ВЪРХУ ДИФЕРЕНЦИАЛНОТО УРАВНЕНИЕ

$$y'' + ax^\nu y^n = 0$$

Ив. Чобанов и Г. Паскалев

Нелинейното диференциално уравнение

(1) $$y'' + ax^\nu y^n = 0$$

([1], уравнение 6.11) изобщо не може да се интегрира с краен брой квадратури. При $n = 1$, както е известно, то е линейното хомогенно диференциално уравнение от втори ред, съответствуващо на специалното рикатиево уравнение

$$y' + y^2 = ax^\nu.$$

Субституцията

(2) $$\eta(\xi) = y(x), \quad \xi = \frac{1}{x}$$

трансформира уравнението (1) в

(3) $$\xi\eta'' + 2\eta' + a\xi^\mu\eta^n = 0, \quad \mu = -\nu - 3$$

([1], уравнение 6.74; последното се третира в [1] при $a > 0$), а при $n \neq 1$ чрез

$$\eta = a^{\frac{1}{1-n}}\bar{\eta}$$

уравнението (3) се преобразува в

(4) $$\xi\bar{\eta}'' + 2\bar{\eta}' + \xi^\mu\bar{\eta}^n = 0.$$

Е. Камке [1] отбелязва, че общият интеграл на уравнението (4) се получава с квадратури само в три случая: при $\mu = 1$, $n = 0$; при $\mu = 1$, $n = 1$ и при $\mu = -4$, $n = 5$. Според Камке други случаи на квадратури на уравнението (1) или което е същото, (3) или (4) не са известни.

В настоящото съобщение се показва, че уравнението (1) може да се интегрира с квадратури в случая

(5) $$\nu = -(n + 3),$$

дето n е произволно реално число, отлично от ± 1, и се дават общите интеграли на уравнението (1) при (5). При това се прилагат два метода, които водят до съществено различна форма на общия интеграл на (1) при (5); за целите на известни изучавания може да се окаже по-удобна едната или другата форма на интеграла.

Нека е дадено уравнението (1) с (5), т. е.

$$y'' + ax^{-(n+3)}y^n = 0. \tag{6}$$

Случаите $a=0$, $n=0$ и $n=-3$ са тривиални, поради което не ще ги разглеждаме. Предполагаме още $n^2 \neq 1$. При

$$y = u^{\frac{2}{1-n}} \tag{7}$$

уравнението (6) става

$$\frac{2(n+1)}{(n-1)^2} u^{\frac{2n}{1-n}} u'^2 + \frac{2}{1-n} u^{\frac{n+1}{1-n}} u'' + ax^{-(n+3)} u^{\frac{2n}{1-n}} = 0$$

или

$$\frac{n+1}{1-n} x^{n+3} u'^2 + x^{n+3} u u'' + \frac{a(1-n)}{2} = 0,$$

т. е.

$$x^{\frac{n+3}{2}} u \left[(n+1) x^{\frac{n+1}{2}} u' + x^{\frac{n+3}{2}} u'' + \frac{n^2-1}{4} x^{\frac{n-1}{2}} u \right]$$

$$= \frac{n+1}{n-1} \left[x^{n+3} u'^2 + \frac{(n-1)^2}{4} x^{n+1} u^2 + (n-1)\, x^{n+2} u u' \right] + \frac{a(n-1)}{2}. \tag{8}$$

При

$$z = x^{\frac{n+3}{2}} \left(u' + \frac{n-1}{2} \frac{u}{x} \right) \tag{9}$$

уравнението (8) става

$$x^{\frac{n+3}{2}} u z' = \frac{n+1}{n-1} z^2 + \frac{a(n-1)}{2} \tag{10}$$

т. е. интегрирането на (12) е равносилно с интегрирането на (10) с (9). От (9) получаваме

$$u' = u \left(\frac{z x^{-\frac{n+3}{2}}}{u} + \frac{1-n}{2} \frac{1}{x} \right),$$

т. е. съгласно (10)

$$\frac{u'}{u} = \frac{z z'}{\frac{n+1}{n-1} z^2 + \frac{a(n-1)}{2}} + \frac{1-n}{2} \frac{1}{x}.$$

След интегриране се получава

$$\ln u = \int \frac{zdz}{\frac{n+1}{n-1} z^2 + \frac{a(n-1)}{2}} + \frac{-n}{2} \int \frac{dx}{x},$$

т. е.

