ÜBER EXTREMALEIGENSCHAFTEN DER REGULÄREN POLYEDER*

L. Fejes Tóth (Budapest)

Die regelmässigen Vielecke verfügen über eine Reihe altbekannter Extremaleigenschaften. Die isoperimetrische Eigenschaft des regulären n-Ecks, nachdem unter den isoperimetrischen (d. h. umfangsgleichen) n-Ecken das regelmässige den grösstmöglichen Flächeninhalt aufweist, war z. B. schon Lhuilier bekannt. Steiner wusste wohl, dass unter den einem Kreis ein- und umbeschriebenen n-Ecken die regulären n-Ecke den grösstmöglichen bzw. kleinstmöglichen Inhalt und Umfang besitzen. Wir könnten in dieser Hinsicht noch zahlreiche ältere und neuere Ergebnisse nennen, durch welche wir fast gezwungen sind ein „vernünftiges" derartiges Problem, das nicht zu den regulären Vielecken fürt, als Ausnahme anzusehen.

Nun lassen sich mehrere Extremaleigenschaften des regulären Dreiecks leicht auf das Tetraeder übertragen. Aber eine systematische Behandlung der Extremaleigenschaften der regulären Körper finden wir in der älteren Literatur nicht. Vielmehr besteht die überraschende Tatsache, dass hier keine einzige Extremaleigenschaft des regulären Ikosaeders oder Dodekaeders vorkommt.

Jedoch wurden in letzter Zeit in dieser Richtung verschiedenartige Ergebnisse erzielt, worüber ich in diesem Vortrag kurz berichten möchte. Ferner möchte ich auf eineige noch ungelöste Probleme und auf die Hauptrichtungen, in denen die Forschungen weitergeführt werden könnten, hinweisen.

Zunächst einen Blick auf die früheren Ergebnisse, die sich hauptsächlich auf das isoperimetrische Problem beziehen. Bedeuten F und V Oberfläche und Volumen eines Körpers, so stellt das isoperimetrische Problem die Aufgabe von einer bestimmten Körperklasse diejenigen Körper auszuwählen für die der Quotient F^3/V^2 sein Minimum erreicht. Die Tatsache, dass unter den Tetraedern die regulären die Lösung des isoperimetrischen Problems ergeben, hat schon Lhuilier dargetan. Was lässt sich aber bezüglich der übrigen platonischen Körper aussagen?

Einfache Gegenbeispiele zeigen, dass das isoperimetrische Problem für Polyeder mit 8 oder 20 Ecken bzw. Flächen nicht zum Würfel und Dodekaeder bzw. zum Oktaeder und Ikosaeder führt. Vielleicht war es

Vortrag auf der Bulgarischen Mathematikertagung, Sofia, Oktober 1956.

dieser Sachverhalt gewesen der Steiner gezwungen hat anstatt Polyeder mit vorgegebener Ecken- und Flächenzahl nur isomorphe, d. h. zu einem gewissen topologischen Typus gehörige Polyeder zu vergleichen. Er zeigte mit Hilfe seines berühmten Symmetrisierungsverfahrens, dass das reguläre Oktaeder unter allen isomorphen Polyedern das beste ist und sprach dies bezüglich der übrigen platonischen Körper als Vermutung aus.

L. Lindelöf und Minkowski haben gezeigt, dass unter den konvexen n-Flachen mit vorgegebenen äusseren Flächennormalenrichtungen diejenigen die besten sind, die einer Kugel umbeschrieben sind. Daraus folgt leicht, dass das beste n-Flach einer Kugel so umbeschrieben ist, dass jede Fläche die Kugel im Flächenschwerpunkt berührt. Je doch bestimmt diese Bedingung das beste n-Flach keineswegs eindeutig.

Steinitz wendet sich in einer umfangreichen Abhandlung ebenfalls diesem Problemenkreis zu und vergleicht, die Steinerschen Traditionen folgend, verschiedenartige Polyedertypen. Er erledigt mehrere von Steiner aufgeworfene Fragen, war aber nicht im stande die Steinersche Vermutung selbst für den Würfel zu bestätigen. Bezüglich dieser Vermutung äussert er sich folgenderweise: Für einen Beweis dieser Annahme ist auch nicht einmal ein schwacher Ansatz vorhanden, und da nach den Erfahrungen auf diesem Gebiete grösste Zurückhaltung im Aussprechen von Vermutungen zu empfehlen ist, müssen wir diese Frage, insbesondere soweit sie Dodekaeder und Ikosaeder betrifft, als noch gänzlich ungeklärt bezeichnen.

