ВЪРХУ НЯКОИ ТЕОРЕМИ ЗА НУЛИТЕ НА РЕАЛНИТЕ ПОЛИНОМИ

Н. Обрешков

Класичната теорема на Хермит — Пулен за корените на алгебричните уравнения е следната.

Нека

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

е уравнение с реални коефициенти и

$$\varphi(x) = b_0 x^m \quad b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m = 0 \tag{2}$$

е уравнение, имащо само реални корени. Тогава уравнението

$$\varphi(D) f(x) = b_0 f^{(m)}(x) + b_1 f^{(m-1)}(x) + \cdots + b_m f(x) = 0 \tag{3}$$

има поне толкова реални корени, колкото уравнението (1).

Ако уравнението (1) има само реални корени, то и уравнението (3) ще има следователно само реални корени. В този случай всеки многократен корен на (3) е и такъв на уравнението (1).

Тази теорема има значителни приложения. В настоящата работа установявам следната по-обща теорема:

1. Нека уравнението (1) да има само реални корени и аргументите φ на имагинерните корени на уравнението с реални коефициенти (2) да удовлетворяват неравенството

$$|\sin\varphi| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

Тогава уравнението (3) има само реални корени и ако в (4) фигурира знакът неравенство, то всеки многократен корен на (3) е и такъв на (1).

Доказателството съдържа чувствителна трудност в установяване неотрицателността на алгебрична форма от шеста степен. Като приложение получавам например следното прецизиране на известните теореми на Шур и Мало.

2. Нека уравнението

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0, \; a_n \neq 0 \tag{5}$$

да има само реални корени и аргументите на имагинерните корени на уравнението с реални коефициенти

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n=0 \tag{6}$$

да удовлетворяват неравенството

$$|\sin\varphi|\leqq\frac{1}{\sqrt{m}},$$

като коефициентите на $g(x)$ са или всичките с еднакъв знак, или с алтерниращи знаци. Тогава уравнението

$$a_0b_0+1!\,a_1b_1x+2!\,a_2b_2x^2+\cdots+k!\,a_kb_kx^k=0,$$

където $k=\min(n,m)$, има само реални корени.

3. Нека аргументите на имагинерните корени на уравнението с реални коефициенти (5) да удовлетворяват неравенството

$$|\sin\varphi|\leqq\frac{1}{\sqrt{m}} \tag{7}$$

и нека корените на уравнението (6), на което коефициентите са реални с еднакви или алтерниращи знаци, да имат аргументи, удовлетворяващи неравенството (7). Тогава уравнението

$$a_0b_0+a_1b_1x+a_2b_2x^2+\cdots+a_kb_kx^k=0,$$

където $k=\min(n,m)$, има само реални корени

По-нататък доказвам някои нови свойства на нулите на ортогонални полиноми.

Нека

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ldots,\ P_n(x) \tag{8}$$

са полиноми, определени с равенствата

$$\alpha_\nu P_\nu(x)=(\beta_\nu x+\gamma_\nu)P_{\nu-1}(x)-\delta_\nu P_{\nu-2}(x),\quad \nu\geqq 2,$$

като $P_0(x)=1$ и $P_1(x)=\beta_1x+\gamma_1$. Числата α_ν, β_ν, γ_ν, δ_ν са реални, като освен това α_ν, β_ν, δ_ν са положителни. Известно е, че нулите на полиномите $P_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ldots,n$ са реални и прости и нулите на $P_{\nu-1}(x)$ отделят тези на $P_\nu(x)$. Да образуваме полиномите

$$Q_0(x),\ Q_1(x),\ Q_2(x),\ldots,\ Q_n(x), \tag{9}$$

дефинирани с

$$\delta_{n-k}Q_{k+1}(x)=(\beta_{n-k}x+\gamma_{n-k})Q_k(x)-\alpha_{n-k}Q_{k-1}(x),\quad k=1,2,\ldots,n-1,$$

като $Q_0(x)=1$ и $Q_1(x)=\frac{1}{\delta_n}(\beta_nx+\gamma_n)$. Доказвам, че последният полином $Q_n(x)$ съвпада до постоянен множител с полинома $P_n(x)$. Очевидно полиномите (9) образуват Щурмова редица, както полиномът (8). За тези полиноми установявам теоремата:

Във всеки интервал между две последователни нули на полинома $P_n(x)$ има или една нула на $P_{n-k}(x)$, или една нула на $Q_{k-1}(x)$, или една от граничните точки на този интервал е нула на тези два полинома.

Подобни теореми получавам и за производните на класичните полиноми на Якоби, Лагер и Хермит. За полиномите на Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \alpha, \beta > -1$ дефинирам редица от полиноми

$$R_0(x),\ R_1(x),\ R_2(x), \ldots,\ R_n(x),$$

определени с релациите

$$R_k(x) = [(b+2k-2)\,x-a]\,R_{k-1}(x) - \lambda_n^{(k-1)}(1-x^2)\,R_{k-2}(x),\quad 2 \leqq k \leqq n,$$

$$a = \beta-\alpha,\ b = \alpha+\beta+2,\ \lambda_n^{(m)} = n(n+\alpha+\beta+1) - m(b+m-1),$$

като $R_0(x) = 1$ и $R_1(x) = bx-a$. Последният полином до постоянен множител съвпада с полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Доказвам следната теорема:

5. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нулите на полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, наредени по растящи стойности. Всеки интервал (x_p, x_{p+1}) съдържа или само една нула на полинома $\frac{d^k}{dx^k}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, или една нула на полинома $R_{k-1}(x)$, или една от границите на този интервал е нула на $R_{k-1}(x)$ и на $\frac{d^k}{dx^k}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Напълно подобна теорема установявам за нулите на производните на полиномите на Лагер и полиномите на Хермит.

1. Едно обобщение на теоремата на Хермит — Пулен

Ще установим следното обобщение на класичната теорема на Хермит — Пулен:

1. Нека уравнението

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

от n-та степен има само реални корени и нека реалният полином $g(x)$ има само нули, аргументите на които удовлетворяват неравенството

$$|\sin\varphi| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

Тогава уравнението

$$g(D)f(x) = 0 \tag{3}$$

има само реални корени. Ако в (2) имаме знак на неравенство, то всеки многократен корен на (3) е и многократен корен на (1).

Доказателството се основава на следното ново предложение:

2. Нека уравнението (1) има само реални корени и φ е произволен ъгъл, удовлетворяващ условието (2). Нека ρ^2 е произволно положително число. Тогава уравнението

$$f(x) - 2\rho\cos\varphi f'(x) + \rho^2 f''(x) = 0 \tag{4}$$

има само реални корени. Ако при това в (2) имаме само знак на неравенство, то всеки многократен корен на (4) е и такъв на (1).

Да разгледаме отначало случая, когато (1) няма многократни корени. Можем очевидно да се ограничим на φ неотрицателно При $\varphi = 0$ съгласно теоремата на Хермит — Пулен уравнението (4) ще има само реални корени, като всичките са прости. Понеже корените на (4) са непрекъснати функции на φ, то при достатъчно малки φ уравнението (4) ще има също само реални и прости корени. При растенето на φ никой реален корен на (4) не може да стане имагинерен, освен ако поне два корена станат равни помежду си. Нека тогава φ_0 е най-малката стойност на φ, за която уравнението (4) има многократни корени (поне един). Ще установим, че

$$\cos^2\varphi_0 < \frac{n-1}{n} \tag{5}$$

Да въведем за простота означението $\alpha = -\rho\cos\varphi$ и да означим с λ един от възможните многократни корени на (4) за $\varphi = \varphi_0$. От развитието

$$f(x) = c_0 + c_1(x-\lambda) + c_2(x-\lambda)^2 + \cdots + c_n(x-\lambda)^n$$

имаме

$$F(x) = f(x) + 2\alpha f'(x) + \rho^2 f''(x) = D_0 + D_1(x-\lambda) + D_2(x-\lambda)^2 + \cdots,$$

