ОБИКНОВЕНИ ЛИНЕЙНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ПРИ ОБЩИ ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ

Ив. Тодоров

В 1936 г. Сурикова [1] конструира функция на Грин за диференциални уравнения от n-ти ред

$$L(u) \equiv u^{(n)}(x)+p_1(x)\,u^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)\,u(x) = f(x), \tag{1}$$

където $p_k(x)$ и $f(x)$ са непрекъснати функции в крайния затворен интервал $[a, b]$, при гранични условия от вида

$$A_i(u) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \int_a^b u^{(\nu-1)}(x)\, d\alpha_{i\nu}(x) = 0,$$

където $\alpha_{i\nu}(x)$ са функции с ограничена вариация. Смогоржевски [2] обобщава резултатите на Сурикова за системи от линейни диференциални уравнения, като конструира в този случай съответният тензор на Грин.

В настоящата работа си поставяме за цел да обобщим резултатите на Сурикова в друга насока. Като използуваме същия метод за конструиране на Гриновата функция, ще дадем необходимите и достатъчни условия, които трябва да удовлетворяват линейните функционали $A_i(u)$, за да съществува функция на Грин с определени свойства.

1. Означения и помощни твърдения

Нека $L(u)$ е операторът, определен с (1), и нека

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$$

е фундаментална система на хомогенното уравнение $L(u)=0$.

Нека R е пространството на n пъти диференцируемите функции с непрекъснати n-ти производни и нека $A_i(u)$, $i=1, 2, \ldots, n$, са линейни функционали в R, които удовлетворяват условието

$$D[A_i(y_k)] \equiv \begin{vmatrix} A_1(y_1) \ldots A_1(y_n) \\ A_2(y_1) \ldots A_2(y_n) \\ \cdot \\ A_n(y_1) \ldots A_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Случаят $D=0$, както се вижда от цитираните работи [1] и [2], също може да се обхване, но ние няма да се занимаваме с него.

В разглеждания случай фундаменталната система $y_1(x)$, $y_n(x)$ може така да се избере, че да са изпълнени равенствата

$$A_i(y_k)=\begin{cases} 0 & i\neq k, \\ 1 & i=k. \end{cases} \tag{3}$$

Нека наистина $y_1(x),\ldots,\bar{y}_n(x)$ е произволна фундаментална система и нека $a_{ij}=A_i(\bar{y}_j)$. Тогава функциите

$$y_k(x)=\frac{1}{D(a_{ij})}\sum_{\nu=1}^{n}A_{k\nu}\bar{y}_\nu(x) \qquad (k=1,\ 2,\ldots,n),$$

където $A_{k\nu}$ е адюнгираното количество на елемента $a_{k\nu}$ в детерминантата $D(a_{ij})$, образуват фундаментална система, която удовлетворява условията (3). За да съкратим писането, по-нататък ще си служим именно с тази система.

Уравнението (1) при гранични условия

$$A_i(u)=0, \tag{4}$$

когато функционалите $A_i(u)$ удовлетворяват (2), има единствено решение, което при направените предположения за $p_k(x)$ и $f(x)$ принадлежи на R. Методът на Лагранж (на вариране на постоянните) за решаване на нехомогенно линейно уравнение при дадена фундаментална система на съответното хомогенно уравнение ни позволява, като използуваме (3), да напишем това решение във вида

$$u(x)=\int_a^x\sum_{i=1}^{n}u_i(t)y_i(x)f(t)dt-\sum_{i=1}^{n}c_iy_i(x)=u_0(x)-\sum_{i=1}^{n}A_i(u_0)y_i(x). \tag{5}$$

Тук

$$u_0(x)=\int_a^x\sum_{i=1}^{n}u_i(t)\,y_i^{(\nu)}(x)\,f(t)dt,$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_i(x)y_i^{(\nu)}(x)=\begin{cases} 0 & \nu=0,1,\ldots,n-2, \\ 1 & \nu=n-1, \end{cases} \tag{6}$$

и следователно

$$u_0(a)=u_0'(a)=\ldots=u_0^{(n-1)}(a)=0. \tag{7}$$

Подпространството на R, за което са в сила равенствата (7), ще бележим с R_0.

