ПРИЛОЖЕНИЕ НА НОВИТЕ УРАВНЕНИЯ НА АНАЛИТИЧНАТА ДИНАМИКА В РЕЛАТИВНОТО ДВИЖЕНИЕ НА ТВЪРДИТЕ ТЕЛА

Ив. Ценов

1. В тази работа ще приложим новите уравнения на аналитичната динамика в релативното движение на твърдите тела [1]:

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial\, \delta\tau}{\partial\, \delta q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

в които $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_s$ са обобщените координати на холономна материална система, $\frac{1}{2}\ddot{T}$ — втората пълна производна спрямо времето t на нейната полукинетична енергия $\frac{1}{2}T$, $\delta\tau$ — сумата от виртуалните работи на дадените сили и на н о в и с и л и, произхождащи от функцията на сили $\frac{3}{2}T$, разглеждана като функция само на обобщените координати и на времето t, т. е. разгледана с постоянни обобщени скорости

$$\delta\tau = Q_i\, \delta q_i + \frac{3}{2}\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i,$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ са дадените обобщени сили.

Нека материалната система е нехолономна с линейни диференциални връзки, т. е. да бъде подчинена и на нови връзки, изразени аналитично чрез p-те линейни диференциални релации между обобщените скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_i, \ldots, \dot{q}_s$:

$$\text{(1)} \qquad \dot{q}_r = a_{r\alpha}\dot{q}_\alpha + a_r, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k; \; r = k+1, \ldots, k+p = s.$$

Оттук имаме

$$\text{(2)} \qquad \ddot{q}_r = a_{r\alpha}\ddot{q}_\alpha + \dot{a}_{r\alpha}\dot{q}_\alpha + \dot{a}_r,$$

$$\text{(3)} \qquad \delta q_r = a_{r\alpha}\,\delta q_\alpha.$$

Тогава функцията $\frac{1}{2}\ddot{T}$ на обобщените ускорения $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_s$ посредством (2) става функция $\frac{1}{2}\ddot{T}_l$ на независимите обобщени ускорения $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_k$, а функцията $\delta\tau$ — на виртуалните премествания $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ посредством (3) — функция $\delta\tau_l$ на независимите виртуални премествания $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ и уравненията на движението на нехолономната материална система са [2]

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}_l}{\partial \ddot{q}_\alpha} = \frac{\partial \delta\tau_l}{\partial \delta q_\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, k.$$

Нека сега трансформираме уравненията на движението (I), като заменим обобщените скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ с новите величини $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ свързани с $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ с равенствата

$$\text{(4)} \qquad \dot{q}_i = b_{ij}\omega_j + b_i, \quad i, j = 1, 2, \ldots, s.$$

Ако положим $\omega_j = \frac{d\mu_j}{dt} = \dot{\mu}_j$, то (4) приема вида

$$\text{(4')} \qquad \dot{q}_i = b_{ij}\dot{\mu}_j + b_i,$$

отгдето

$$\text{(5)} \qquad \ddot{q}_i = b_{ij}\ddot{\mu}_j + \dot{b}_{ij}\dot{\mu}_j + \dot{b}_i,$$

$$\text{(6)} \qquad \delta q_i = b_{ij}\delta\mu_j.$$

Функцията $\frac{1}{2}\ddot{T}$ посредством (5) става функция $\frac{1}{2}\ddot{\overline{T}}$ на $\ddot{\mu}_1, \ddot{\mu}_2, \ldots, \ddot{\mu}_s$, а функцията $\delta\tau$ посредством (6) — функция $\delta\overline{\tau}$ на $\delta\mu_1, \delta\mu_2, \ldots, \delta\mu_s$ и трансформираните уравнения на движението на холономна система са [2]

