesetz bei stärkerem Druckanstieg nicht mehr die Rede sein kann und daß an seine Stelle das Wandgesetz (27) tritt. Die Hypothese  $V_*^2 \delta_0 = \text{const.}$  bzw. (28)  $F_{Abl} = \frac{1}{V_*^2 \delta_0 / \nu}$  findet hier insofern eine gewisse Bestätigung, als die theoretische Ablösungskurve gut zu der Angabe von J. Nikuradse paßt, daß die Ablösung bei  $\alpha = 4,8^\circ$  einsetzt.

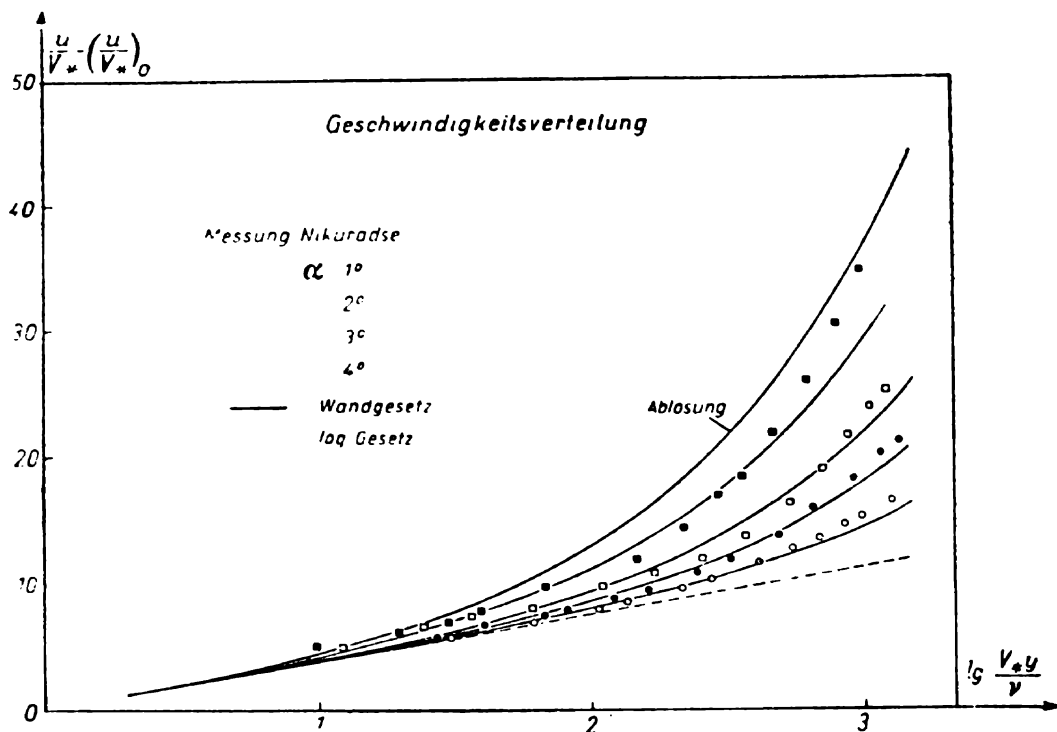


Abb. 5

Nach den vorliegenden Ergebnissen besteht wohl einige Berechtigung zu der Feststellung, daß die Prandtlische Schubspannungshypothese (5) zumindest für eine wandnahe Zone turbulenter Grenzschichtströmungen ein tragfähiges theoretisches Fundament bildet.

Eingegangen am 15. I. 1957

# ВЪРХУ ЗАКОНИТЕ НА ТУРБУЛЕНТНИТЕ ТЕЧЕНИЯ ВЪЗ ОСНОВА НА ХИПОТЕЗАТА НА ПРАНТЛ ЗА СМЕСИТЕЛНИЯ ПЪТ

В. Саблевски (Берлин)

## РЕЗЮМЕ

За областите в близка околност на стената с постоянно напрежение чрез едно видоизменение на способа на Прантл за смесителния път, което държи сметка за ламинарния подслой, се дава един закон за пътя, който описва в добро съвпадение с опита разпределението на скоростите в прехода от ламинарния подслой към напълно турбулентния слой.

При гранични слоеве с по-силно покачване на налягането не може да не се вземе предвид градиентът на налягането. Като обобщение на логаритмичния закон за скоростите се дава един съответен закон за стената. Едно сравнение с измерванията на Никурадзе на турбулентните течения в разходящи канали показва добро съвпадение.



## О ЗАКОНАХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. Саблевский (Берлин)

### РЕЗЮМЕ

Для областей вблизи стены и с постоянным напряжением, посредством видоизменения одного метода Прантля дается закон, описывающий в хорошем совпадении с экспериментами распределение скоростей при переходе из ламинарного подслоя к вполне турбулентному слою.

При краевых слоях с большим наращением давления нельзя не считаться с градиентом давления. В качестве обобщения логарифмического закона для скоростей выводится соответствующий закон о стене. Сравнение с измерениями Никурадзе турбулентных течений в разходящихся каналах показывает хорошее совпадение.