Нека $g(x,\ t)$ е ядрото

$$g(x,\ t)=\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}u_i(t)y_i(y) & a\quad t\leq x, \\ 0 & x<t\leq b. \end{cases} \tag{8}$$

Както се вижда от (6), $g(x,t)$ е непрекъснато спрямо двата си аргумента заедно с производните си по x до $n-2$ ред включително, а $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} g(x,t)$ прави скок 1 при $t=x$. С помощта на $g(x,t)$ $u_0(x)$ може да се представи във вида

$$u_0(x)=\int_a^b g(x,t)\,f(t)dt. \tag{9}$$

Да разгледаме нормите

$$\|u\|=\sup_{a\leq x\leq b}|u(x)|,\quad \|u\|_k=\max_{i=0,1,\ldots,k}\ \sup_{a\leq x\leq b}|u^{(i)}(x)|,\quad P(u)=\int_a^b|u(x)|\,dx.$$

От (9) се вижда, че ако $u_0(x)$ принадлежи на R_0 и $L(u_0)=f(x)$, то

$$\|u_0\|_n\leq M\|f\|. \tag{10}$$

Наистина

$$\|u_0\|_n\leq B\|u_0^{(n)}(x)\|,$$

а от своя страна

$$|u_0^{(n)}(x)|=\left|\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}g(x,t)\,f(t)dt\right|\leq\int_a^x\left|\frac{\partial^n g(x,t)}{\partial x^n}f(t)\right|dt+$$

$$+\left|\left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}g(x,t)\right|_{t=x}f(x)\right|\leq C\sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|.$$

Аналогично се проверява, че

$$\|u_0\|_{n-1}+P(u_0^{(n)})\leq MP(f). \tag{11}$$

2. Зависимост на функцията на Грин от граничните условия

Ще казваме, че функцията $G(x,t)$ е функция на Грин на оператора (1) при гранични условия (4), ако решението на (1), (4) има вида

$$L^{-1}(f)\equiv u(x)=\int_a^b G(x,t)\,f(t)dt, \tag{12}$$

както и да избираме непрекъснатата функция $f(t)$. Функцията $G(x,t)$ може да бъде дефинирана само почти навсякъде относно t при всяко фиксирано x (т. е. с евентуално изключение на съвкупност с лебегова мярка 0, която може да се мени с x), тя може да бъде и обобщена функция, стига да е дефинирано произведението ѝ с произволна непрекъсната функция $f(t)$ и интегралът (12) винаги да съществува в някакъв смисъл. Свойствата на решението (12) зависят от функционалите $A_i(u)$.

Ще потърсим условията, при които неравенствата (10) и (11) запазват своята валидност, когато $u_0(x)$ заменим с $u(x)$.

Лема 1. Нека в пространството R е дефинирана норма $P_1(u)$ и в съвкупността $C_{[a,\ b]}$ на непрекъснатите функции — норма $P_2(f)$ и нека за функциите от R_0

$$P_1(u_0) \leq MP_2(f), \tag{13}$$

където $f(x)=L(u_0)$. Нека $L(u)=f(x)$ и $A_i(u)=0$. За да е в сила неравенството

$$P_1(u) \leq NP_2(f) \tag{14}$$

при всеки избор на непрекъснатата функция $f(x)$, е необходимо и достатъчно функционалите $A_i(u)$ да удовлетворяват в R_0 условията

$$|A_i(u_0)| \leq M_iP_2(f). \tag{15}$$

Доказателство. Достатъчността на условието (15) следва непосредствено от представянето (5) на решението на (1), (4). Ще покажем, че от (13) и (14) следва (15). Наистина съгласно (5)

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(u_0)\, y_i(x) = u_0(x) - u(x)$$

и значи

$$P_1\left(\sum_{i=1}^{n} A_i(u_0) y_i(x)\right) \leq P_1(u) + P_1(u_0) \leq (N+M)\, P_2(f). \tag{16}$$

За да завършим доказателството на лемата, ще покажем, че съществува константа $C>0$ такава, че при всеки избор на числата c_i да е изпълнено неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i| \leq CP_1\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)\right). \tag{17}$$

Поради положителната хомогенност на нормите (17) е еквивалентно на твърдението, че $P_1\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)\right)$ има положителен минимум, когато константите c_i са подчинени на условието $\sum_{i=1}^{n} |c_i| = 1$.

Това обаче е следствие от линейната независимост на функциите $y_i(x)$.

От (17) при $c_i = A_i(u_0)$ получаваме съгласно (16)

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i(u_0)| \leq C(M+N)\, P_2(f);$$

оттук следва (15).