където

$$D_0 = c_0 + 2\alpha c_1 + 2\rho^2 c_2,$$

$$D_1 = c_1 + 4\alpha c_2 + 6\rho^2 c_3.$$

За да бъде λ многократен корен на (4), трябва да имаме

$$\begin{aligned} c_0 + 2\alpha c_1 + 2\rho^2 c_2 &= 0, \\ c_1 + 4\alpha c_2 + 6\rho^2 c_3 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Нека $c_0 = 0$. Тогава $c_1 \neq 0$, защото в противен случай уравнението (1) би имало многократни корени. При $n = 2$ уравненията (6) стават

$$\alpha c_1 + \rho^2 c_2 = 0, \quad c_1 + 4\alpha c_2 = 0,$$

откъдето получаваме, че $4\alpha^2 = \rho^2$, т. е. $\cos^2\varphi_0 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. При $n \geqq 3$ решаваме уравненията (6) спрямо α и ρ^2 и за отношението α^2/ρ^2 получаваме

$$\frac{\alpha^2}{\rho^2} = \cos^2\varphi_0 = \frac{c_2^2}{2(2c_2^2 - 3c_1c_3)}. \tag{7}$$

Ще докажем, че

$$\frac{c_2^2}{2(2c_2^2 - 3c_1c_3)} < 1 - \frac{1}{n} \tag{8}$$

Уравнението

$$c_1+\binom{n-1}{1}\frac{c_2}{\binom{n-1}{1}}x+\binom{n-1}{2}\frac{c_3}{\binom{n-1}{2}}x^2+\cdots=0$$

има само реални корени. Съгласно едно неравенство на Ойлер ще имаме

$$\left(\frac{c_2}{n-1}\right)^2\geqq\frac{c_1c_3}{\binom{n-1}{2}}$$

или

$$c_2^2\geqq 2\,\frac{n-1}{n-2}\,c_1\,c_3. \tag{9}$$

От това неравенство следва, че $c_2^2>\frac{3}{2}c_1c_3$ и следователно делението в (7) е възможно. Освен това неравенството (8) се свежда на

$$c_2^2>2\,\frac{3n-6}{3n-4}\,c_1\,c_3. \tag{10}$$

Ако $c_1c_3<0$, това неравенство е очевидно. Ако $c_1c_3>0$, понеже при $n>2$ имаме

$$\frac{n-1}{n-2}>\frac{3n-6}{3n-4},$$

то неравенството (9) следва непосредствено от (10). Остава да се изследва по-трудният случай, когато $c_0\neq0$. Като решим уравненията (6) спрямо α и ρ^2, получаваме за частното

$$\frac{\alpha^2}{\rho^2}=\cos^2\varphi_0=\frac{(3c_0c_3-c_1c_2)^2}{2(c_1^2-2c_0c_2)(2c_2^2-3c_1c_3)}. \tag{11}$$

Елементарното неравенство $c_1^2-2c_0c_2>0$ е добре известно. Числото $2c_2^2-3c_1c_3$ е също така положително. При $n=2$ е очевидно. При $n\geqq3$ предният факт следва непосредствено от неравенството на Ойлер:

$$2c_2^2\geqq3\,\frac{n-1}{n-2}\,c_1\,c_3,$$

получено от уравнението

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots=0.$$

Ще установим общото неравенство

$$\frac{(3c_0c_3-c_1c_2)^2}{2(c_1^2-2c_0c_2)(2c_2^2-3c_1c_3)}\leqq1-\frac{1}{n} \tag{12}$$

При $n=2\,(c_3=0)$ това неравенство става

$$\frac{c_1^2}{2(c_1^2-2c_0c_2)}\leqq1$$

и е еквивалентно на просто неравенство $c_1^2 \geqq 4\, c_0 c_2$. Можем следователно да приемем, че $n \geqq 3$. Съгласно условието имаме

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = c_0 (1 + x_1 x)(1 + x_2 x) \cdots (1 + x_n x),$$

където $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са реални числа. Оттук имаме

$$\frac{c_1}{c_0} = \Sigma x_1, \ \frac{c_2}{c_0} = \Sigma x_1 x_2, \ \frac{c_3}{c_0} = \Sigma x_1 x_2 x_3, \ldots$$

На основание на предните равенства получаваме

$$\frac{1}{c_0^2} (c_1^2 - 2\, c_0 c_2) = \Sigma x_1^2,$$

$$\frac{1}{c_0^2} (c_1 c_2 - 3\, c_0 c_3) = \Sigma x_1^2 x_2,$$

$$\frac{1}{c_0^2} (2\, c_2^2 - 3\, c_1 c_3) = 2\ (\Sigma x_1^2 x_2^2 + 2\, \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 6\, \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4)$$

$$- 3\, (\Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 4\, \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4) = 2\, \Sigma x_1^2 x_2^2 + \Sigma x_1^2 x_2 x_3.$$

Следователно неравенството (12) приема формата

$$\frac{(\Sigma x_1^2 x_2)^2}{2\, \Sigma x_1^2 (2\, \Sigma x_1^2 x_2^2 + \Sigma x_1^2 x_2 x_3)} \leqq 1 - \frac{1}{n}$$

или

$$U = 2\, (n-1)\, \Sigma x_1^2 (2\, \Sigma x_1^2 x_2^2 + \Sigma x_1^2 x_2 x_3) - n\, (\Sigma x_1^2 x_2)^2 \geqq 0.$$

Предното неравенство следва от следното интересно тъждество: Имаме

$$13) \qquad U = \sum_{i<j}^{1\ldots n} L_{ij} (x_i - x_j)^2,$$

където

$$L_{ij} = \Big(\sum_{s=1}^{n} x_s^2 - x_i^2 - x_j^2\Big) \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + n x_i^2 x_j^2.$$

Действително за формата $(\sum x_1^2 x_2)^2$ получаваме

$$(\sum x_1^2 x_2)^2 = \sum x_1^4 x_2^2 + 2 \sum x_1^3 x_2^3 + 2 \sum x_1^3 x_2^2 x_3$$

$$+ 4 \sum x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 + 6 \sum x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2 \sum x_1^4 x_2 x_3.$$

Да означим за късота с T израза $\sum\limits_{s=1}^{n} x_s^2$. Да намерим сега всичките членове в U, които съдържат произведението $x_1 x_2$, като множителите му са от четна степен спрямо променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Очевидно ще трябва да се ограничим на частта

$$2(n-1)\sum x_1^2\sum x_1^2 x_2 x_3 - n(\sum x_1^2 x_2)^2$$

от формата U. Лесно се вижда тогава, че търсеният множител на $x_1 x_2$ в U ще бъде

$$2(n-1)\,T\,(T-x_1^2-x_2^2)-n\,[2x_1^2 x_2^2+2\,(x_1^2+x_2^2)\sum_{i=3}^{n} x_i^2]$$

$$-4n\sum_{i<j}^{3\ldots n} x_i^2 x_j^2-2n\sum_{i=3}^{n} x_i^4=2n\,(T-x_1^2-x_2^2)^2-2\,T\,(T-x_1^2-x_2^2)$$

$$-4n\sum_{i<j}^{3\ldots n} x_i^2 x_j^2-2n\sum_{i=3}^{n} x_i^4-2n\,x_1^2 x_2^2=-\,2T\,(T-x_1^2-x_2^2)-2n\,x_1^2 x_2^2.$$

Следователно ако L_{12} означава коефициента на $-2x_1 x_2$, то ще имаме

$$L_{12}=T\,(T-x_1^2-x_2^2)+nx_1^2 x_2^2.$$

Ако тогава означим с L_{ij}, $i\neq j$, израза

$$L_{ij}=T\,(T-x_i^2-x_j^2)+nx_i^2 x_j^2,$$

то от горното следва, че ще имаме тъждеството

$$-2\sum_{i<j}^{1\ldots n} L_{ij}\,x_i\,x_j=2\,(n-1)\sum x_1^2\sum x_1^2 x_2 x_3$$

$$-\,n\,(2\sum x_1^3 x_2^3+2\sum x_1^3 x_2^2 x_3+4\sum x_1^2 x_2^2 x_3\,x_4+2\sum x_1^4 x_2\,x_3).$$

Тъждеството (13) ще бъде установено, ако докажем следното тъждество:

(14) $$4\,(n-1)\sum x_1^2\sum x_1^2 x_2^2-n\,(\sum x_1^3 x_2^2+6\sum x_1^2 x_2^2 x_3^2)$$

$$=\sum_{i<j}^{1\ldots n} L_{ij}(x_i^2+x_j^2).$$

Като вземем пред вид, че

$$\sum x_1^2\sum x_1^2 x_2^2=\sum x_1^4 x_2^2+3\sum x_1^2 x_2^2 x_3^2,$$

равенството (14) приема формата

(15) $$(3n-4)\sum x_1^4 x_2^2+6\,(n-2)\sum x_1^2 x_2^2 x_3^2=\sum_{i<j}^{1\ldots n} L_{ij}(x_i^2+x_j^2).$$

Да разгледаме члена $L_{12}\,(x_1^2+x_2^2)$ в дясната част на (15). Този член е равен на

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(x_3^2+\cdots+x_n^2)\,(x_1^2+x_2^2)+nx_1^2 x_2^2(x_1^2+x_2^2)$$

$$-\,(x_1^2+x_2^2)^2(x_3^2+\cdots+x_n^2)+(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+\cdots+x_n^2)^2+$$

$$+\,nx_1^2 x_2^2(x_1^2+x_2^2)=A+B,$$

където

$$A=2x_1^2x_2^2(x_3^2+\cdots+x_n^2)+2(x_1^2+x_2^2)\sum_{i<j}^{3\ldots n}x_i^2x_j^2,$$

$$B=(x_1^4+x_2^4)(x_3^2+\cdots+x_n^2)+(x_1^2+x_2^2)(x_3^4+\cdots+x_n^4)+n(x_1^4x_2^2+x_2^4x_1^2).$$

Очевидно сумата от всичките подобни на A изрази в дясната част на (15) ще е равна на симетричната функция $S=\sum x_1^2x_2^2x_3^2$, умножена с някое цяло положително число K. Но във всеки израз A имаме на брой

$$2(n-2)+4\frac{(n-2)(n-3)}{2}=2(n-2)^2$$

члена от симетричната функция S. Понеже броят на изразите A е равен на $\frac{n(n-1)}{2}$, то числото K ще бъде равно на

$$K=\frac{2(n-2)^2\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}=6(n-2).$$

Подобно във всеки израз B от формата (15) има на брой

$$2n-4+2n-4+2n=6n-8$$

члена от симетричната функция $S_1=\sum x_1^4x_2^2$. Но броят на членовете на тази симетрична функция е равен на $n(n-1)$ и вдясно на (15) имаме на брой $\binom{n}{2}$ члена от формата B. Следователно сумата от членовете от формата B вдясно на (15) ще е равна на LU, където числото L се определя

$$L=\frac{(6n-8)\binom{n}{2}}{n(n-1)},$$

т. е. е равно на $3n-4$. Така последното тъждество (15) е установено, с което е установено и тъждеството (13).

От (13) следва, че каквито и да са реалните числа $x_1, x_2,\ldots,x_n$, ще имаме винаги

$$U\geqq 0$$

и знак на равенство ще имаме само тогава, когато всичките числа: x_i, $1\leqq i\leqq n$, са равни по между си.

С това е установено, че винаги ще имаме неравенството $U>0$ освен в изключителния случай, когато $x_1=x_2=\cdots=x_n$. При този изключителен случай полиномът (1) приема формата

$$c(x-x_1)^n \tag{16}$$

и полиномът (4) става

$$(17) \qquad c(x-x_1)^{n-2}[(x-x_1)^2-2\rho n\cos\varphi(x-x_1)+n(n-1)\rho^2].$$

Нулите на последния полином са x_1 ($(n-2)$-кратна нула) и числата

$$n\rho\left(\cos\varphi\pm\sqrt{\cos^2\varphi-\frac{n-1}{n}}\right).$$

При $\cos^2\varphi\geqq\frac{n-1}{n}$ всичките нули на полинома (17) са реални.

Нека временно изключим от разглеждането полинома (16), т. е. предполагаме, че полиномът (1) няма формата (16). От полинома (1) получаваме нов полином, който има само реални и прости нули по следния начин: Нека $y_1, y_2, \ldots, y_k$ са многократните нули на (1), като съответно кратността им е $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Тогава всяка такава нула y_s, $1\leqq s\leqq k$ заместваме с числата y_s, $y_s(1+\varepsilon)$, $y_s(1+2\varepsilon), \ldots, y_s(1+\overline{m_s-1}\,\varepsilon)$, където $\varepsilon>0$ е така малко избрано, че числото $y_s(1+m_s\varepsilon)$ да е по-малко от съседната дясна нула на (1). Да означим с $f(x,\varepsilon)$ получения така полином. Съгласно горното ще има число φ_0', за което $\cos^2\varphi_0'<\frac{n-1}{n}$, така че за $0\leqq\varphi\leqq\varphi_0'$ уравнението (4) за $f(x,\varepsilon)$ ще има само реални корени. Понеже полиномът $f(x,\varepsilon)$ клони към $f(x)$, то полиномът $F(x,\varepsilon)$ клони към $F(x)$ при $\varepsilon\to 0$ и нулите на полинома $F(x)$ ще са всичките реални за $0\leqq\varphi\leqq\varphi_0$, където φ_0 се определя с равенството

$$\cos^2\varphi_0=1-\frac{1}{n}.$$

От самия начин на доказване се вижда, че всеки многократен корен на уравнението (4) е и такъв на уравнението (1), ако $|\sin\varphi|<\frac{1}{\sqrt{n}}$. Твърдението за реалността на нулите е очевидно вярно и за полинома (16), който временно изключихме от разглеждане, то така привършваме доказателството на предложението.

Също така от извеждането се вижда, че неравенството (2) не може да се разшири. Това впрочем следва и от разглеждане на специалния полином (16).

Теоремата 1 следва от предложението 2 с многократното му прилагане. Нека

$$z_\nu=\rho_\nu(\cos\varphi_\nu+i\sin\varphi_\nu),\ \bar{z}_\nu,\ \nu=1,\ 2,\ldots,\ p,$$

са нереалните нули на полинома $g(x)$. За аргументите им предполагаме, че $|\sin\varphi_\nu|<\frac{1}{\sqrt{n}}$. Полиномът $g(x)$ ще има формата

$$g(x)=g_1(x)(x-z_1)(x-\bar{z}_1)\cdots(x-z_p)(x-\bar{z}_p),$$

където $g_1(x)=b_0(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_k)$ и $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ са реалните нули на $g(x)$ от същата кратност. По теоремата на Хермит—Пулен нулите на полинома $g_1(D)f(x)=h(x)$ са всичките реални и всяка многократна нула на този полином е и такава на $f(x)$. Съгласно предложението нулите на полинома

$$h_1(x)=z_1\bar{z}_1 h(x)-(z_1+\bar{z}_1)h'(x)+h''(x)$$

ще бъдат всичките реални и всяка многократна нула този полином ще е такава и на $h(x)$ и следователно многократна нула и на $f(x)$. Подобно нулите на полинома

$$h_2(x)=z_2\bar{z}_2 h_1(x)-(z_2+\bar{z}_2)h_1'(x)+h_1''(x)$$

ще бъдат всичките реални и всяка многократна нула на този полином ще е такава нула и на полинома $h_1(x)$, т. е. на полинома $f(x)$. Като продължаваме така, ще достигнем очевидно до полинома (3) и доказателството на теоремата се привършва.

2. Някои следствия от теорема

Нека аргументите на имагинерните корени на полинома с реални коефициенти

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{1}$$

да удовлетворяват неравенството

$$|\sin\varphi|\leqq\frac{1}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

Очевидно аргументите на имагинерните нули на полинома

$$g(x)=x^nf\left(\frac{1}{x}\right)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$$

също ще удовлетворяват неравенството (2). По теорема 1 полиномът

$$g(D)x^n=n!a_0+n(n-1)\ldots2a_1x+n(n-1)\ldots3a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

ще има само реални нули. Така получаваме предложението:

3. *Ако за полинома с реални коефициенти (1) аргументите на имагинерните му нули удовлетворяват неравенството (2), то полиномът*

$$a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n!}x^n \tag{3}$$

има само реални нули.

Освен това единствен многократен корен на (3) може да бъде само нулата и следователно при $a_0\neq0$ полиномът (3) няма многократна нула.