Nun hat M. Goldberg [1] 1935 für ein konvexes n-Flach die isoperimetrische Ungleichung

$$F^3/V^2 \geqq 54\,(n-2)\,\mathrm{tg}\,\omega_n\,(4\sin^2\omega_n - 1)\,; \qquad \omega_n = \frac{n}{n-2}\,\frac{\pi}{6}$$

ausgesprochen, in der Gleichheit nur für die regulären Dreikantpolyeder zutreffen sollte. Ist dies richtig, so folgt, dass das reguläre Hexaeder und Dodekaeder nicht nur unter den topologisch isomorphen Polyedern, sondern sogar unter allen konvexen Polyedern mit 6 bzw. 12 Flächen die besten sind.

Goldberg verwendet bei seinen Überlegungen die Konvexität einer ziemlich verwickelten Funktion von zwei Veränderlichen. Da aber diese Konvexität Goldberg nicht nachweisen konnte, sollten seine Überlegungen nur als ein Beweisansatz und die Ungleichung als eine Vermutung angesehen werden.

Ich gab 1948 einen Beweis der obigen Ungleichung [2]. Damit wurde die Steinersche Vermutung für Hexaeder und Dodekaeder unter viel allgemeineren Bedingungen bestätigt. Später gab ich noch einen zweiten Beweis [3] und ganz kürzlich gelang es A. Florian [4] die im Goldbergschen Beweis befindliche Lücke durch den Nachweis der Konvexität der fraglichen Funktion zu beheben. Damit sind derzeit für die obige Ungleichung insgesamt drei verschiedene Beweise bekannt.

Für das Ikosaeder steht aber die Richtigkeit der Steinerschen Vermutung noch immer nicht fest. Immerhin lässt sich für jedes konvexe Polyeder mit n Ecken die mit der obigen analoge Ungleichung

$$F^3/V^2 \geqq \frac{27\sqrt{3}}{2}(n-2)(3\,\mathrm{tg}^2\,\omega_n-1)$$

vermuten, wobei Gleichheit nur für die regulären Dreieckspolyeder bestehen sollte. Daraus würde folgen, dass das reguläre Oktaeder und Ikosaeder nicht nur unter den isomorphen Polyedern, sondern sogar unter allen konvexen Polyedern mit 6 bzw. 12 Ecken die besten sind.

Wir verlassen jetzt für eine Weile das isoperimetrische Problem um uns weiteren Problemen zuzuwenden. Der holländische Biologe Tammes untersuchte (1930) an den Pollenkörnern verschiedener Blumen die Verteilung der Austrittstellen, durch welchen das Plasma ausfliesst. Es gibt Blumen, z. B. Fumaria capriolata, mit kugelförmigen Pollenkörnern, an deren Oberfläche die Austrittstellen gleichmässig verteilt sind. Hier beobachtete Tammes eine Bestrebug nach einer solchen Verteilung, bei welcher die Austrittstellen möglichst weit von einander liegen und warf deshalb folgendes Problem auf: In welcher Anordnung erreicht der Mindestabstand zwischen n sphärischen Punkten sein Maximum? Auf dieses Problem bezieht sich folgende Abschätzungsformel [5]:

Von $n > 2$ Punkten der Einheitskugelfläche lässt sich stets ein Puntpaar vom Abstand

$$\leqq (4-\mathrm{cosec}^2\omega_n)^{\frac{1}{2}}$$

herausgreifen.

Diese Ungleichung lässt sich für $n=3$, 4, 6 und 12 nicht verbessern. In diesen Fällen ist die extremale Punktanordnung durch die Ecken eines regulären Dreiecks, Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders gegeben. Bei der Punktanzahl 8 oder 20 erweist sich aber die Eckpunktverteilung des Würfels bzw. Dodekaeders nicht als extremal.

Für $n=5$ ist die Punktanordnung durch die obige Extremalforderung nicht eindeutig bestimmt. Die beste Verteilung entsteht, wie schon Tammes gezeigt hat, folgendermassen: man lege zwei Punkte in die beiden Pole und drei Punkte auf den Äquator so, dass der Mindestabstand nicht unter den Abstand zwischen einem Pol und einem Äquatorpunkt sinkt. Folglich stimmt der maximale Mindestabstand für $n=5$ und $n=6$ überein.