При специален избор на нормите P_1 и P_2 доказаната лема ни дава възможност да установим различни твърдения за решението на (1), (4). Ще докажем две подобни твърдения.

Теорема 1. Необходимото и достатъчно условие, за да може решението на уравнението (1) при гранични условия (4) да се представя във вида

$$u(x)=\int_a^b f(t)\, d_t\gamma(x,t), \tag{18}$$

където

$$\gamma(x, t)=\int_a^t g(x, s)\, ds-\sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\, y_i(x), \tag{19}$$

$g(x,t)$ се дава с (8), а $\alpha_i(t)$ са функции с ограничена вариация, е

$$|A_i(u_0)| \leqq M_i \|f\| \tag{20}$$

когато $u_0 \varepsilon R_0$ и $L(u_0)=f(x)$.

Доказателство. I. Необходимост. От (18) и (9) с помощта на (5) и (10) получаваме

$$|u^{(k)}(x)| \leqq |u_0^{(k)}(x)|+\left|\sum_{i=1}^n y_i^{(k)}(x)\int_a^b f(t)d\alpha_i(t)\right| \leqq N\|f\|, \quad k=0,1,\ldots, n,$$

и значи

$$\|u(x)\|_n \leqq N\|f\|.$$

Оттук, като използуваме отново (10) и лема 1, получаваме (20).

II. Достатъчност. От (20) се вижда, че функционалите

$$\Phi_i(f)=A_i(u_0)$$

удовлетворяват всички условия на теоремата на Рис [3] за общия вид на линейните функционали в $C_{[a,\, b]}$ и значи

$$A_i(u_0)=\int_a^b f(t)\, d\alpha_i(t),$$

където $\alpha_i(t)$ са функции с ограничена вариация. Оттук, като използуваме (5) и (9), получаваме представянето (18).

Представянето (18) може да се счита частен случай от (12), при който $G(x, t)$ се разглежда като псевдофункция на t от S_0^0, която зависи от параметъра x (относно терминологията вж. [4]). Тъй като $u(x)$ се определя еднозначно от (1) и (4) при всеки избор на непрекъснатата функция $f(x)$, не е трудно да се покаже, че псевдофункцията на Грин $G(x, t)$ е определена еднозначно в S_0^0. От (18) — (19) се вижда, че естествената най-широка съвкупност от функции $f(x)$, за които можем да твърдим, че уравненията (1), (4) имат еднозначно решение, е съвкупността от сумируемите относно $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$ и x в смисъл на Стилтес—Лебег функции.

Теорема 2. Необходимото и достатъчно условие, за да допуска решението на (1), (4) представяне от вида (12)

$$u(x)=\int_a^b G(x, t)\, f(t)dt,$$

където

(21) $$G(x, t)=g(x,t)-\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\, y_i(x),$$

а $\varphi_i(t)$ са ограничени и измерими в лебегов смисъл функции, е

(22) $$A_i(u_0) \qquad M_i P(f),$$

при $u_0(x) \varepsilon R_0$, $L(u_0)=f(x)$.

Подробностите на доказателството няма да излагаме. То се провежда по същия начин както при теорема 1, като вместо (10) се използува (11) и вместо теоремата на Рис за общия вид на линейните функционали в $C_{[a,\,b]}$ се прилага теоремата на Рис [3] за общия вид на линейните функционали в $L_{[a,\,b]}$, която ни позволява да заключим с помощта на (22), че

(23) $$A_i(u_0)=\int_a^b \varphi_i(x)\, f(x)dx, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

където $\varphi_i(x)$ са ограничени измерими функции.

От теорема 2 се обхващат в частност и функционалите, които Сурикова разглежда в своята работа.

Доказаните следствия ни дават необходимите и достатъчни условия, които трябва да удовлетворяват функционалите $A_i(u)$, за да бъде съответната функция на Грин елемент от S_0^0 или измерима и ограничена функция. Възниква въпросът, при какви условия можем да твърдим, че съществува сумируема по t или непрекъсната по t при всяко x функция на Грин на оператора $L(u)$ при гранични условия (4). Отговор на този въпрос дават следните теореми:

Теорема 3. За да съществува сумируема спрямо t функция на Грин, т. е. за да бъде функцията $\gamma(x, t)$ от (19) абсолютно непрекъсната спрямо t при всяко x, е необходимо и достатъчно функциите $\alpha_i(t)$ да са абсолютно непрекъснати.