По същия начин получаваме и предложението:

4. *Нека аргументите на имагинерните нули на реалния полином (1) удовлетворяват неравенството*

$$|\sin\varphi| \leqq \frac{1}{\sqrt{p}},$$

където p е едно естествено число. Тогава, ако $p \geqq n$, то полиномът

$$\frac{a_0}{(p-n)!}+\frac{a_1}{(p+1-n)!}x+\frac{a_2}{(p+2-n)!}x^2+\cdots+\frac{a_n}{p!}x^n$$

има само реални нули. Ако $p<n$, то полиномът

$$a_{n-p}+\frac{a_{n-p+1}}{1!}x+\frac{a_{n-p+2}}{2!}x^2+\cdots+\frac{a_n}{p!}x^p$$

има само реални нули.

На Шур се дължи следната теорема:

Ако нулите на полинома

(4) $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m,\ a_m\neq 0$$

са реални и нулите на полинома

(5) $$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n,\ b_n\neq 0$$

са реални и с еднакъв знак, то нулите на полинома

(6) $$a_0b_0+1!a_1b_1x+2!a_2b_2x^2+\cdots+k!a_kb_kx^k,$$

където $k=\min(m,n)$, са също така реални.

От тази теорема, както е известно, се получава следната теорема на Мало, установена по-рано от автора и с друг метод:

Ако нулите на полинома (4) са реални и нулите на полинома (5) са реални и с еднакъв знак, то нулите на полинома

(7) $$a_0b_0+a_1b_1x+a_2b_2x^2+\cdots+a_kb_kx^k,$$

където $k=\min(m,n)$, са също така реални.

Ние ще дадем на основание на теорема 1 нова по-обща форма на предните две теореми. Именно отначало ще установим следното обобщение на теоремата на Шур:

5. Нека полиномът (4), $a_m\neq 0$, има само реални нули и за аргументите на нулите на полинома (5), $b_n\neq 0$, на който коефициентите са реални числа, да имаме или $-\alpha\leqq\varphi\leqq\alpha$ за всичките му нули, или $\pi-\alpha\leqq\varphi\leqq\pi+\alpha$, като $\alpha>0$ е ъгъл, определен със $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{m}}$. Тогава полиномът (6) има само реални нули.

Можем да се ограничим на случая, когато $a_0b_0\neq 0$. Действително, ако $f(x)=x^pf_1(x)$ и $\varphi(x)=x^q\varphi_1(x)$, като полиномите $f_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ не се анулират за $x=0$, то разглеждаме отначало вместо полиномите $f(x)$ и $\varphi(x)$ полиномите $(x-\varepsilon)^pf_1(x)$ и $(x-\varepsilon)^q\varphi_1(x)$, където $\varepsilon>0$, и преминаваме към граница при $\varepsilon \to 0$. Реалността на нулите на композирания полином по теоремата на Хурвин при този граничен процес се запазва. Също така можем да приемем за аргументите φ условието $\pi-\alpha \leqq \varphi \leqq \pi+\alpha$. Тогава коефициентите на полинома (5) ще бъдат с еднакъв знак, който можем да приемем за положителен. При доказване на теоремата ще следваме начина на Шур. Разглеждаме отначало случая, когато $m \leqq n$, и нека $|\sin\varphi < \frac{1}{\sqrt{m}}$

Ако z е произволно реално число, да образуваме полинома

$$F(x) \quad b_0 f(x) + b_1 z f'(x) + \cdots + b_m z^m f^{(m)}(x), \tag{8}$$

който лесно се представя във вида

$$F(x) = P_0(z) + P_1(z) \frac{x}{1!} + P_2(z) \frac{x^2}{2!} + \cdots + P_m(z) \frac{x^m}{m!},$$

където

$$P_0(z) = a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 z + 2!\, a_2 b_2 z^2 + \cdots + m!\, a_m b_m z^m$$

и

$$P_\mu(z) = \mu!\, a_\mu b_0 + (\mu+1)!\, a_{\mu+1} b_1 z + \cdots + m!\, a_m b_{m-\mu} z^{m-\mu}$$

за $\mu = 1, 2, \ldots, m$. Понеже за аргументите на нулите на полинома

$$b_0 + b_1 z x + b_2 z^2 x^2 + \cdots + b_n z^n x^n,$$

очевидно ще имаме $\sin\varphi < \frac{1}{\sqrt{m}}$, каквото и да е реалното число z, то по теорема 1 полиномът (8) ще има само реални нули, каквото и да е реалното число z. Полиномите $P_0(z)$ и $P_1(z)$ не могат да имат обща нула, защото в противен случай $x = 0$ ще бъде многократна нула на (8) и следователно такава нула на полинома (4), което противоречи на приемането, че $a_0 \neq 0$. От друга страна, от елементарните следствия на теоремата на Декарт следва, че полиномите

$$P_0(z),\ P_1(z),\ P_2(z), \ldots, P_m(z) \tag{9}$$

образуват една редица на Щурм, т. е. последният полином $P_m(z)$ е константа, отлична от нула, никои два последователни полинома от редицата (9) не могат да се анулират за едно и също z и ако един междинен полином се анулира за някое z, то съседните му два полинома са с противни знаци. Но при $z = \infty$ в редицата (9) няма нито една вариация, а при $z = -\infty$ в нея има m вариации. Понеже броят на реалните нули на полинома съгласно обобщената теорема на Щурм е най-малко равен на броя на загубените вариации от редицата (9) при растенето на z от $-\infty$ до ∞, то следва, че полиномът $P_0(z)$ има само реални нули. Освен това отношението $\frac{P_0(z)}{P_1(z)}$ трябва при анулирането си да минава m пъти от отрицателно в положително. Така едновременно установихме, че всичките нули на полинома (6) в този случай са и прости.

Ако за аргументите φ на имагинерните корени на полинома имаме $|\sin\varphi| \leqq \frac{1}{\sqrt{m}}$, то вместо този полином разглеждаме подобен полином, за нулите на който имаме $|\sin\varphi| \leqq \frac{1}{\sqrt{m}} - \varepsilon$, като $\varepsilon > 0$ е произволно малко число. Съответният полином (6) ще има само реални нули и граничният полином при $\varepsilon \to 0$ ще има по теоремата на Хурвиц само реални нули.

Нека сега $m > n$. Нека $\eta > 0$ е произволно малко число и вместо полинома (5) да разгледаме полинома

$$(1 - \eta x)^{m-n} \varphi(x) = b_0(\eta) + b_1(\eta) x + \cdots + b_m(\eta) x^m. \tag{10}$$

Очевидно полиномът (10) при $\eta \to 0$ ще клони към полинома (5). Съгласно предния извод полиномът

$$a_0 b_0(\eta) + 1!\, a_1 b_1(\eta) + \cdots + n!\, a_n b_n(\eta) x^n + \cdots + m!\, a_m b_m(\eta) x^m \tag{11}$$

ще има само реални нули. Но непосредствено се вижда, че полиномът (11) клони към полинома

$$a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 x + 2!\, a_2 b_2 x^2 + \cdots + n!\, a_n b_n x^n, \tag{12}$$

когато $\eta \to 0$. Следователно полиномът (12) ще има само реални нули.

Теоремата на Мало се прецизира в следната форма:

6. *Нека за аргументите на нулите на полинома с реални коефициенти* (4) *имаме*

$$|\sin\varphi| \leqq \frac{1}{\sqrt{m}} \tag{13}$$

и нека нулите на полинома (5), *на който коефициентите са реални с еднакви или алтерниращи знаци, да имат аргументи* φ, *удовлетворяващи неравенството* (13). *Тогава полиномът* (7), *като* $k = \min(n, m)$, *има само реални нули.*

Действително по предложение 2 полиномът

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a_m}{m!} x^m \tag{14}$$

има само реални нули. Прилагаме тогава прецизираната теорема на Шур за полиномите (5) и (14).