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{\overline{T}}}{\partial \ddot{\mu}_j} = \frac{\partial \delta\overline{\tau}}{\partial \delta\mu_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Като вземем пред вид (4'), релациите (1) приемат вида

$$\dot{\mu}_r = c_{\alpha r}\dot{\mu}_\alpha + c_r;$$

оттук получаваме

$$\text{(7)} \qquad \ddot{\mu}_r = c_{\alpha r}\ddot{\mu}_\alpha + \dot{c}_{\alpha r}\dot{\mu}_\alpha + \dot{c}_r,$$

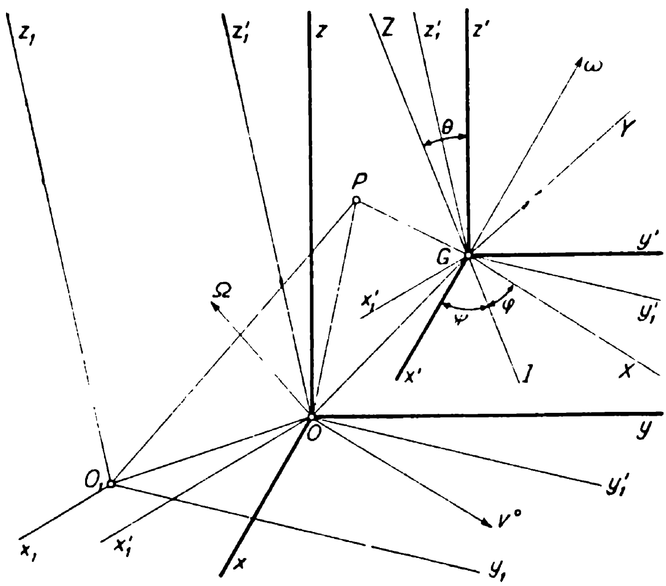
$$\text{(8)} \qquad \delta\mu_r = c_{\alpha r}\delta\mu_\alpha.$$

Функцията $\frac{1}{2}\ddot{\overline{T}}$ посредством (7) става функция $\frac{1}{2}\ddot{\overline{T}}_l$ на $\ddot{\mu}_1, \ddot{\mu}_2, \ldots, \ddot{\mu}_k$, а функцията $\delta\overline{\tau}$ посредством (8) — функция $\delta\overline{\tau}_l$ на $\delta\mu_1, \delta\mu_2, \ldots, \delta\mu_k$ и трансформираните уравнения на движението и нехолономната система са

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{\overline{T}}_l}{\partial \ddot{\mu}_\alpha} = \frac{\partial \delta\overline{\tau}_l}{\partial \delta\mu_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k.$$

2. Релативно движение на материална точка. Нека точката P с маса m се движи спрямо координатната система $oxyz$, която притежава най-общо движение спрямо постоянната координатна система $o_1 x_1 y_1 z_1$. Движението на $oxyz$ спрямо $o_1 x_1 y_1 z_1$ е резултантно от двете едновременни движения: от ротацията $\vec{\Omega}$ на $oxyz$ спрямо триедъра $ox_1' y_1' z_1'$, на който осите са съответно успоредни на осите на $o_1 x_1 y_1 z_1$ и от транслацията на този триедър спрямо $o_1 x_1 y_1 z_1$. Ротацията $\vec{\Omega}$ става около ос, минаваща през точката o, а транслацията се определя от скоростта $\vec{v}^0$ на тая точка (черт. 1).

Ние ще приложим уравненията (I) в $n^\circ 1$, за да намерим диференциалните уравнения на релативното движение на точката $P(x, y, z)$ спрямо координатната система $oxyz$; векторите $\vec{\Omega}$ и $\vec{v}^0$, които определят движението на $oxyz$ спрямо $o_1 x_1 y_1 z_1$, са дадени функции на времето t.