Die Fälle $n=7$, 8 und 9 haben, durch eine interessante Kombination elementargeometrischer und topologischer Methoden, Schütte und van der Waerden [6] erledigt. Von ihren Ergebnissen heben wir nur den Fall $n=8$ hervor, bei dem die Lösung durch die Ecken des 8-eckigen archimedischen Antiprismas geleistet wird.

Ausser den genannten Fällen ist das Problem von Tammes noch nicht gelöst. Es wäre wünschenswert die Lösungen durch Erledigung der Fälle $n=10$ und 11 wenigstens für $n \leqq 12$ zu vervollständigen.

Der maximale Mindestabstand ergibt offensichtlich den Durchmesser des grössten Kreises, dessen n kongruente Exemplare ohne gegenseitige Überdeckung auf der Kugel Platz haben. Dementsprechend lässt die obige Abschätzungformel folgende Formulierung zu:

Sind auf einer Kugel $n \geqq 3$ kongruente Kreise eingelagert, so ist die Lagerungsdichte

$$\leqq \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\omega_n\right).$$

Ein duales Gegenstück dieses Satzes ist folgender Satz [7]:

Wird die Kugel durch $n \geqq 3$ kongruente Kreise überdeckt, so ist die Überdeckungsdichte

$$\geqq \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\omega_n\right).$$

Diese Schranken streben mit wachsendem n monoton zu—bzw. abnehmend gegen die Grenzwerte $\pi/\sqrt{12}$ bzw. $2\pi/\sqrt{27}$, die die Dichten der dichtesten ebenen Kreislagerung bzw. der dünnsten ebenen Kreisüberdeckung angeben. Folglich lässt sich die Kugelfläche weder so dicht durch wenigstens drei kongruente Kreise ausfüllen, noch so dünn überdecken wie die Euklidische Ebene. Der Reiz dieser Tatsache wird dadurch erhöht, dass analoge Aussagen für den 3-dimensionalen sphärischen und Euklidischen Raum nicht gelten.

Für die obigen Ungleichungen habe ich verschiedenartige Beweise erbracht [8]. Wir skizzieren hier den Grundgedanken eines äusserst einfachen Beweises der zweiten Ungleichung in folgender äquivalenter Form:

Ist ein konvexes Polyeder mit n Ecken oder mit n Flächen in eine Kugelschale von den Radien r und R eingebettet, so gilt

$$\frac{R}{r} \geqq \sqrt{3}\operatorname{tg}\omega$$

Die Behauptungen bezüglich vorgegebener Eckenzahl und Flächenzahl sind gleichwertig und folgen auseinander durch Polarität. Die Behauptung für ein n-Flach hängt mit dem Überdeckungsproblem dadurch zusammen, dass die Grundflächen der, eine Kugel bedeckenden, n Kugelkappen ein, in der Kugel enthaltendes, n-Flach begrenzen. Aus der Tatsache, dass die Kugelkappen nicht zu klein sein können folgt, dass der Halbmesser r einer im n-Flach liegenden, mit der ursprünglichen Kugel konzentrischen Kugel nicht zu gross sein kann. Umgekehrt lässt sich von r auf die Überdeckungsdichte schliessen.

Wir beweisen die Ungleichung für ein Polyeder mit n Ecken. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $R=1$ ist und, dass das Polyeder nur Dreiecksflächen besitzt. Da die Anzahl der Dreiecksflächen, zufolge des Eulerschen Polyedersatzes, $2n-4$ beträgt, gibt es im sphärischen Netz des Polyeders ein Dreieck vom Inhalt $\frac{4\pi}{2n-4}$. Mithin ist der Umkreishalbmesser dieses Dreiecks nicht kleiner als der Umkreishalbmesser eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks vom Inhalt $\frac{4\pi}{2n-4}$. Dies ergibt aber für den Abstand der betrachteten Dreiecksfläche vom Kugelmittelpunkt, und damit für r, eben die im obigen Satz angegebene Schranke.