(11) $$u = x^{\frac{1-n}{2}} \exp \int \frac{zdz}{\frac{n+1}{n-1} z^2 + \frac{a(n-1)}{2}}$$

Заместваме (11) в (10) и получаваме

$$z' x^2 \exp \int \frac{zdz}{\frac{n+1}{n-1} z^2 + a\frac{n-1}{2}} = \frac{n+1}{n-1} z^2 \quad a \frac{n-1}{2}$$

отдето след интегриране следва

(12) $$\int \left[\frac{n+1}{n-1} z^2 + \frac{a(n-1)}{2} \right]^{-1} \exp \int \frac{zdz}{\frac{n+1}{n-1} z^2 + \frac{a(n-1)}{2}} dz + \frac{1}{x} = 0.$$

Системата уравнения (11) и (12) има вида

$$F_1(u, x, z, C_1) = 0, \qquad F_2(x, z, C_1, C_2) = 0$$

и представя поради наличието на двете независими интеграционни константи C_1 и C_2 параметрично по z общият интеграл $u(x)$ на (6) със (7).

Поради

$$\int \frac{zdz}{\frac{n+1}{n-1} z^2 + \frac{a(n-1)}{2}} = \frac{n-1}{2(n+1)} \ln \left[z^2 + \frac{a(n-1)^2}{2(n+1)} \right] + \ln C_1$$

релацията (11) дава

$$u = C_1 x^{\frac{1-n}{2}} \left[z^2 + \frac{a(n-1)^2}{2(n+1)} \right]^{\frac{n-1}{2(n+1)}}$$

отдето y се получава съгласно (7). Прочее общият интеграл на уравнението (6) се получава чрез елиминация на z от системата

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{n-1}{n+1} \displaystyle\int \left[z^2 + \frac{a(n-1)^2}{2(n+1)} \right]^{-\frac{n+3}{2(n+1)}} dz + \frac{1}{x} = 0, \\ z^2 = C_1^{\frac{2(n+1)}{1-n}} x^{n+1} y^{-(n+1)} - \dfrac{a(n-1)^2}{2(n+1)} \end{cases}$$

За да интегрираме по друг начин уравнението (6), забелязваме, че чрез

$$y(x) = a^{\frac{1}{1-n}} x\,\theta(\xi),\quad \xi = \frac{1}{x} \tag{13}$$

то се трансформира в

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \theta^n = 0. \tag{14}$$

При $\frac{d\theta}{d\xi} = t$ имаме $\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \frac{dt}{d\theta}t$ и (14) става

$$t\frac{dt}{d\theta} + \theta^n = 0,$$

отдето

$$\frac{1}{2}t^2 = -\frac{\theta^{n+1}}{n+1} + \frac{C_1}{n+1}$$

или

$$t = \varepsilon\sqrt{\frac{2}{n+1}(C_1 - \theta^{n+1})},\qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Тогава

$$\frac{d\theta}{\sqrt{C_1 - \theta^{n+1}}} = \varepsilon\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,d\xi,$$

т. е.

$$\frac{1}{x} = \xi = C_2 + \varepsilon\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{C_1 - \theta^{n+1}}}. \tag{15}$$

Системата уравнения (13) и (15) има вида

$$F_1(x, y, \theta) = 0,\qquad F_2(x, \theta, C_1, C_2) = 0$$

и представя параметрично по θ общият интеграл на (6) поради наличието на двете независими интеграционни константи C_1 и C_2.

И тук, както и при системата (11), (12), елиминацията на параметъра изобщо не може да се извърши ефективно. Преди всичко това се дължи на невъзможността в общия случай да се изразят посредством елементарни функции неопределените интеграли, фигуриращи в (12) и (15).

Да отбележим накрая, че възможността да се интегрира уравнението (1) с квадратури при връзката (5) между ν и n позволява да се представи в затворена форма интегралът на уравнението (3) при $\mu = n$. Общият интеграл на (3) в този случай се получава от общия интеграл (11), (12), респ. (13), (15) на (1) чрез субституцията (2).

Постъпила на 7. IX. 1957 г., в преработен вид на 1. XI. 1958 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kamke E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. 1. 4. Auflage, Leipzig, 1951.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ $y''+ax^{\nu}y^{n}=0$

Ив. Чобанов и Г. Паскалев

РЕЗЮМЕ

Дифференциальное уравнение (1) можно решить в квадратурах, если выполнено условие (5). В этом случае общий интеграл уравнений (1) получается при элиминации z из системы уравнений (11), (12), имея в виду (7) и (9), а также при элиминации θ из системы уравнений (13), (15).

ÜBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG $y''+ax^{\nu}y^{n}=0$

Iw. Tschobanow und G. Paskalew

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird bewiesen, daß sich die Differentialgleichung (1) durch Quadraturen integrieren läßt, falls (5) erfüllt ist. In diesem Fall erhält man das allgemeine Integral von (1), wenn man z aus dem Gleichungssystem (11), (12) unter Berücksichting von (7) und (9), oder θ aus dem Gleichungssystem (13), (15) eliminiert.