Черт. 1

Векторната координата на точката P спрямо точката o_1:

$$\overrightarrow{o_1P} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oP}.$$

Диференцираме това равенство спрямо осите $o_1 x_1 y_1 z_1$:

$$\overrightarrow{o_1P}' = \overrightarrow{o_1o}' + \overrightarrow{oP}',$$

гдето $\overrightarrow{o_1P}'$ е абсолютната скорост $\vec{v}_a^p$ на точката P спрямо постоянната координатна система $o_1 x_1 y_1 z_1$, $\overrightarrow{o_1o}'$ е скоростта $\vec{v}^0$ на точката o спрямо същата система и най-сетне $\overrightarrow{oP}'$ е скоростта на P спрямо осите $ox_1' y_1' z_1'$.

Тази последна скорост на P е геометричната сума от релативната скорост $\vec{v}_r^p$ на P спрямо осите $oxyz$, разгледани като постоянни, и от преносната скорост $\vec{\Omega} \times \overrightarrow{oP}$ на точката P (разгледана като неизменно свързана с $oxyz$) вследствие въртенето на осите $oxyz$ с ъгълна скорост $\vec{\Omega}$ спрямо осите $ox_1' y_1' z_1'$. Тогава

$$\vec{v}_a^p = \vec{v}_r^p + \vec{v}^0 + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{oP} = \vec{v}_r^p + \vec{v}_e^p,$$

гдето $\vec{v}_e^p = \vec{v}^0 + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{oP}$ е преносната скорост на P спрямо осите $o_1 x_1 y_1 z_1$. Абсолютната полукинетична енергия на точката P спрямо осите $o_1 x_1 y_1 z_1$

$$(1) \qquad \frac{1}{2} T = \frac{1}{4} m \vec{v}_a^{p^2} = \frac{1}{4} m (\vec{v}_r^p + \vec{v}^0 + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{oP})^2.$$

Релативните координати x, y, z на P спрямо $oxyz$ ще играят ролята на величините q_1, q_2, q_3, които се съдържат в уравненията (I) на $n^0 1$.

Да диференцираме (1) спрямо координатната система $oxyz$, разгледана като постоянна. Имаме

$$\frac{1}{2}\dot{T}=\frac{m}{2}(\vec{v}_r^p+\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})(\vec{a}_r^p+\dot{\vec{v}}^0+\dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{oP}+\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^p),$$

$$\frac{1}{2}\ddot{T}=\frac{m}{2}(\vec{a}_r^p+\dot{\vec{v}}^0+\dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{oP}+\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^p)^2+\frac{m}{2}(\vec{v}_r^p+\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})(\vec{\Omega}\times\vec{a}_r^p)+\cdots$$

или

$$(2)\quad \frac{1}{2}\ddot{T}=\frac{m}{2}(\vec{a}_r^p+\dot{\vec{v}}^0+\dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{oP}+\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^0)^2+\frac{m}{2}\vec{a}_r^p.[(\vec{v}_r^p+\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})\times\vec{\Omega}]+\cdots$$

като не сме написали членовете, които не съдържат вторите производни на координатите x, y, z на точката P. Тези производни се съдържат в релативното ускорение $\vec{a}_r^p$ на P:

$$\vec{a}_r^p=\dot{\vec{v}}_r^p=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}.$$

Ако $\vec{F}$ е дадената сила, приложена на точката P, то

$$\delta\tau=\vec{F}.\delta\overrightarrow{oP}+\frac{3}{2}\delta T.$$

Понеже T се разглежда като функция само на x, y, z и t, т. е. при фиксирани скорости, то

$$(3)\qquad \delta\tau=\vec{F}\,\delta\overrightarrow{oP}+\frac{3}{2}m(\vec{v}_r^p+\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP}).(\vec{\Omega}\times\delta\overrightarrow{oP}),$$

където $\delta\overrightarrow{oP}=\delta x\vec{i}+\delta y\vec{j}+\delta z\vec{k}$.