Die Untersuchung gewisser Polyedertypen ist zu eng um allgemeine Resultate zu gewinnen. Dagegen erweist sich die Betrachtung der Polyederklassen von vorgegebener Ecken- oder Flächenzahl als zu weit um alle fünf Platonische Körper durch eine Extremalaufgabe zu erfassen. Das „echte“ räumliche Analogon einer Extremaleigenschaft der regulären Vielecke entsteht aber eigentlich dadurch, dass die Ecken- und Flächenzahl gleichzeitig vorgegeben wird. Auf diese Weise gelingt es uns Abschätzungsformeln herzuleiten, die Extremaleigenschaften aller fünf regulären Polyeder zum Ausdruck bringen. Zum Beispiel sei folgender Satz erwähnt:

Ist r und R der In- und Umkugelradius und V das Volumen eines konvexen Polyeders der Flächenzahl f, Eckenzahl e und Kantenzahl k, so gilt

$$\frac{k}{3} \sin \frac{\pi f}{k} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi e}{2k} - 1 \right) r^3 \leqq V$$

$$\frac{2k}{3} \cos^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg} \frac{\pi e}{2k} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi e}{2k} \right) R^3.$$

Gleichheit trifft in beiden Ungleichungen nur für die regulären Körper zu.

Die linksstehende Ungleichung fand ich [3], die rechtsstehende A. Florian [4], nachdem ich sie vorher für Dreieckspolyeder bewiesen, im allgemeinen Fall als Vermutung ausgesprochen und durch einen Beweisansatz unterschtützt habe.

Eine schöne Folgerung der beiden obigen Ungleichungen ist folgender, die oben erwähnte Ungleichung $R/r \geqq \sqrt{3} \operatorname{tg} \omega_n$ als Sonderfall enthaltender Satz:

Bedeuten $p = 2k/f$ die durchschnittliche Seitenzahl der Flächen und $q = 2k/e$ die durchschnittliche Kantenzahl der Ecken eines konvexen Polyeders, so genügen der In- und Umkugelradius r und R der Ungleichung

$$\frac{R}{r} \geqq \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{\pi}{q}.$$

Gleichheit findet nur für ein $\{p, q\}$ statt.

Dabei bedeutet das Schläflische Symbol $\{p, q\}$ ein reguläres Polyeder mit p-seitigen Flächen und q-kantigen Ecken. Zum Beispiel bedeutet $\{4, 3\}$ einen Würfel.

Kehren wir jetzt zum isoperimetrischen Problem zurück! Nach dem Lindelöf—Minkowskischen Satz können wir uns bei Polyedern mit vorgegebener Flächenzahl auf solche beschränken, die etwa der Einheitskugel umbeschrieben sind. Dann gilt aber $3V = F$, d. h. $F^3/V^2 = 27V$, so dass wir nur das Volumen V eines einer Einheitskugel umbeschriebenen n-Flachs abzuschätzen brauchen. Dieses n-Flach ist entweder ein Dreikantpolyeder oder lässt sich als Grenzlage eines solchen auffassen. Folglich können wir in unserem oben erwähnten Satz $f = n$, $e = 2n - 4$, $k = 3n - 6$ setzen, wodurch wir zur gewünschten Volumenabschätzung und dadurch zu der am Anfang erwähnten isoperimetrischen Ungleichung gelangen.

Man könnte nun versuchen auch diese isoperimetrische Ungleichung für Polyeder mit vorgegebener Flächen- und Eckenzahl zu verallgemeinern. Die Tatsache, dass das beste Polyeder nicht nur bei vorgegebener Flächenzahl, sondern auch in vielen auderen Fällen einer Kugel umbeschrieben ist, lässt die Gültigkeit der isoperimetrischen Ungleichung

$$\frac{F^3}{V^2} \geqq 9k \sin \frac{2\pi}{p}\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{q} - 1\right)$$

für beliebige konvexe Polyeder vermuten. Diese würde unsere Ungleichung für n-Flachen, sowie die als Vermutung ausgesprochene isoperimetrische Ungleichung für Polyeder mit n Ecken als Sonderfälle enthalten. Da die Lösung des isoperimetrischen Problems für alle möglichen Polyedertypen, oder etwa für alle zulässigen Wertepaare f, e hoffnungslos scheint, wäre das isoperimetrische Problem für Polyeder mit dem Beweis der obigen Ungleichung in einem gewissen Sinne zum Abschluss gebracht.

