ВЪРХУ АСИМПТОТИЧНОТО ПОВЕДЕНИЕ НА НУЛИТЕ НА ЕДНА КЛАСА ЦЕЛИ ФУНКЦИИ

П. Русев

В настоящата работа се изучава асимптотичното поведение на нулите на целите функции от вида

$$\int_0^1 f(t)\cos tz\,dt \tag{1}$$

и

$$\int_0^1 f(t)\sin tz\,dt, \tag{2}$$

т. е. разпределението им вън от една окръжност с център в точката $z=0$ и с достатъчно голям радиус. Оказва се, че при доста общи условия нулите на целите функции от вида (1) и (2) се приближават до реалната ос. Порядъкът на това приближаване, грубо казано, се определя от порядъка на фуриеровите коефициенти на една функция, твърде просто свързана с функцията $f(t)$.

Основна роля във всички доказателства играе следната теорема на Обрешков, дадена в работата му [1].

Теорема 1. Нека е дадена мероморфната функция

$$F(z) = -\gamma + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A_n}{z-a_n}, \tag{3}$$

където $\gamma \neq 0$, A_n и a_n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ са произволни реални числа. Да означим с μ_n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ произволни положителни числа, подчинени на единственото условие

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n = 1.$$

Да положим

$$a_n' = a_n - \frac{A_n}{\gamma\mu_n} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и нека C_n е окръжността, която минава през точките a_n, a_n' и сече ортогонално реалната ос. Мероморфната функция (3) няма нули вън от окръжностите C_n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

С $E(\lambda)$ $(\lambda \geqq 0)$ да означим множеството от реалните и положителните функции $\varphi(t)$, дефинирани в интервала $(0, +\infty)$, за които

$$\varliminf_{t\to+\infty} t^{\lambda}\varphi(t) > 0.$$

С $A(\lambda)$ да означим множеството от целите функции $F(z)$, които притежават следното свойство: каквато и да е функцията $\varphi(t) \in E(\lambda)$, $F(z)$ има краен брой нули вън от областта

$$D_\lambda \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ y| < \varphi(|x|) \end{cases}$$

Теорема 2. Нека $f(t)$ е реална функция, дефинирана и интегруема в риманов смисъл в интервала $[0, 1]$. Ако са удовлетворени следните условия:

а) съществува положително λ такова, че

$$\int_0^1 f(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t dt = o\left(\frac{1}{n^{\lambda+3}}\right), \tag{4}$$

б)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)\int_0^1 f(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t dt \neq 0, \tag{5}$$

то каквото и да е положителното число $\varepsilon \leqq \lambda$, цялата функция (1) принадлежи на класа $A(\lambda-\varepsilon)$.

Доказателство. Ще използуваме разложението

$$\frac{U(z)}{\cos z} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{U\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \tag{6}$$

на мероморфната функция

$$\frac{U(z)}{\cos z} = \frac{\int_0^1 f(t)\cos tz dt}{\cos z}$$

в сбор от елементарни дроби. От разложението (6) лесно се получава следното:

$$\frac{z^2 U(z)}{\cos z} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi U\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

$$(7)\qquad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 U\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

Ще приложим теорема 1. към мероморфната функция (7). Преди всичко условието (5) означава, че

$$2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi U\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right] \neq 0.$$

Нека $\varepsilon \leqq \lambda$ е произволно положително число. Да положим

$$(8)\qquad \mu_n = \frac{1}{\sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left|\nu+\frac{1}{2}\right|^{1+\varepsilon}}} \cdot \frac{1}{\left|n+\frac{1}{2}\right|^{1+\varepsilon}}$$

и да означим с C_n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ окръжността, която минава през точките $a_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$,

$$(9)\qquad a_n' = a_n - \frac{(-1)^{n+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 U\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{2\mu_n \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi U\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}$$

и сече ортогонално реалната ос. От теорема 1. следва, че нулите на мероморфната функция (7) или все едно нулите на цялата функция $z^2 U(z)$ са разпределени вътре в окръжностите C_n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ако $\varphi(t)$ е произволна функция от множеството $E(\lambda-\varepsilon)$, ще покажем, че при достатъчно голямо по абсолютна стойност n окръжностите C_n лежат вътре в областта

$$D_{\lambda-\varepsilon} \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ |y| < \varphi(|x|) \end{cases}$$

Да допуснем противното. Тогава безбройно много от окръжностите C_n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ще имат поне една обща точка с контура на областта $D_{\lambda-\varepsilon}$. Обаче от условието (4) и от равенствата (8) и (9) следва, че

$$a_n - a_n' = o\left(\frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}}\right),$$

и ние можем следователно да изберем една редица $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, такава, че

$$\lim_{n\to+\infty} t_n^{\lambda-\varepsilon}\varphi(t_n) = 0.$$

Последното равенство обаче противоречи на предположението, че $\varphi(t) \in E(\lambda-\varepsilon)$. С това теорема 2. е установена.