Въз основа на (2) и (3) диференциалното уравнение на движението на точката P за координатата x:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{x}}=\frac{\partial\,\delta\tau}{\partial\,\delta x},$$

ще бъде

$$m(\vec{a}_r^p+\dot{\vec{v}}^0+\dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{oP}+\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^p).\vec{i}+\frac{m}{2}[(\vec{v}_r^p+\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})\times\vec{\Omega}].\vec{i}$$

$$=\left\{\vec{F}+\frac{3}{2}m[(\vec{v}_r^p+\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})\times\vec{\Omega}]\right\}.\vec{i}$$

и други две аналогични уравнения за координатите y и z.

Прочее векторното диференциално уравнение на движението на точката P относно координатната система $oxyz$ е

$$m(\vec{a}_r^p+\dot{\vec{v}}^0+\dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{oP}+\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^p)=\vec{F}+m[(\vec{v}_r^p+\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})\times\vec{\Omega}]$$

или

$$(4)\qquad m\vec{a}_r^p = \vec{F} - m[\vec{a}^0 + \dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{oP} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP}) - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^p,$$

гдето $\vec{F}$ е дадената сила спрямо координатната система $o_1 x_1 y_1 z_1$,

$$\vec{a}^0 = \dot{\vec{v}}^0 + \vec{\Omega}\times\vec{v}^0$$

е ускорението на точката o спрямо осите $o_1\ x_1 y_1 z_1$, отнесено на осите $oxyz$ и

$$(5)\qquad \begin{cases} \vec{F}_1 = -m[\vec{a}^0 + \dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{oP} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP}), \\ \vec{F}_2 = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^p \end{cases}$$

са две фиктивни сили — преносната инерчна сила и центробежната съставна сила, които трябва да прибавим към дадената сила, за да можем да третираме релативното движение спрямо $oxyz$ като абсолютно, т. е. за да можем да разглеждаме осите $oxyz$ като постоянни.

Изразът в средната скоба на (5) е преносното ускорение на точката P спрямо координатната система $o_1 x_1 y_1 z_1$, което се получава, като диференцираме спрямо тази координатна система равенството

$$\vec{v}_e^p = \vec{v}^0 + \vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP},$$

считайки, че векторът $\overrightarrow{oP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ е неизменно свързан с осите $oxyz$, т. е. че x, y, z са постоянни. И наистина имаме

$$\vec{a}_e^p = \dot{\vec{v}}^0 + \vec{\Omega}\times\vec{v}^0 + \dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{oP} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP}),$$

понеже производната на вектора $\vec{\Omega}$ спрямо $ox_1'\ y_1'\ z_1'$ е равна на производната $\dot{\vec{\Omega}}$ на $\vec{\Omega}$ спрямо $oxyz$, тъй като $\vec{\Omega}\times\vec{\Omega} = 0$, и производната $\dot{\overrightarrow{oP}}$ на $\overrightarrow{oP}$ спрямо осите $oxyz$ е равна на нула.

Забележка. Ако $\vec{a}_a^p$ е абсолютното ускорение на точката P, то $F = m\vec{a}_a^p$ и от равенството (4) намираме

$$\vec{a}_a^p = \vec{a}_r^p + [\dot{\vec{v}}^0 + \vec{\Omega}\times\vec{v}^0 + \dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{oP} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})] + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^p\cdot$$

Това равенство изразява теоремата на Кориолис. Както е известно, то се получава, като се търси абсолютната скорост $\vec{a}_a^p$ на точката $\vec{v}_a^p$. Тази скорост е геометричната сума от нейната релативна скорост спрямо осите $oxyz$ и от нейната преносна скорост следствие движението на тези оси с ротационен вектор $\vec{\Omega}$ спрямо осите $ox_1'y_1'z_1'$:

$$\vec{a}_a^p = \frac{d}{dt}(\vec{v}_a^p) + \vec{\Omega}\times\vec{v}_a^p = (\vec{a}_r^p + \dot{\vec{v}}^0 + \dot{\vec{\Omega}}\times\overrightarrow{oP} + \vec{\Omega}\times v_r^p) + \vec{\Omega}\times(\vec{v}_r^p + \vec{v}^0 + \vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP}).$$

3. Релативно движение на свободно твърдо тяло. Нека намерим диференциалните уравнения на релативното движение на свободно твърдо тяло относно подвижната координатна система $oxyz$, движението на която спрямо постоянната координатна система $o_1 x_1 y_1 z_1$ е определено с ротацията $\vec{\Omega}$ и транслацията $\vec{v}^0$; векторите $\vec{v}^0$ и $\vec{\Omega}$, отнесени на $oxyz$, са дадени функции на времето t.