3. Някои свойства на нулите на ортогоналните полиноми

Нека $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ са полиноми, определени с равенствата

$$\alpha_\nu P_\nu(x) = (\beta_\nu x + \gamma_\nu) P_{\nu-1}(x) - \delta_\nu P_{\nu-2}(x), \nu \geqq 2, \tag{1}$$

като $P_0(x) = 1$ и $P_1(x) = \beta_1 x + \gamma_1$. Тук числата α_ν, β_ν, γ_ν, δ_ν са реални, като освен това α_ν, β_ν, δ_ν са положителни. Известно е, че полиномите $P_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, имат само реални и прости нули, като нулите на $P_{\nu-1}(x)$

отделят нулите на $P_\nu(x)$. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нулите на полинома $P_n(x)$, наредени по растящи стойности. От равенството

$$\alpha_n P_n(x) = (\beta_n x + \gamma_n) P_{n-1}(x) - \delta_n P_{n-2}(x)$$

при $x = x_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$ получаваме

$$(\beta_n x_\mu + \gamma_n) P_{n-1}(x_\mu) - \delta_n P_{n-2}(x_\mu) = 0$$

или

$$P_{n-2}(x_\mu) = Q_1(x_\mu) P_{n-1}(x_\mu), \tag{2}$$

където $Q_1(x)$ означава полинома

$$Q_1(x) = \frac{1}{\delta_n} (\beta_n x + \gamma_n).$$

Подобно от равенството

$$\alpha_{n-1} P_{n-1}(x) = (\beta_{n-1} x + \gamma_{n-1}) P_{n-2}(x) - \delta_{n-1} P_{n-3}(x)$$

при $x = x_\mu$, като използуваме (2), получаваме

$$P_{n-3}(x_\mu) = Q_2(x_\mu) P_{n-1}(x_\mu),$$

където $Q_2(x)$ означава полинома

$$Q_2(x) = \frac{1}{\delta_{n-1}} [(\beta_{n-1} x + \gamma_{n-1}) Q_1(x) - \alpha_{n-1}].$$

Нека за едно k да имаме

$$P_{n-k}(x_\mu) = Q_{k-1}(x_\mu) P_{n-1}(x_\mu), \quad P_{n-k-1}(x_\mu) = Q_k(x_\mu) P_{n-1}(x_\mu),$$

където $Q_{k-1}(x)$ и $Q_k(x)$ са полиноми от степени $k-1$ и k.

Тогава от равенството

$$\alpha_{n-k} P_{n-k}(x) = (\beta_{n-k} x + \gamma_{n-k}) P_{n-k-1}(x) - \delta_{n-k} P_{n-k-2}(x)$$

получаваме

$$P_{n-k-2}(x_\mu) = Q_{k+1}(x_\mu) P_{n-1}(x_\mu),$$

където $Q_{k+1}(x)$ е полином от степен $k+1$, определен с равенството

$$\delta_{n-k} Q_{k+1}(x) = (\beta_{n-k} x + \gamma_{n-k}) Q_k(x) - \alpha_{n-k} Q_{k-1}(x). \tag{3}$$

Така получаваме нови полиноми $Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_{n-1}(x)$, които удовлетворяват на рекурентната зависимост (3), като

$$P_{n-k}(x_\mu) = Q_{k-1}(x_\mu) P_{n-1}(x_\mu) \tag{4}$$

за $\mu = 1, 2, \ldots, n$ и $k = 1, 2, \ldots, n$. Да въведем още полинома от n-та степен, определен с

$$Q_n(x) = (\beta_1 x + \gamma_1) Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x). \tag{5}$$

Ако положим в (5) $x = x_\mu$ и умножим с $P_{n-1}(x_\mu)$, получаваме

$$Q_n(x_\mu) P_{n-1}(x_\mu) = (\beta_1 x_\mu + \gamma_1) Q_{n-1}(x_\mu) P_{n-1}(x_\mu) - Q_{n-2}(x_\mu) P_{n-1}(x_\mu). \tag{6}$$

Понеже по (4) $Q_{n-1}(x_\mu)P_{n-1}(x_\mu)=1$, $Q_{n-2}(x_\mu)P_{n-1}(x_\mu)=P_1(x_\mu)$, то следва от (6), че $Q_n(x_\mu)=0$ за $\mu=1,2,\ldots,n$. Следователно полиномът $Q_n(x)$ е равен на $c\,P_n(x)$, където c е константа, отлична от нула. Но очевидно от горното следва, че полиномите $Q_0(x), Q_1(x),\ldots,Q_{n-1}(x), Q_n(x)$ образуват Щурмова редица и нулите им са реални и прости, като нулите на всеки полином $Q_\nu(x)$, $1\leqq\nu\leqq n-1$ лежат между най-малката и най-голямата нула на $Q_n(x)$, т. е. на полинома $P_n(x)$. От (4) следва, че една нула x_μ на $P_n(x)$ може само тогава да бъде нула на някой полином $P_{n-k}(x)$, ако е такава на полинома $Q_{k-1}(x)$.

Ще изследваме сега разположението на нулите на $P_{n-k}(x)$ спрямо тези на $P_n(x)$. Имаме

$$\frac{P_{n-k}(x)}{P_n(x)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_\nu}{x-x_\nu}, \tag{7}$$

където числата A_ν се определят с равенствата

$$A_\nu=\frac{P_{n-k}(x_\nu)}{P'_n(x_\nu)}$$

или като използуваме (4), с

$$A_\nu=Q_{k-1}(x_\nu)\frac{P_{n-1}(x_\nu)}{P'_n(x_\nu)} \tag{8}$$

Да означим с I_γ затворения интервал $x_\mu\leqq x\leqq x_{\mu+1}$. Нека един такъв интервал не съдържа нула на $Q_{k-1}(x)$. Тогава числата $Q_{k-1}(x_\mu)$ и $Q_{k-1}(x_{\mu+1})$ са отлични от нула и са с еднакъв знак и числата $P_{n-1}(x_\mu)/P'_n(x_\mu)$ и $P_{n-1}(x_{\mu+1})/P'_n(x_{\mu+1})$ са също отлични от нула и са с еднакъв знак. От (8) следва тогава, че числата A_μ и $A_{\mu+1}$ са с еднакъв знак. При достатъчно малко $\varepsilon>0$ дясната част на (7) ще има за $x=x_\mu+\varepsilon$ и за $x=x_{\mu+1}-\varepsilon$ противни знаци и следователно $P_{n-k}(x)$ ще има нечетен брой нули вътре в I_μ. Може някои нули на $P_{n-k}(x)$ да съвпадат с нули на $P_n(x)$. Тогава такава нула е нула и на полинома $Q_{k-1}(x)$. Нека с S да означим броя на съвпадащите такива нули. Като си мислим нулите на $P_n(x)$, наредени по растящи стойности, нека s_1 последователни нули на $P_{n-k}(x)$ съвпадат с нули на $P_n(x)$, след тях s_2 последователни нули на $P_{n-k}(x)$ съвпадат с нули на $P_n(x)$ и т. н. до s_p последователни нули на $P_{n-k}(x)$, съвпадащи с нули на $P_n(x)$. Ще имаме $S=s_1+s_2+\cdots\ s_p$. Лесно се вижда, че остават така $m=n-1-(S+p)$ интервали I_μ, на които граничните точки не са нули на $P_{n-k}(x)$. Да означим с E съвкупността на тези интервали и с g броя на тези от тях, които не съдържат нула на полинома $Q_{k-1}(x)$. Съгласно горното $P_{n-k}(x)$ ще има $g+2M$ нули в тези интервали, като M е цяло неотрицателно число. Понеже $P_{n-k}(x)$ има S общи нули с $P_n(x)$, то броят на нулите на $P_{n-k}(x)$ ще бъде равен на $g+2M+S+M'$, като с M' сме означили евентуално съществуващи нули на $P_{n-k}(x)$ извън изброените преди. Ще имаме

$$n-k=g+2M+M'+S. \tag{9}$$

Но тогава броят g' на нулите на $Q_{k-1}(x)$ ще бъде

$$g' = m - g + S + m'' + m''',$$

където m'' и m''' са неотрицателни цели числа. Понеже полиномът $Q_{k-1}(x)$ е от степен $k-1$, то ще имаме

$$k-1 \quad m - g + S + m'' + m'''$$

и като вземем пред вид (9), получаваме

$$S - p + 2M + M' + m'' + m''' = 0,$$

откъдето следва, че $M = M' = m'' = m''' = 0$ и че всичките числа $s_1, s_2, \ldots, s_p$ са равни на единица. Следователно ако една нула x_a на $P_n(x)$ съвпада с нула на $P_{n-k}(x)$, то x_a е нула на $Q_{k-1}(x)$ и интервалите $x_{a-1} \leqq x < x_a$ и $x_a < x \leqq x_{a+1}$ не съдържат нито нула на $P_{n-k}(x)$, нито такава на $Q_{k-1}(x)$. Така установихме теоремата:

7. Във всеки интервал между две последователни нули на полинома $P_n(x)$ има или една (и само една) нула на $P_{n-k}(x)$, или една (и само една) нула на $Q_{k-1}(x)$, или една от граничните му точки е нула и на тези два полинома.