Да разгледаме един пример. Нека $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ е произволна монотонно намаляваща редица от положителни числа, която клони към нула. При $s > 1$ функционният ред

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t}{(2k+1)^s}$$

е равномерно сходящ в интервала $(-\infty, +\infty)$ и представя една непрекъсната функция $f(t)$. За тази функция имаме

$$\int_0^1 f(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t\,dt=\frac{1}{2}\frac{a_n}{(2n+1)^s}=o\left(\frac{1}{n^s}\right), \tag{10}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\int_0^1 f(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t\,dt=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{(2n+1)^{s-1}}\neq 0.$$

Прочее при направените за редицата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ предположения, като имаме пред вид (10), можем да твърдим, че при $\lambda > 0$ цялата функция

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t}{(2k+1)^{\lambda+3}}\cos tz\,dt$$

принадлежи на класа $A(\lambda-\varepsilon)$, каквото и да е положителното число $\varepsilon \leqq \lambda$.

Теорема 3. Нека $f(t)$ е реална функция, дефинирана и интегруема в риманов смисъл в интервала $[0, 1]$. Ако са удовлетворени следните условия:

а) съществува положително λ, такова, че

$$\int_0^1 f(t)\sin n\pi t\,dt=o\left(\frac{1}{n^{\lambda+3}}\right),$$

б) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\int_0^1 f(t)\sin n\pi t\,dt\neq 0,$$

то каквото и да е положителното число $\varepsilon \leqq \lambda$, цялата функция (2) принадлежи на класа $A(\lambda-\varepsilon)$.

Доказателството на теорема 3. е напълно аналогично на това на теорема 2. За целта се използува разложението

$$\frac{z^2 V(z)}{\sin z}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\pi\, V(n\pi)$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2\pi^2 V(n\pi)}{z-n\pi},$$

което лесно се получава от разложението

$$\frac{V(z)}{\sin z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{V(n\pi)}{z-n\pi}$$

на мероморфната функция

$$\frac{V(z)}{\sin z}=\frac{\int\limits_0^1 f(t)\sin tz dt}{\sin z}$$

в сбор от елементарни дроби.

Нека $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ е произволна редица от положителни числа, която монотонно намалява и клони към нула. При $\lambda>0$ цялата функция

$$\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\sin k\pi t}{k^{\lambda+3}}\sin tz dt$$

принадлежи на класа $A(\lambda-\varepsilon)$, каквото и да е положителното число $\varepsilon\leqq\lambda$

Постъпила на 1. XI. 1958 г

ЛИТЕРАТУРА

1. Обрешков Н. Върху някои класи от полиноми и рационални функции. Год. Соф. унив., **33** (1936—37), ФМФ, кн. 1 (математика и физика), 39—148.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ НУЛЕЙ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

П. Русев

РЕЗЮМЕ

Обозначим через $E(\lambda)$ множество всех действителных и положительных функций $\varphi(t)$, определенных в интервале $[0,+\infty)$, для которых

$$\varliminf_{t\to+\infty} t^{\lambda}\varphi(t)>0.$$

Через $A(\lambda)$ обозначим множество всех целых функций $F(z)$, все нули которых, за исключением конечного числа, лежат в области

$$D_\lambda \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ |y| < \varphi(|x|) \end{cases}$$

где $\varphi(x)$ произвольная функция из класса $E(\lambda)$.

В работе даются достаточные условия для того, чтобы целые функции вида

$$\int_0^1 f(t) \cos tz dt \tag{1}$$

и

$$\int_0^1 f(t) \sin tz dt \tag{2}$$

принадлежали к классу $A(\lambda)$ при некотором λ. Например, если действительная функция $f(t)$, определенная и интегрируемая в смысле Римана в интервале $[0, 1]$, удовлетворяет условиям

а) $$\int_0^1 f(t) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t dt = O\left(\frac{1}{n^{\lambda+3}}\right) \qquad (\lambda > 0)$$

б) $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2n+1) \int_0^1 f(t) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t dt \neq 0$$

тогда целая функция (1) принадлежит к классу $A(\lambda-\varepsilon)$, где ε произвольное положительное число, меньше λ.

ÜBER DAS ASYMPTOTISCHE VERHALTEN DER NULLSTELLEN EINER KLASSE VON GANZEN FUNKTIONEN

P. Russev

ZUSAMMENFASSUNG

Es sei $E(\lambda)$ die Menge aller im Intervall $[0, +\infty)$ definierten Funktionen $\varphi(t)$, die reell und positiv sind und folgende Bedingung

$$\varliminf_{t \to +\infty} t^\lambda \varphi(t) > 0$$

erfüllen. Man sagt, daß die ganze Funktion $F(z)$ zur Klasse $A(\lambda)$ gehört, wenn ihre sämtlichen Nullstellen, bis auf eine endliche Anzahl, im Gebiet

$$D_\lambda \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ |y| < \varphi(|x|) \end{cases}$$

liegen, wo $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion aus $E(\lambda)$ ist.

In der vorliegenden Arbeit werden hinreichende Bedingungen angegeben, bei denen ganze Funktionen der Art

$$\int_0^1 f(t) \cos tz dt \tag{1}$$

und

$$\int_0^1 f(t) \sin tz dt \tag{2}$$

zur Klasse $A(\lambda)$ gehören. Zum Beispiel, wenn die reelle Funktion $f(t)$ im Intervall [0, 1] R-integrierbar ist und folgende Bedingungen

a) $$\int_0^1 f(t) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t dt = o\left(\frac{1}{n^{\lambda+3}}\right) \qquad (\lambda > 0),$$

b) $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2n+1) \int_0^1 f(t) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t dt \neq 0$$

erfüllt, gehört die ganze Funktion (1) zur Klasse $A(\lambda-\varepsilon)$, wo ε eine beliebige positive Zahl, kleiner als λ, ist.