Ако $GXYZ$ е правоъгълен триедър, неизменно свързан с тялото, то движението на тялото спрямо осите $oxyz$ е напълно определено с шестте параметъра: трите координати ξ, η, ζ на центъра на тежестта G на тялото и трите Ойлерови ъгли θ, φ, ψ между осите $GXYZ$ и $Gx'y'z'$; осите Gx', Gy', Gz' са съответно успоредни на осите ox, oy, oz. Тези шест величини са обобщените координати на тялото; те определят и движението на тялото спрямо постоянните оси $o_1x_1y_1z_1$, понеже е известно движението на осите $oxyz$ спрямо осите $o_1x_1y_1z_1$.

Ние видяхме по-горе, че скоростта $\vec{v}_a^p$ на точката P от тялото спрямо постоянната координатна система се дава с равенството

$$\vec{v}_a^p = \vec{v}_r^p + \vec{v}^0 + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{oP}; \tag{1}$$

$\vec{v}_r^p$ е релативната скорост на P спрямо осите $oxyz$.

От чертеж 1 се вижда, че

$$\overrightarrow{oP} = \overrightarrow{oG} + \overrightarrow{GP}. \tag{2}$$

Диференцираме спрямо $oxyz$; получаваме

$$\dot{\overrightarrow{oP}} = \dot{\overrightarrow{oG}} + \dot{\overrightarrow{GP}},$$

т. е.

$$\vec{v}_r^p = \vec{v}_r^G + \vec{W}_r^P, \tag{3}$$

гдето $\vec{v}_r^G$ е релативната скорост на G относно $oxyz$, $\vec{W}_r^p$ е скоростта на точката P от тялото спрямо осите $Gx'y'z'$, успоредни на $oxyz$. Но движението на тялото спрямо $Gx'y'z'$ е ротация около ос, минаваща през G, определена с релативния ротационен вектор $\vec{\omega}$; тогава

$$\vec{W}_r^p = \vec{\omega} \times \overrightarrow{GP}$$

и от (3) имаме

$$\vec{v}_r^p = \vec{v}_r^G + \vec{\omega} \times \overrightarrow{GP}. \tag{4}$$

Въз основа на (2) и (4) от (1) получаваме

$$\vec{v}_a^p = (\vec{v}^0 + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{oG} + \vec{v}_r^G) + [(\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \times \overrightarrow{GP}]$$

и абсолютната полукинетична енергия на тялото спрямо осите $o_1 x_1 y_1 z_1$ се дава с равенството

$$\frac{1}{2} T = \frac{1}{4} \Sigma m \vec{v}_a^{p^2} = \frac{1}{4} \Sigma m (\vec{v}^0 + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{oG} + \vec{v}_r^G)^2 + \frac{1}{4} \Sigma m [(\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \times \overrightarrow{GP}]^2$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma m(\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oG}\quad\vec{v}_r^G)[(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\times\overrightarrow{GP}],$$

гдето последният член е равен на нула, понеже $\Sigma m\overrightarrow{GP}=0$. Ако означим с M масата на тялото, то

$$\frac{1}{2}T=\frac{1}{4}M(\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oG}+\vec{v}_r^G)^2+\frac{1}{4}\Sigma m[(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\times\overrightarrow{GP}]^2$$

$$=\frac{1}{2}T_G+\frac{1}{2}T_1, \tag{5}$$

$\frac{1}{2}T_G$ е полукинетичната енергия спрямо $o_1x_1y_1z_1$ на цялата маса на тялото, концентрирана в G, а $\frac{1}{2}T_1$ е полукинетичната енергия на тялото спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$ успоредни на осите $o_1x_1y_1z_1$.