Теорема 4. За да бъде функцията на Грин $G(x, t)$ непрекъсната спрямо t при всяко x, е необходимо и достатъчно функционалите A_i да имат в R_0 вида (23), като функциите $\varphi_i(x)$ са непрекъснати.

Двете теореми се доказват еднотипно. Ще се ограничим с доказателството на първата от тях.

Съгласно (19) теорема 3 е еквивалентна на твърдението: Необходимото и достатъчно условие функцията $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\, y_i(x)$ да е абсолютно непрекъсната по t при всяко x е $\alpha_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ да са абсолютно непрекъснати.

Достатъчността на условието е очевидна. За да установим неговата необходимост, ще отбележим, че от изискването функцията

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\, y_i(x), \tag{24}$$

където $\alpha_i(t)$ са функции с ограничена вариация, а $y_i(x)$ — непрекъснати линейно независими функции, да е абсолютно непрекъсната по t при всяко x от $[a, b]$, следва, че тя е абсолютно непрекъсната по t равномерно относно x.

Допускаме противното. Нека функцията (24) е абсолютно непрекъсната по t при всяко фиксирано x и въпреки това съществува число $\varepsilon_0 > 0$, редици

$$a \leq t_{11}^p < t_{12}^p \leq t_{21}^p < t_{22}^p \leq \ldots \leq t_{k_p 1}^p < t_{k_p 2}^p \leq b \quad (p=1, 2, \ldots),$$

за които

$$\sum_{k=1}^{k_p} | t_{k2}^p - t_{k1}^p | < \frac{1}{p},$$

и точки x_p от $[a, b]$ такива, че

$$\left| \sum_{k=1}^{k_p} \sum_{i=1}^{n} y_i(x_p) \left[\alpha_i(t_{k2}^p) - \alpha_i(t_{k1}^p) \right] \right| > \varepsilon_0. \tag{25}$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че редицата от точки x_p е сходяща: $x_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} x_0$. Тъй като функциите $\alpha_i(t)$ имат ограничени вариации, то

$$\left| \sum_{k=1}^{k_p} \left[\alpha_i(t_{k2}^p) - \alpha_i(t_{k1}^p) \right] \right| \leq V_a^b \alpha_i \equiv a_i.$$

При p достатъчно голямо поради непрекъснатостта на $y_i(x)$ можем да считаме, че

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, | y_i(x_p) - y_i(x_0) | < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Комбинирано с (24), това дава

$$\left| \sum_{k=1}^{k_p} \sum_{i=1}^{n} y_i(x_0) \left[\alpha_i(t_{k2}^p) - \alpha_i(t_{k1}^p) \right] \right| > \frac{\varepsilon_0}{2}$$

въпреки че

$$\sum_{k=1}^{k_p} | t_{k2}^p - t_{k1}^p | < \frac{1}{p}$$

което противоречи на абсолютната непрекъснатост на (24) при $x=x_0$.

И тъй абсолютната непрекъснатост по t на функцията (24) е равномерна спрямо x. Това значи, че

$$\sup_{a\leqq x\leqq b}\left|\sum_{i=1}^{n} y_i(x)\left\{\sum_{k=1}^{k_p}\left[\alpha_i\,(t_{k2}^p)-\alpha_i\,(t_{k1}^p)\right]\right\}\right|\to 0$$

при

$$\sum_{k=1}^{k_p}\left|t_{k2}^p-t_{k1}^p\right|\to 0.$$

Както видяхме при доказателството на лема 1 (формула (17)),

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \leqq C \sup_{a\leqq x\leqq b}\left|\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)\right|.$$

Остава да положим

$$c_i=\sum_{k=1}^{k_p}\left[\alpha_i\,(t_{k2})-\alpha_i\,(t_{k1})\right],$$

за да заключим, че всяка от функциите $\alpha_i(t)$ е абсолютно непрекъсната, с което теорема 3 е доказана.

Ще отбележим без доказателство, че функционали от вида

$$A(u)=\lambda u^{(n-1)}(a)+\mu u^{(n-1)}(b)+\sum_{k=0}^{n-2}\int_a^b u^{(k)}(x)\,d\alpha_k(x),$$

където $\alpha_k(x)$ са функции с ограничени вариации, удовлетворяват условието на теорема 4. Напротив, функционалът

$$A(u)=u^{(n-1)}(x_0)$$

при $a<x_0<b$ не удовлетворява това условие и съответната функция на Грин е прекъсната относно параметъра t.

