

LES PRINCIPES DE D'ALEMBERT-LAGRANGE ET HÖLDER DANS LA MÉCANIQUE DES SYSTEMES NON-HOLONOMES

V. V. Dobronravoff (Moscou)

§ 1

Des notions telles que liaisons et déplacements virtuels forment, comme on sait, les points de départ pour le développement de la mécanique analytique. Presque tous les types connus des équations du mouvement de divers systèmes mécaniques, assujettis aux liaisons de telle ou autre nature, sont déduits du principe des déplacements virtuels (uni au principe de d'Alembert) où ils peuvent être déduits de la même manière.

Pourtant, en déduisant les équations du mouvement des systèmes mécaniques avec des liaisons non-holonomes de premier ordre, c'est-à-dire des liaisons exprimées par des équations différentielles linéaires non intégrables de premier ordre par rapport aux dérivées des coordonnées généralisées du système, on emploie tacitement une proposition (voir, par exemple Appel [1] et Tzenoff [2]), qu'on pourrait nommer conventionnellement à un certain point „principe de Hölder“, en tant que l'idée fondamentale de cette proposition a été développée de la manière la plus détaillée dans le travail de ce savant.

L'essentiel de cette proposition consiste, comme on sait, dans ce qui suit: si la liaison superposée sur le système est exprimée par des relations différentielles linéaires entre les coordonnées du système et du temps, généralement parlant, alors les déplacements virtuels (variations des coordonnées) du système doivent satisfaire à la relation obtenue de la donnée, si nous considérons le temps t fixé et posons la différentielle virtuelle du temps égale à zéro ($\delta t = 0$), en substituant les différentielles des coordonnées par leurs variations.

Autrement exprimé, à chaque relation linéaire entre les composantes du déplacement réel du système

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} dq_j + a_i dt = 0$$

où

$$a_{ij} = a_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$a_i = a_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

correspondra la relation entre les composantes du déplacement virtuel :

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta q_j = 0.$$

Dans le cas des liaisons scléronomes, c'est-à-dire quand $a_i = 0$ et les coefficients a_{ij} ne dépendent pas de t la proposition donnée est naturellement évidente en tant que les déplacements réels se trouvent dans la classe des déplacements virtuels. Avec cela sous le déplacement virtuel nous entendons, suivant le fondateur de la mécanique analytique Lagrange, son contenu le plus simple, c'est-à-dire chaque déplacement du système, permis par l'état des liaisons dans chaque moment fixé du temps t .

Pourtant, en cas des liaisons rhéonomes, on peut observer ici certaines particularités dérivant essentiellement du fait que dans le cas des liaisons rhéonomes les déplacements réels peuvent ne pas se trouver dans la classe des déplacements virtuels. Cela délimite précisément les systèmes rhéonomes des systèmes scléronomes et a servi de base pour de profondes recherches des qualités mécaniques et géométriques des systèmes mécaniques rhéonomes. Ici il faut mentionner en premier lieu le grand travail de Wundheiler [9] et puis celui de Vranceanu [10].

Dans certaines classes des équations du mouvement des systèmes mécaniques non-holonomes. apparaissent dans les équations pour les systèmes rhéonomes non-holonomes des membres supplémentaires spéciaux, caractérisant la rhéonomité des liaisons comme, par exemple, dans les équations écrites en coordonnées non-holonomes, v. [11].

Premièrement, il faut noter, que dans ce cas une des relations (1) et (2) peut être intégrée et l'autre non.

Considérons comme l'exemple le plus simple le mouvement plan d'un point matériel de la masse de l'unité, sans action des forces actives, avec la liaison suivante :

$$(3) \quad \dot{q}_1 - \beta q_2 = 0$$

où q_1, q_2 sont les coordonnées cartésiennes du point et $\beta = \text{const.}$

En différentielles la relation (3) se transcrit :

$$(4) \quad dq_1 - \beta q_2 dt = 0.$$

L'équation (3) est évidemment non intégrable. Cependant, selon le principe précédant, la relation entre les déplacements virtuels prendra la forme

$$(5) \quad \delta q_1 = 0$$

et après l'intégration nous obtiendrons :

$$(6) \quad q_1 = f(t),$$

où $f(t)$ est une fonction arbitraire du temps, non dépendante de paramètre α quelconque.

Du point de vue formel la relation (6) peut ne pas être contradictoire à l'équation de liaison, car de (3) on peut trouver q_2 , mais le degré d'indétermination est plus fort qu'il ne le serait en cas des liaisons scléronomes.

De plus on peut montrer que le problème de définition du mouvement d'un système avec les liaisons rhéonomes non-holonomes à l'aide de certaines équations déduites sur la base des principes de Lagrange et Hölder peut donner une solution qui n'épuise pas entièrement le problème.

Sans troubler la généralité du raisonnement, nous l'effectuerons sur le même exemple, en envisageant le mouvement (q_1, q_2) sans action des forces extérieures et prenant la liaison (3) pour idéale (parfaite).

Ecrivons les équations du mouvement d'un point avec des multiplicateurs indéterminés (équations de Routh-Ferrers) [4], [5], l'incontestabilité desquelles est prise pour sûre. Avec cela supposons la liaison parfaite.