За да намерим движението на едно свободно твърдо тяло спрямо постоянните оси $o_1x_1y_1z_1$, достатъчно е да познаваме движението на една точка от тялото, например на центъра на тежестта G, спрямо осите $o_1x_1y_1z_1$, сетне движението на тялото спрямо осите $Gx_1'\,y_1'\,z_1'$, успоредни на осите $o_1x_1y_1z_1$, или както се казва, движението на тялото около центъра на тежестта.

Движението на точката G спрямо $o_1x_1y_1z_1$ о т н а с я м е н а п о д в и ж н а т а к о о р д и н а т н а с и с т е м а $oxyz$; това значи, че трябва да вземем аналитичните изрази на всички вектори, фигуриращи в $\frac{1}{2}T_G$, спрямо осите $oxyz$.

Като следваме метода, изложен в $n^\circ 2$, векторното диференциално уравнение на движението на центъра на тежестта G на тялото е

$$M\vec{a}_r^G=\Sigma\vec{F}-M[(\vec{a}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oG}+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oG})]-2M\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^G$$

$$=\Sigma\vec{F}+\vec{R}_1+\vec{R}_2,$$

гдето $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ са транслационните резултанти за точката G на фиктивните сили, приложени в точките P от твърдото тяло. И наистина имаме

$$\Sigma\vec{F}_1=-\Sigma m[\vec{a}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP}+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})],$$

$$\Sigma F_2=-2\Sigma m(\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^P).$$

Но

$$\overrightarrow{oP}=\overrightarrow{oG}+\overrightarrow{GP},\ \Sigma m\overrightarrow{oP}=M\overrightarrow{oG}+\Sigma m\overrightarrow{GP}=M\overrightarrow{oG},$$

понеже $\Sigma m\overrightarrow{GP}=0$; сетне от (4)

$$\vec{v}_r^P=\vec{v}_r^G+\vec{\omega}\times\overrightarrow{GP},\ \Sigma m\vec{v}_r^P=M\vec{v}_r^G.$$

Тогава

$$\Sigma \vec{F}_1 = -M[\vec{a}^0 + \vec{\Omega}\times\overrightarrow{oG} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oG})] = \vec{R}_1,$$

$$\Sigma \vec{F}_2 = -2M(\vec{\Omega}\times\vec{v}_r^G) = \vec{R}_2.$$

Нека сега намерим диференциалните уравнения на движението на тялото спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$. От израза $\frac{1}{2}T_1$ на полукинетичната енергия на тялото относно тези оси се вижда, че движението на тялото (или на осите $GXYZ$, свързани с него) спрямо $Gx_1'y_1'z_1'$ се определя от абсолютния ротационен вектор $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$, който е геометричната сума от вектора $\vec{\omega}$, който определя релативното движение на тялото относно осите $Gx'y'z'$, и от вектора $\vec{\Omega}$, който определя неговото преносно движение следствие движението на осите $Gx'y'z'$ спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$.

Ние ще отнесем движението на тялото спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$ на осите $GXYZ$, свързани с него; тогава релативната ротация на тялото относно тези оси е равна на нула и абсолютната му ротация $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$ е равна на преносната ротация $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$ на осите $GXYZ$ (или на тялото) спрямо осите $Gx_1y_1'z_1'$. Ако $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ са единичните вектори на осите GX GY, GZ, то аналитичният израз на вектора $\vec{\omega}$ спрямо осите $GXYZ$ се дава с равенството

$$\vec{\omega} = p\vec{I} + q\vec{J} + r\vec{K},$$

гдето

$$(6)\qquad \begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r = \dot{\psi}\cos\dot{\theta} + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Нека