Очевидно най-малката и най-голямата нула на $P_n(x)$ не могат да бъдат нули на полинома $P_{n-k}(x)$, $1 \leqq k \leqq n-1$.

Ще установим сега подобни връзки между нулите на специални ортогонални полиноми и нулите на производните им. Полиномът на Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$(10) \qquad (1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

Предполагаме, че α и β са реални числа, по-големи от -1. В този случай нулите на полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ са реални, прости и са разположени между -1 и 1. Нека означим с $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нулите на $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, наредени по растящи стойности. За простота да въведем означенията

$$a = \beta - \alpha, \qquad b = \alpha + \beta + 2, \qquad \lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1),$$

като полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ще означаваме с $y(x)$. Тогава от (10) при $x = x_\mu$ получаваме

$$(10') \qquad (1-x_\mu^2)y''(x_\mu) = R_1(x_\mu)y'(x_\mu),$$

където $R_1(x)$ означава полинома

$$R_1(x) = bx - a.$$

Като диференцираме уравнението (10), в което $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, получаваме

$$(11) \qquad (1-x^2)y''' + [a - (b+2)x]y'' + (\lambda_n - b)y' = 0.$$

Оттук за $x = x_\mu$ и от (10') получаваме

$$(1-x_\mu^2)^2 y'''(x_\mu) = R_2(x_\mu)y'(x_\mu),$$

където $R_2(x)$ е полиномът

$$R_2(x) = [(b+2)x - a]\, Q_1(x) - (\lambda_n - b)(1 - x^2)\, Q_0(x), Q_0(x) = 1.$$

Изобщо, като диференцираме (10) m пъти, получаваме за $y(x)$ уравнението

$$(12) \qquad (1 - x^2)\, y^{(m+2)}(x) + [a - (b+2m)x]\, y^{(m+1)}(x) + \lambda_n^{(m)} y^{(m)}(x) = 0,$$

където

$$\lambda_n^{(m)} = \lambda_n - [b + (b+2) + (b+4) + \cdots + (b + 2m - 2)]$$

$$= \lambda_n - m(b + m - 1).$$

Нека поставим

$$(13) \qquad (1 - x_\mu^2)^k y^{(k+1)}(x_\mu) = \alpha_k^{(\mu)} y'(x_\mu).$$

Видяхме, че $\alpha_1^{(\mu)}$ и $\alpha_2^{(\mu)}$ са съответно $R_1(x_\mu)$ и $R_2(x_\mu)$. Ще установим, че $\alpha_k^{(\mu)} = R_k(x_\mu)$, където $R_k(x)$ е полином от степен k, определен с релацията

$$R_k(x) = [(b + 2k - 2)x - a]\, R_{k-1}(x) - \lambda_n^{(k-1)}(1 - x^2)\, R_{k-2}(x),$$

$$k = 2, 3, \ldots, n,$$

като очевидно $R_0(x) = 1$. Предполагаме, че равенството

$$(14) \qquad \alpha_k^{(\mu)} = R_k(x_\mu)$$

е доказано за $k = 1, 2, \ldots, m$. Тогава, като умножим (12) с $(1 - x^2)^m$, заместим x с x_μ, $(1 - x_\mu^2)^{m-1} y^{(m)}(x_\mu)$ с равното му $R_{m-1}(x_\mu)\, y'(x_\mu)$ и $(1 - x_\mu^2)^m y^{(m+1)}(x_\mu)$ с $R_m(x_\mu)\, y'(x_\mu)$, получаваме

$$(1 - x_\mu^2)^{m+1} y^{(m+2)}(x_\mu) = R_{m+1}(x_\mu)\, y'(x_\mu),$$

където $R_{m+1}(x)$ е полином от степен $m+1$, определен с

$$R_{m+1}(x) = [(b + 2m)x - a]\, R_m(x) - \lambda_n^{(m)}(1 - x^2)\, R_{m-1}(x).$$

При $k = n$ от (13), (14) имаме $R_n(x_\mu) = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, от което следва, че $R_n(x) = c y(x)$, където c е константа, отлична от нула. Така получихме редицата полиноми

$$(15) \qquad R_0(x),\ R_1(x),\ R_2(x), \ldots, R_n(x),$$

между които имаме релацията

$$R_{k+1}(x) = [(b + 2k)x - a]\, R_k(x) - \lambda_n^{(k)}(1 - x^2)\, R_{k-1}(x),$$

$$(16) \qquad k = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

като $R_0(x) = 1$ и $R_1(x) = bx - a$. От предната релация следва, че полиномите (15) образуват Щурмова редица и следователно нулите им са реални, прости и са разположени между най-малката и най-голямата нула на полинома $R_n(x)$, т. е. на полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Имаме

$$(17) \qquad \frac{y^{(k)}(x)}{y(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B_\nu}{x - x_\nu}$$

където числата B_ν са дадени с формулата

$$B_\nu = \frac{y^{(k)}(x_\nu)}{y'(x_\nu)}$$

Като използуваме (13), получваме за B_ν формулата

$$(18) \qquad B_\nu = \frac{R_{k-1}(x_\nu)}{(1 - x_\nu^2)^{k-1}}$$

От (13) следва, че всяка обща нула на $y^{(k)}(x)$ и $y(x)$ е също нула и на $R_{k-1}(x)$ и всяка обща нула на $y^{(k)}(x)$ и $R_{k-1}(x)$е нула на $y(x)$. Ако един затворен интервал $[x_p, x_{p+1}]$ не съдържа нула на $R_{k-1}(x)$, то от (18) следва, че числата B_ν и $B_{\nu+1}$ са с еднакъв знак, и от (17) заключаваме, че $y^{(k)}(x)$ има поне една нула вътре в интервала $[x_p, x_{p+1}]$. Напълно подобно на преди установяваме следната теорема:

8. Ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нулите на полинома на Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, наредени по растящи стойности, то всеки интервал (x_p, x_{p+1}) съдържа или една нула на полинома $\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, или една нула на полинома $R_{k-1}(x)$, или една от границите на този интервал е нула на $R_{k-1}(x)$ и на $\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Полиномите на Лагер $L_n^{(\alpha)}(x)$ удовлетворяват диференциалното уравнение

$$(19) \qquad xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0.$$

Да означим накъсо $L_n^{(\alpha)}(x)$ само с $y(x)$. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нулите на $L_n^{(\alpha)}(x)$, които (за $\alpha > -1$) са всичките реални и прости. Предполагаме, че сме ги наредили по растящи стойности. Тогава за $x = x_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, от (19) получаваме

$$x_\mu y''(x_\mu) = g_1(x_\mu) y'(x_\mu),$$

където $g_1(x)$ е полиномът

$$g_1(x) = x - \alpha - 1.$$

Като диференцираме (19) $k-1$ пъти, получаваме

$$(20) \qquad xy^{(k+1)} + (\alpha + k - x) y^{(k)} + (n + 1 - k) y^{(k-1)} = 0.$$

Да положим

$$(21) \qquad x_\mu^{p-1} y^{(p)}(x_\mu) = g_{p-1}(x_\mu) y'(x_\mu), \quad 1 \leq p \leq k, \quad g_0(x) = 1.$$