L'énergie cinétique du point sera (la masse est égale à l'unité):

$$(7) \quad T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

nous multiplions la relation (5) par le multiplicateur indéterminé (l'unique en ce cas) et l'ajoutons à l'équation dynamique générale exprimée sous la forme:

$$(8) \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) \delta q_2 = 0.$$

En se servant des raisonnements habituels, on reçoit les équations du mouvement:

$$(9) \quad \ddot{q}_1 + \lambda_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 = 0.$$

De la seconde équation et de l'équation de liaison nous avons:

$$(10) \quad q_2 = C_1 t + C_2; \quad \dot{q}_1 = \beta C_1 t + \beta C_2; \quad q_1 = \beta C_1 \frac{t^2}{2} + \beta C_2 t + C_3.$$

La trajectoire est une parabole; les réactions des liaisons $R_2 = 0$ et $R_1 = -\lambda_1 = +\ddot{q}_1 = \beta C_1$, à qui est conforme l'idéalité des liaisons, car la relation

$$(11) \quad R_1 \delta q_1 + R_2 \delta q_2 = 0$$

s'effectue en ce cas identiquement.

Ecrivons maintenant les équations habituelles du mouvement d'un point en partant de la deuxième loi de la dynamique

$$(12) \quad \ddot{q}_1 = R_1, \quad \ddot{q}_2 = R_2.$$

Avec l'équation de liaison nous avons en tout trois équations avec quatre inconnues q_1, q_2, R_1, R_2 ; les liaisons étant rhéonomes et par irréversibilité du principe de Hölder, nous ne pouvons obtenir de la relation (11) aucune relation dans les déplacements réels; le problème est indéterminé, c'est-à-dire il a une innombrable quantité de solutions, outre (10).

Des raisonnements analogues peuvent se faire aussi pour les systèmes avec un grand nombre de coordonnées généralisées et avec un plus grand nombre d'équations de liaison.

§ 2.

Considérons l'application du principe Hölder aux systèmes mécaniques avec des liaisons non-linéaires non-holonomes de premier ordre, c'est-à-dire avec des liaisons telles que :

$$(13) \quad F_j(q_i, \dot{q}_i, t) = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (j = 1, 2, \dots, l).$$

En premier lieu il faut noter ici que pour pouvoir appliquer le principe de d'Alembert-Lagrange à la déduction des équations du mouvement, il faut préalablement obtenir (de 13) les relations linéaires par rapport aux variations des coordonnées, c'est-à-dire par rapport à δq_1 .

En se servant en ce cas du principe Hölder dans sa forme directe, on aura deux possibilités : ou bien il sera impossible d'obtenir une relation quelconque entre les variations, comme, par exemple, dans le cas d'une liaison pareille

$$(14) \quad \sin \dot{q}_1 + e^{\dot{q}_2} = 0$$

ou bien l'on obtient une relation non-linéaire par rapport aux variations et, dans le cas des liaisons rhéonomes, les remarques du paragraphe précédent gardent leur validité.

Ainsi, par exemple, à l'équation de liaison

$$(15) \quad \sin \dot{q}_1 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 = 0$$

transcrite en différentielles $d^{t^2} \sin \dot{q}_1 + d\dot{q}_2^2 - d\dot{q}_3^2 + d\dot{q}_4^2 = 0$ correspondra une relation pareille par rapport aux variations ($\delta t = 0$)

$$(16) \quad \delta \dot{q}_2^2 - \delta \dot{q}_3^2 + \delta \dot{q}_4^2 = 0.$$

Mais alors le principe de d'Alembert-Lagrange ne sera non plus appliqué à la déduction de l'équation du mouvement.

Pour éviter cette difficulté, certains auteurs proposent plusieurs procédés spéciaux.

N. G. Četajeff a proposé dans son travail [6] les relations suivantes par rapport aux variations en cas d'existence des liaisons non-linéaires (13):

$$(17) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l).$$

Pour une certaine base peut être pris ici le fait qu'en cas des liaisons linéaires (1) les relations (2) sont formellement obtenues sur la base de (17).

Les relations (17) ont été proposées aussi par le mécanicien norvégien Johnsen [7], indépendamment de N. G. Četajeff, comme il paraît.

Alors d'après Četajeff et Johnsen de l'équation de liaison (14) suivra la relation

$$(18) \quad \cos \dot{q}_1 \delta q_1 + e^{\dot{q}_2} \delta q_2 = 0$$

et d'après l'équation de liaison (15) on pourra écrire :

$$(19) \quad \cos \dot{q}_1 \delta q_1 + 2\dot{q}_2 \delta q_2 - 2\dot{q}_3 \delta q_3 + 2\dot{q}_4 \delta q_4 = 0.$$

Le mécanicien roumain Victor Vălcovici dans sa notice [8] propose d'appliquer toutes les propositions de la dynamique analytique, y compris les principes des variations, par conséquent aussi le principe de d'Alembert-Lagrange, seulement aux liaisons non-linéaires qu'on peut transcrire sous la forme :

$$(20) \quad \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_{ij} d\bar{r}_i + \beta_j dt = 0$$

où les vecteurs $\bar{\alpha}_{ij}$ et les scalaires β_j sont des fonctions de $t, \bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, \ddot{\bar{r}}_i$, c'est-à-dire même aux liaisons non-holonomes de second ordre.