Накрай бих искал да благодаря на проф. Я. Тагамлицки за постановката на задачата, разглеждана в настоящата работа.

Постъпила на 25. III. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Сурикова, З. Ф. — Общие линейные дифференциальные системы. ДАН (1936), 153—158.
2. Smogorshewski, A. — Les fonctions de Green des systèmes différentielles dans un domaine à une seule dimension. Мат. сб. 7/49 (1940), 179—196.
3. Riesz, Fr. et B. Sz.-Nagy — Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest, 1952, § 36, p. 78, § 50, p. 110.
4. Тагамлицки, Я. — Допълване на конуси и приложение към проблемата за обобщение на понятието функция. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., 49 (1954/55), 23—48.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ ОБЩИХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Ив. Тодоров

РЕЗЮМЕ

Рассматривается уравнение

$$(L(u) \equiv u^{(n)}(x) + p_1(x)\, u^{(n-1)}(x) + p_2(x)\, u^{(n-2)}(x) + \ldots + p_n(x)\, u(x) = f(x),$$

где $p_\nu(x)$ и $f(x)$ непрерывные функции на конечном замкнутом промежутке $[a, b]$ при краевых условиях

$$A_i(u) = 0,$$

где $A_i(u)$ линейные функционалы, для которых определитель $D[A_i(y_k)]$ не равняется нулю, когда $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ произвольная фундаментальная система уравнения $L(u) = 0$.

Исследуется зависимость обратного оператора $L^{-1}(f)$ от функционалов $A_i(u)$. Доказываются следующие утверждения:

1. Для того, чтобы имело место представление

$$L^{-1}(f) = \int_a^b f(t)\, d_t \gamma(x, t),$$

где $\gamma(x, t)$ подчинена некоторым естественным требованиям, необходимо и достаточно, чтобы

$$|A_i(u)| \leqq M_i \max_{k=0,1,\ldots,n} \sup_{a \leqq x \leqq b} |u^{(k)}(x)|.$$

2. Для существования ограниченной и измеримой функции Грина $G(x, t)$ такой что

$$L^{-1}(f) = \int_a^b G(x, t)\, f(t)\, dt,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$|A_i(u)| \leqq M_i \left\{ \max_{k=0,1,\ldots,n-1} \sup_{a \leqq x \leqq b} \left[|u^k(x)| + \int_a |u^n(x)|\,dx \right] \right\}.$$

Оба утверждения получаются из оценок некоторых норм оператора $L^{-1}(f)$.

Функция Грина конструируется методом использованным Суриковой [1]. Результаты Суриковой в первом разделе ее работы являются следствием из утверждения 2.

Находятся также необходимые и достаточные условия для существования сумируемой и непрерывной функции Грина.

ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES A CONDITIONS LIMITES GENERAUX

I. Todorov

RESUME

On considère l'équation

$$L(u) \equiv u^{(n)}(x) + p_1(x)\, u^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)\, u(x) = f(x),$$

$p_\nu(x)$ et $f(x)$ étant des fonctions continues dans l'intervalle $[a, b]$, à conditions „limites"

$$A_i(u) = 0,$$

$A_i(u)$ étant des fonctionnelles linéaires telles que le déterminant $D[A_i(y_k)]$ ne s'annule pas, lorsque $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ est un système fondamental de l'équation $L(u) = 0$.

On étudie la dépendance de l'opération inverse $L^{-1}(f)$ des fonctionfnelles $A_i(u)$ et on établit les résultats suivants:

1. La représentation

$$L^{-1}(f) = \int_a^b f(t)\, d_t \gamma(x, t),$$

$\gamma(x, t)$ satisfaisant quelques conditions naturelles, a lieu si et seule ment si

$$|A_i(u)| \leqq M_i \max_{k=0,1,\ldots,} \sup_{a \leqq x \leqq b} |u^{(x)}(x)|.$$

2. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une onction de Green $G(x, t)$ bornée et mésurable, telle que

$$L^{-1}(f) = \int_a^b G(x, t)\, f(t)\, dt,$$

est

$$|A_i(u)| \leqq M_i \left\{ \max_{k=0,1,\ldots,n-1} \sup_{a \leqq x \leqq b} |u^{(k)}(x)| + \int_a^b |u^{(n)}(x)|\, dx \right\}.$$

La fonction de Green est construite par une méthode utilisée par Surikova [1]. La première partie des résultats de Surikova sont des conséquences de l'assertion 2.

On trouve aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction de Green sommable ou continue.