Тогава от (20) получаваме, че

$$x_\mu^k y^{(k+1)}(x_\mu) = g_k(x_\mu) y'(x_\mu),$$

където $g_k(x)$ се определя от

(22) $$g_k(x) = (x - \alpha - k) g_{k-1}(x) - x(n - k + 1) g_{k-2}(x).$$

Така получаваме редицата от полиноми

(23) $$g_0(x),\ g_1(x),\ g_2(x), \ldots, g_n(x),$$

които са свързани с релацията (22). При $k = n$ имаме

$$g_n(x_\mu) = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, n$$

и следователно полиномът $g_n(x)$, определен от равенството

(24) $$g_n(x) = (x - \alpha - n) g_{n-1}(x) - x g_{n-1}(x),$$

се анулира за всичките нули на $L_n^{(\alpha)}(x)$. Понеже този полином е от n-та степен, то следва, че той до постоянен множител е равен на $L_n^{(\alpha)}(x)$. От (22) се вижда, че за $x > 0$ полиномите $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots, g_n(x)$ образуват Штурмова редица. Като вземем под внимание, че нулите на $L_n^{(\alpha)}(x)$ са положителни, то следва тогава, че всичките полиноми $g_p(x)$, $1 \leqq p \leqq n-1$ имат само реални и прости нули, като нулите на полиномите $g_p(x)$, $1 \leqq p \leqq n-1$ лежат между най-малката и най-голямата нула на полинома $L_n^{(\alpha)}(x)$. Като използуваме по-нататък формулата

$$\frac{y^{(k)}(x)}{y(x)} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{B_\mu}{x - x_\mu},$$

където

$$B_\mu = \frac{y^{(k)}(x_\mu)}{y'(x_\mu)} = x_\mu^{1-k} g_{k-1}(x_\mu),$$

то по следвания вече път установяваме следната теорема:

9. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нулите на полинома на Лагер $L_n^{(\alpha)}(x)$, наредени по растящи стойности. Нека $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x - \alpha - 1$, $g_k(x)$, $2 \leqq k \leqq n$ са полиномите, определени с реалацията (22). Тогава всеки интервал (x_s, x_{s+1}) или съдържа една нула на $\frac{d^k}{dx^k} L_n^{(\alpha)}(x)$, или една нула на $g_{k-1}(x)$, или една от границите му е нула на $g_{k-1}(x)$ и на $\frac{d^k}{dx^k} L_n^{(\alpha)}(x)$.

Полиномите на Хермит $H_n(x)$, дефинирани с

$$e^{-x^2} H_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

удовлетворяват диференциалното уравнение

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Като диференцираме това уравнение $(k-1)$ пъти, получаваме

$$y^{(k+1)} - 2xy^{(k)} + (2n+2-2k)y^{(k-1)} = 0.$$

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нулите на полинома $H_n(x)$, наредени по растящи стойности. По следвания вече път получаваме

$$H_n^{(k)}(x_\mu) = U_{k-1}(x_\mu) H_n'(x_\mu), \ \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

където $U_{k-1}(x)$ е полином от степен $k-1$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, като между всеки три последователни полинома $U_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ има реалацията

$$U_\nu(x) - 2xU_{\nu-1}(x) + 2(n-\nu+1)U_{\nu-2}(x) = 0, \ \nu = 2, 3, \ldots, n, \tag{25}$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

Полиномите

$$U_0(x), \ U_1(x), \ U_2(x), \ldots, \ U_n(x)$$

образуват Щурмова редица и последният до постоянен множител е равен на $H_n(x)$. Следователно нулите на полиномите $U_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ са реални, прости и лежат между най-малката и най-голямата нула на полинома $H_n(x)$. Ще имаме теоремата:

10. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нулите на полинома $H_n(x)$, наредени по растящи стойности. Нека $U_\nu(x), \nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ са полиноми, определени с (25). Тогава всеки интервал (x_p, x_{p+1}) съдържа или една нула на $H_n^{(k)}(x)$, или една нула на $U_{k-1}(x)$, или една от границите на интервала е нула както на $H_n^{(k)}(x)$, така и на $U_{k-1}(x)$.

По следвания път можем да намерим подобни съотношения между нулите на две кои да е производни на разглежданите полиноми. Нека с $y(x)$ да означим полинома на Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. С $t_1, t_2, \ldots, t_{n-m}$ да означим нулите на $y^{(m)}(x)$, наредени по растящи стойности. Като положим в (12) $x = t_\mu$, получаваме

$$(1 - t_\mu^2) y^{(m+2)}(t_\mu) = T_1(t_\mu)\, y^{(m+1)}(t_\mu),$$

където $T_1(x)$ означава полинома

$$T_1(x) = [(b + 2m)\, x - a].$$

Ще установим формулата

$$(1 - t_\mu^2)^k y^{(m+k+1)}(t_\mu) = T_k(t_\mu)\, y^{(m+1)}(t_\mu), \ \mu = 0, 1, 2, \ldots, n-m, \tag{26}$$

където $T_k(x)$ са полиноми, свързани с релацията

$$T_k(x) = [(b + 2m + 2k - 2)\, x - a]\, T_{k-1}(x) - \lambda_n^{(m+k-1)}(1 - x^2)\, T_{k-2}(x), \tag{27}$$

като $T_0(x) = 1$. Действително, ако (26) е вярно за $k \leqq p-1$, то имаме

$$(28)\qquad \begin{aligned}(1-t_\mu^2)^{p-1}y^{(m+p)}(t_\mu) &= T_{p-1}(t_\mu)y^{(m+1)}(t_\mu),\\ (1-t_\mu^2)^{p-2}y^{(m+p-1)}(t_\mu) &= T_{p-2}(t_\mu)\,y^{(m+1)}(t_\mu).\end{aligned}$$

Като умножим равенството

$$(1-x^2)y^{(m+p+1)}(x)+[a-(b+2m+2p-2)x]y^{(m+p)}(x)$$
$$+\lambda_n^{(m+p-1)}y^{(m+p-1)}(x)=0$$

с $(1-x^2)^{p-1}$ и положим $x=t_\mu$ и използуваме (28), получаваме, че

$$(1-x_\mu^2)^p y^{(m+p+1)}(t_\mu)=T_p(t_\mu)\,y^{(m+1)}(t_\mu),$$

където $T_p(x)$ е полином, определен с формулата

$$T_p(x)=[(b+2m+2p-2)x-a]\,T_{p-1}(x)$$
$$-\lambda_n^{(m+p-1)}(1-x^2)\,T_{p-2}(x).$$

От (26) при $k=n-m$ получаваме $T_{n-m}(t_\mu)=0$, $1\leqq\mu\leqq n-m$, откъдето следва, че полиномът $T_{n-m}(x)$ до постоянен (отличен от нула) множител е равен на полинома $y^{(m)}(x)$. Полиномите

$$T_0(x),\quad T_1(x),\quad T_2(x),\ldots,T_{n-m}(x)$$

образуват Щурмова редица и следователно нулите им са реални, прости и лежат между най-малката и най-голямата нула на полинома $y^{(m)}(x)$. По следвания път установяваме следната теорема:

11. Нека $t_1, t_2, \ldots, t_{n-m}$ са нулите на полинома $\frac{d^m}{dx^m}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, наредени по растящи стойности. Тогава във всеки интервал (t_i, t_{i+1}) има или една нула на полинома $\frac{d^{m+k}}{dx^{m+k}}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, или една нула на полинома $T_{k-1}(x)$, или една от граничните точки t_i и t_{i+1} е нула на тези два полинома.

Подобни теореми имаме и за нулите на производните на полиномите на Лагер и Хермит.

Ще забележим, че съгласно една теорема на Фавар от релациите (3), (16), (22), (25), (27) следва, че системите от полиноми $\{Q_\nu(x)\}_0^n$, $\{R_\nu(x)\}_0^n$, $\{g_\nu(x)\}_0^n$, $\{U_\nu(x)\}_0^n$, $\{T_\nu(x)\}_0^{n-m}$ са ортогонални.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schur I. Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzel. J. Reine Angew. Math., 144, 1914, 75—88.
2. Malo E. Note sur les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. Jour. de Math. spéciales, (4), 4, 1895, 7
3. Натансон И. П. Конструктивная теория функции. Москва, 1949, 400—500.
4. Обрешков Н. Висша алгебра. София, 1958, стр. 245—247.
5. Bieberbach L., G. Bauer. Vorlesungen über Algebra. Leipzig, 1928, S. 187—189.