Ich möchte nun einige Bemerkungen über die Beweise der Abschätzungsformeln für das Volumen folgen lassen. Die Abschätzung von unten folgt aus einem viel allgemeineren Satz, der sich etwa folgendermassen anschaulich formulireen lässt:

Die Oberfläche der Einheitskugel sei durch ein Netz der Eckenzahl e und Kantenzahl k in $f \geqq 4$ konvexe sphärische Polygone $F_1, \ldots, F_f$ zerlegt. P_i sei ein beliebiger Punkt der Fläche F_i und $z(x)$ eine für $0 \leqq x < \pi$ erklärte streng zunehmende Funktion. Wir belegen die Kugelfläche mit einer Massenverteilung, so dass die Massendichte im Punkt S der Fläche F_i $z(P_iS)$ ausfällt. Um die Gesamtmasse M von unten abzuschätzen verbinden wir jeden Punkt P_i mit den Ecken und Seitenmittelpunkten der entsprechenden Fläche F_i. Dadurch erhalten wir $4k$ Dreiecke. Wir betrachten das „durchschnittliche" Dreieck PQR mit den Winkeln $P = \pi f/2k$, $Q = \pi/2$, $R = \pi e/2k$, d. h. dasjenige Dreieck, dessen Winkel mit den durchschnittlichen Winkeln der $4k$ Dreiecke bei den Flächenpunkten P_i, bei den Seitenmittelpunkten und den Eckpunkten übereinstimmen. Wir belegen auch PQR derart mit einer Massenverteilung, dass die Massendichte in S $z(PS)$ sei. Dann ist die Gesamtmasse M nicht kleiner als die $4k$-fache Masse des Dreiecks PQR.

Ausser der fraglichen Volumenabschätzung lassen sich aus diesem allgemeinen Satz durch Spezialisierung der Funktion $z(x)$ noch verschiedene Ungleichungen herleiten. Auch die Dichtenabschätzungen bei dem Problem der sphärischen Kreislagerung und Kreisüberdeckung ergeben sich aus diesem Satz. Ferner ermöglicht uns dieser Satz auch für nichteuklidische Polyeder zu den obigen analoge Volumen- und Oberflächenabschätzungen anzugeben, die Extremaleigenschaften der regulären Polyeder in nichteuklidischen Räumen ausdrücken. Als eine ganz spezielle, jedoch interessante Anwendung unseres Satzes sei erwähnt, dass der Inhalt des Durchschnittes zwölf kongruenter Kugeln, die alle die Einheitskugel enthalten, dann minimal wird, wenn die Kugeln die Einheitskugel in den Ecken eines regulären Ikosaeders berühren.

Das schöne ist dabei, dass wir hier nichts mit speziellen Funktionen zu tun haben, da durch unseren allgemeinen Satz das Wesen, auf dem alle diese Extremaleigenschaften beruhen, nämlich die Monotonität der Funktion $z(x)$, erfasst wurde. Unser Satz lässt sich sogar für sternartige Netze verallgemeinern, so dass er ausser Extremaleigenschaften der Platonischen Körper und als Grenzfälle der drei regulären Euklidischen Mosaiken $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ und $\{6, 3\}$ auch Extremaleigenschaften der vier Kepler—Poinsotschen Sternpolyeder involviert. Hier haben wir ein Beispiel für eine Verallgemeinerung vor uns, das uns Lebesgues Worte in Erinnerung bringt: La généralisation est le meilleur art pour faire comprendre.

Im Gegensatz zu dem Beweis der obigen Volumenabschätzung von unten, erfordert der Floriansche Beweis der Abschätzung von oben spezielle Funktionendiskussionen. Es wäre wünschenswert auch hier solche allgemeinere Überlegungen zu verwenden, die einen tieferen Einblick in das Wesen der Sache ermöglichen könnten.

Bisher haben wir Polyeder betrachtet, bei denen die Ecken- oder Flächenzahl oder beide vorgegeben waren. Es gibt aber Extremalaufgaben, die sämtliche konvexe Polyeder zur Konkurrenz zulassen. Es hat einen besonderen Reiz, wenn bei einer solchen Rivalität der Sieg durch einen regulären Körper errungen wird. Es lässt sich z. B. vermuten, dass unter allen konvexen Polyedern, die eine feste Kugel enthalten, der umbeschriebene Würfel die kleinstmögliche Kantenlängensumme aufweist. Es wäre schön, die regulären Körper durch derartige einfache und natürliche universale Extremaleigenschaften zu charakterisieren.