Alors d'après Vălcovici le principe de d'Alembert ne peut pas être appliqué à la liaison (14), tandis que de l'équation de liaison (15), si elle est transcrite sous la forme (20) c'est-à-dire sous la forme

$$(21) \quad dt \sin \dot{q}_1 + \dot{q}_2 dq_2 - \dot{q}_3 dq_3 + \dot{q}_4 dq_4 = 0,$$

$$\text{où} \quad \bar{\alpha}_{12} = (0, \dot{q}_2, 0, 0), \quad \bar{\alpha}_{13} = (0, 0, -\dot{q}_3, 0)$$

$$\alpha_{14} = (0, 0, 0, \dot{q}_4), \quad \beta_1 = \sin \dot{q}_1$$

suivra la relation

$$(22) \quad \dot{q}_2 \delta q_2 - \dot{q}_3 \delta q_3 + \dot{q}_4 \delta q_4 = 0$$

(étant forcément appliqué encore le principe de Hölder).

Pour reconnaître le degré d'applicabilité de telle ou autre méthode de linéarisation des équations des liaisons non linéaires non holonomes de premier ordre pour l'application du principe d'Alembert-Lagrange à la déduction des équations du mouvement du système avec des liaisons pareilles, il est nécessaire d'analyser un certain nombre d'exemples concrets, en employant les théorèmes de la dynamique, résultant immédiatement des lois de Newton.

Il y a des difficultés encore plus grandes dans le domaine des systèmes mécaniques avec des liaisons de second ordre, et ici nous ne les effleurons pas.

Reçu le 19. 11. 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Appell P. Traité de mécanique rationnelle. T. 2, 1931, pp. 382, 383, quatrième édition.
2. Tzenoff J. Math. Annalen. Bd. 91, 1924.
3. Hölder O. Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis. Göttingen Nachrichten, 1896 u. 1909.
4. Routh. Advanced rigid dynamics. P. 132.
5. Ferrers. Quart. Journ. Math. T. 12, 1871, p. 1.
6. Четаев Н. Г. О принципе Гаусса. Известия физ.-матем. об-ва при Казанском Университете, 1937.
7. Johnson L. Sur la réduction au nombre minimum des équations du mouvement d'un système non-holonyme. Avhandlingar utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo. I. Mat.-naturv. klasse, N 11, 1937, p. 5.

8. Valcovici V. Une extension des liaisons non holonomes. C. R., t. 243, № 15, p. 1013.
9. Vranceanu G. Les espaces non holonomes et leurs applications mécaniques. Mém. Sci. math. 76, 1936; p. 60—64.
10. Wunderheiler A. Rheonome Geometrie. Absolute Mechanik. Prac. mat.-fiz., Warszawa 40, 1932, p. 97—142.
11. Добронравов В. В. Аналитическая динамика в неголономных координатах. Ученые записки Моск. Гос. Университета, выпуск 122, том II, Механика, 1948, Москва, стр. 77—182, в частности, стр. 96 (V. V. Dobronravoff. Mécanique analytique non-holonomie. Travaux scientifiques de l'Université de Moscou, t. II c. 122, Mécanique, 1948; pp. 77—182.

ПРИНЦИПИТЕ НА ДАЛАМБЕР—ЛАГРАНЖ И ХЪОЛДЕР В МЕХАНИКАТА НА НЕХОЛОНОМНИТЕ СИСТЕМИ

В. В. Добронравов (Москва)

РЕЗЮМЕ

Като се прилагат принципите на Даламбер—Лагранж и този на Хьолдер за извеждане уравненията на движението на механични системи с линейни неголономни и реономни връзки, могат да се забележат някои особености. В частност някои типове уравнения на движението, тези например, които имат неопределени множители, могат да не доведат до всички възможни решения.

За извеждането на уравненията на движението на механични системи с нелинейни неголономни връзки принципът на Даламбер—Лагранж, общо казано, не е приложим.

Понастоящем съществуват два метода за линеаризиране уравненията на връзките относно вариациите на координатите на системите: на Ча-таев—Йонзен и на Вълкович.

ПРИНЦИПЫ ДАЛАМБЕРА—ЛАГРАНЖА И ГЁЛЬДЕРА, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В МЕХАНИКЕ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

В. В. Добронравов (Москва)

РЕЗЮМЕ

Применяя принципы Даламбера—Лагранжа и Гёльдера при выведении уравнения движения механических систем с линейными неголономными и реономными связями, можно заметить некоторые особенности. В частности, некоторые типы уравнений движения, те, например, которые имеют

неопределенные множители, могут быть не доведены до всех возможных для них решений.

Для выведения уравнения движения относительно механических систем с нелинейными неголономными связями принцип Даламбера—Лагранжа не приложим.

В настоящее время существуют два метода линеаризации уравнения связей относительно вариаций координат в системах: методы Четаева—Ионзена и Вылковича.