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ОТНОСИТЕЛЬНО НУЛЕЙ РЕАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Н. Обрешков

РЕЗЮМЕ

В начале работы было установлено следующее обобщение классической теоремы Эрмит—Пулена:

I. Пусть уравнение

$$(1) \qquad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

будет иметь только реальные корни и

$$(2) \qquad \varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m = 0$$

будет уравнением с реальными коэффициентами, аргументы мнимых корней которого удовлетворяют неравенство

$$(3) \qquad |\sin\varphi| \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Тогда уравнение

$$(4) \qquad \varphi(D)f(x) = b_0f^{(m)}(x) + b_1f^{(m-1)}(x) + \cdots + b_mf(x)$$

будет иметь только реальные корни. Если во (2) уравнении есть знак неравенства, то каждый многократный корень (4) является также многократным корнем уравнения (1).

Неравенство (3) нельзя расширить. В качестве приложения были установлены следующие обобщения теорем Шура и Мало

2. Пусть уравнение;

$$(5) \qquad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m = 0, \quad a_m \neq 0,$$

будут иметь реальные корни и аргументы корней этого уравнения с реальными коэффициентами

$$(6) \qquad \varphi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = 0, \qquad b_n \neq 0,$$

удовлетворяют неравенство (7) $|\sin\varphi| \leqq \frac{1}{\sqrt{m}}$, где коэффициенты $\varphi(x)$ или $\varphi(-x)$ с одинаковым знаком. Тогда уравнение

$$a_0b_0 + 1!\,a_1b_1x + 2!\,a_2b_2x^2 + \cdots + k!\,a_kb_kx^k = 0,$$

где $k = \min(m, n)$ будет иметь только реальные корни.

3. Пусть (5) и (6) являются уравнениями с реальными коэффициентами, аргументы мнимых корней которого удовлетворяют неравенству (7).

Пусть, кроме того, коэффициенты полинома $\varphi(x)$ или полинома $\varphi(-x)$ будут иметь одинаковые знаки. Тогда уравнение

$$a_0b_0 + a_1b_1x + a_2b_2x^2 + \cdots + a_kb_kx^k = 0,$$

где $k = \min(m, n)$ будет иметь только реальные корни.

Было доказано дальше, что нули ортогональных полиномов обладают некоторыми новыми свойствами. Пусть

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$$

являются полиномами, определенные равенством

$$\alpha_\nu P_\nu(x) = (\beta_\nu x + \gamma_\nu) P_{\nu-1}(x) - \delta_\nu P_{\nu-2}(x), \nu = 2, 3, \ldots, n,$$

где $P_0(x) = 1$ и $P_1(x) = \beta_1 x + \gamma_1$.

Числа $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu, \delta_\nu$ являются реальными и, кроме того, $\alpha_\nu, \beta_\nu, \delta_\nu$ — положительны. Известно, что нули полиномов $P_\nu(x)$, $1 \leqq \nu \leqq n$ — реальные, простые и нули полиномов $P_{\nu-1}(x)$ отделяют нули полиномов $P_\nu(x)$. Образуем полиномы

$$(8) \qquad Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x),$$

определенные равенством

$$\delta_{n-k} Q_{k+1}(x) = (\beta_{n-k} x + \gamma_{n-k}) Q_k(x) - \alpha_{n-k} Q_{k-1}(x), \; k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $Q_0(x) = 1$ и $Q_1(x) = \frac{1}{\delta_n}(\beta_n + \gamma_n)$.

Последний полином $Q_n(x)$ совпадает до своего постоянного множителя с полиномом $P_n(x)$ и ряд (8) является последовательностью Штурмова. Была установлена следующая теорема:

В каждом интервале между двумя последовательными нулями полинома $P_n(x)$ есть один (и только один) нуль полинома $P_{n-k}(x)$ или один (и только один) нуль полинома $Q_{k-1}(x)$ или одна из граничных точек интервала является нулем для обоих полиномов $P_{n-k}(x)$ и $Q_{k-1}(x)$.

Были установлены подобные теоремы и для нулей производных полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита. Пусть $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\alpha, \beta > -1$ являются полиномами Якоби и $T_0(x), T_1(x), T_2(x), \ldots, T_{n-m}(x)$ полиномы, определенные равенством

$$T_k(x) = [(b + 2m + 2k - 2)x - a] T_{k-1}(x) - \lambda_n^{(m+k-1)}(1 - x^2) T_{k-2}(x),$$

$$2 \leqq k \leqq n - m,$$

где $a = \beta - \alpha$, $b = \alpha + \beta + 2$, $\lambda_n^{(p)} = n(n + \alpha + \beta + 1) - p(b + p - 1)$,

где $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = [(b + 2m)x - a$.

Установлена следующая теорема:

Между двумя любыми последовательными нулями полинома $\frac{d^m}{dx^m} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ имеется или один и только один нуль полинома $\frac{d^{m+k}}{dx^{m+k}} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ или один (и только один) нуль полинома $T_{k-1}(x)$ или же одна из границ этого интервала является нулем обоих полиномов.

Подобная теорема была доказана и для нулей полиномов Лагерра и Эрмита.

SUR QUELQUES THÉOREMES POUR LES ZÊROS DES POLYNOMES RÉELS

N. Obrechkoff

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous démontrons d'abord la généralisation suivante du théorème classique de Poulain — Hermite:

1. Supposons que le polynome

(1) $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$$

a seulement des zéros réels et que pour les arguments φ des zéros imaginaires du polynome

(2) $$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_m$$

dont les coefficients sont reels, on a l'inégalité

(3) $$|\sin\varphi|\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Alors le polynome

(4) $$g(D)f(x)=b_0f^{(m)}(x)+b_1f^{(m-1)}(x)+\cdots+b_mf(x)$$

a seulement des zéros réels. Si dans (3) on a le signe d'inégalité chaque zéro multiple de (4) est aussi un zéro multiple de (1).

Comme application de ce théorème nous démontrons les généralisations suivantes des théorèmes de Schur et Malo:

2. Supposons que le polynome

(5) $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m,\ a_m\neq 0,$$

a seulement des zéros réels et les arguments des zéros imaginaires du polynome

(6) $$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n,\ b_n\neq 0,$$

dont les coefficients sont réels et du même signe, satisfont à l'inégalité

(7) $$|\sin\varphi|\leqq\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Alors le polynome

$$a_0b_0+1!\,a_1b_1x+2!\,a_2b_2x^2+\cdots+k!\,a_kb_kx^k,$$

où $k=\min(m,n)$, a seulement des zéros réels.

3. Soient (5) et (6) des polynomes réels, les arguments des zéros imaginaires desquels satisfont l'inégalité (7). Supposons encore que les coefficients du polynome $\varphi(x)$ (ou du polynome $\varphi(-x)$, sont du même signe. Alors le polynome

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \cdots + a_k b_k x^k,$$

ou $k = \min(m, n)$ a tous ses zéros réels.

Soient

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x), \ldots,\ P_n(x)$$

des polynomes réels liés par les relations

$$P_\nu(x) = (\beta_\nu x + \gamma_\nu) P_{\nu-1}(x) - \delta_\nu P_{\nu-2}(x),\ \nu = 2, 3, \ldots, n,$$

et $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = \beta_1 x + \gamma_1$, les nombres β_ν, γ_ν, δ_ν étant supposés réels et les nombres β_ν, δ_ν positifs. Il est bien connu que les zéros du polynome $P_\nu(x)$, $1 \leqq \nu \leqq n$ sont réels, simples et sont séparés par les zéros du polynome $P_{\nu-1}(x)$. Introduisons les polynomes

(8) $$Q_0(x),\ Q_1(x),\ Q_2(x), \ldots, Q_n(x),$$

définis par les relations

$$\delta_{n-k} Q_{k+1}(x) = (\beta_{n-k} x + \gamma_{n-k}) Q_k(x) - Q_{k-1}(x),\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = \frac{1}{\delta_n}(\beta_n x + \gamma_n)$. Le dérnier polynome $Q_n(x)$ coïnçide d'un facteur près avec le polynome $P_n(x)$. Il est évident que (8) est une suite de Sturm. Le théorème suivant est démontré:

4. Dans chaque intervalle entre deux zéros consécutifs du $P_n(x)$ il y a un (et seulement un) zéro du $P_{n-k}(x)$ ou un (et seulement un) zéro du $Q_{k-1}(x)$ ou un des points frontiers de cet intervalle est zéro des polynomes $P_{n-k}(x)$ et $Q_{k-1}(x)$.

Enfin, nous demontrons des résultats semblables pour les dérivées des polynomes de Jacobi, Laguerre et Hermite.