Ein weiteres Programm wäre die Übertragung gewisser Extremaleigenschaften der regulären sphärischen und Euklidischen Mosaiken auf die hyperbolische. Dies scheint deshalb lohnend zu sein weil die hyperbolische Ebene an regulären Zerlegungen viel reicher ist, als die elliptische und Euklidische. Anderseits lässt sich bei Problemen, die sich auf die innere Geometrie der Kugel beziehen erst durch Heranziehung von Kugeln von imaginärem Radius eine gewisse Vollständigkeit erreichen. Gewisse Ergebnisse bezüglich Kreislagerungen und Kreisüberdeckungen sind in dieser Richtung bekannt, aber die mannigfaltigen Möglichkeiten, die uns dieses anziehende Gebiet darbeitet, sind noch von weitem nicht erschöpft.

Bedenken wir noch, dass die Untersuchungen auf dem Gebiet der interessanten aber schwierigen mehrdimensionalen Analoga der hier betrachteten Probleme noch kaum über die ersten Anfänge hinausgekommen sind, so wird es uns klar, dass dieser Problemenkreis eine reiche Fundgrube von anziehenden Problemen ist, aus der noch viele wertvolle Einzelheiten zu Tage gebracht werden können.

Eingegangen am 30. VIII. 1957

LITERATUR

1. Goldberg, M. The isoperimetric problem for polyhedra. Tôhoku Math. J. **40** (1935), 226—236.
2. Fejes Tóth, L. The isepiphan problem for n-hedra. Amer. J. Math. **70** (1948), 174—180.
3. Fejes Tóth, L. Extremum properties of the regular polyhedra. Canadian J. Math. **2** (1950), 22—31.

4. Florian, A. Ungleichungen über Polyeder. Monatshefte Math. **60** (1956) 130—148.
5. Fejes Tóth, L. Über die Abschätzung des Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. Jber. dtsch. Math.-Ver. **53** (1943), 66—68.
6. Schütte, K. und B. L. van der Waerden. Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? Math. Ann. **123** (1951), 96—124.
7. Fejes Tóth, L. Über die Bedeckung einer Kugelfläche durch kongruente Kugelkalotten. Matematikai és Fizikai Lapok **50** (1943), 40—46 (ungarisch mit deutschem Auszug).
8. Fejes Tóth, L. Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Berlin Springer 1953.

ЕКСТРЕМАЛНИ СВОЙСТВА НА РЕГУЛЯРНИТЕ МНОГОСТЕНИ

Л. Фейеш Тот (Будапеща)

РЕЗЮМЕ

Работата започва с исторически бележки за изопериметричната задача за многостените и се разглеждат различни нови неравенства, изразяващи различни екстремални свойства на регулярните многостени. Типичен резултат се явява следната теорема, принадлежаща на автора [3] и на Флориан [4]:

Нека r и R са радиусите на вписаната и описаната сфера на многостена, V — неговият обем, f — броят на стените, e — броят на върховете му и k — броят на ребрата му. Тогава имаме

$$\frac{k}{3}\sin\frac{\pi f}{k}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}^2\frac{\pi e}{2k}-1\right)r^3 \leqq V \leqq$$

$$\frac{2k}{3}\cos^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}\frac{\pi e}{2k}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi e}{2k}\right)R^3.$$

Равенство се достига само за регулярните тела.

Формулират се също някои нерешени задачи, като например: да се намери измежду всички изпъкнали многостени с дадена вписана сфера този, който има най-малка сума на дължините на ребрата му. Изказва се хипотезата, че въпросният многостен е куб.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Л. Фейеш Тот (Будапещ)

РЕЗЮМЕ

Работа начинается историческими замечаниями об изопериметрической задаче для многогранников и рассматривает различные новые неравенства выражающие различные экстремальние свойства регулярных многогранников. Типическим результатом является следующая теорема принадлежащая автору [3] и Флориану [4]:

Пусть r и R суть радиусы вписанной и описанной сферы выпуклого многогранника, V его обем, f число его граней, e число его вершин и k число его ребер, тогда имеем

$$\frac{k}{3}\sin\frac{\pi f}{k}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}^2\frac{\pi e}{2k}-1\right)r^3\leqq V\leqq$$

$$\frac{2k}{3}\cos^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}\frac{\pi e}{2k}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi e}{2k}\right)R^3.$$

Равенство достигается только для регулярных тел.

Формулируются также некоторые нерешенные задачи, как напр.: найти из всех выпуклих многогранников с заданной вписанной сферы, тот который имеет най-меньшую сумму длин ребер. Высказивается гипотеза, что это куб.