$$\vec{\Omega} = P_1\vec{i} + P_2\vec{j} + P_3\vec{k}$$

е аналитичният израз на вектора $\vec{\Omega}$ спрямо осите $Gx'y'z'$, успоредни на осите $oxyz$; P_1, P_2, P_3 са дадени функции на времето t. Понеже отнесохме движението на тялото на осите $GXYZ$, то аналитичният израз на $\vec{\Omega}$ спрямо тези оси да бъде

$$(7)\qquad \vec{\Omega} = P\vec{I} + Q\vec{J} + R\vec{K},$$

гдето неизвестните P, Q, R се дават с равенствата

$$P = \vec{\Omega}.\vec{I} = P_1\cos(\vec{I}.\vec{i}) + P_2\cos(\vec{I}.\vec{j}) + P_3\cos(\vec{I}.\vec{k}),$$

$$(8)\qquad Q = \vec{\Omega}.\vec{J} = P_1\cos(\vec{J}.\vec{i}) + P_2\cos(\vec{J}.\vec{j}) + P_3\cos(\vec{J}.\vec{k}),$$

$$R=\Omega.\vec{K}=P_1\cos(\vec{K}.\vec{i})+P_2\cos(\vec{K}.\vec{j})+P_3\cos(\vec{K},\vec{k}),$$

в които съгласно познатите формули от аналитичната геометрия

$$\cos(\vec{I}.\vec{i})=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta,$$

$$\cos(\vec{I}.\vec{j})=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta,$$

$$\cos(\vec{I}.\vec{k})=\sin\varphi\sin\theta,$$

(9) $$\cos(\vec{J}.\vec{i})=-\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta,$$

$$\cos(\vec{J}.\vec{j})=-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta,$$

$$\cos(\vec{J}.\vec{k})=\cos\varphi\sin\theta,$$

$$\cos(\vec{K}.\vec{i})=\sin\psi\ \sin\theta,\ \cos(\vec{K}.\vec{j})=-\cos\psi\sin\theta,\cos(\vec{K}.\vec{k})=\cos\theta.$$

Нека осите GX, GY, GZ са главни инерчни оси; тогава абсолютната полукинетична енергия $\frac{1}{2}T_1$ на тялото спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$ се дава с равенството

(10) $$\frac{1}{2}T_1=\frac{1}{4}[A(p+P)^2+B(q+Q)^2+C(r+R)^2].$$

Диференцираме спрямо осите $GXYZ$; получаваме

$$\frac{1}{2}\ddot{T}_1=\frac{1}{2}[A(\dot{p}+\dot{P})^2+B(\dot{q}+\dot{Q})^2+C(\dot{r}+\dot{R})^2]$$

(11) $$+A(p+P)(p+\ddot{P})+B(q+Q)(q+\ddot{Q})+C(r+R)(r+\ddot{R})].$$

Съгласно уравненията (I) в $n^0 1$ диференциалното уравнение на движението за обобщената координата φ е

(12) $$\frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}_1}{\partial\ddot{\varphi}}=\frac{\partial\delta\tau}{\partial\delta\varphi}$$

За да намерим това уравнение, ние ще изчислим частта от функцията $\frac{1}{2}\ddot{T}_1$, която зависи само от φ, и от функцията $\delta\tau$ — само частта, която зависи от $\delta\varphi$. От (6) имаме

$$\dot{p}=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi.\dot{\varphi}-\dot{\theta}\sin\varphi.\dot{\varphi}+\cdots=q\dot{\varphi}+\cdots,$$

$$\dot{q}=-\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi.\dot{\varphi}-\dot{\theta}\cos\varphi.\dot{\varphi}+\cdots=-p\dot{\varphi}+\cdots,\dot{r}=\varphi+$$

отгдето

(13) $$\delta p=q\,\delta\varphi+\cdots,\ \delta q=-p\,\delta\varphi+\cdots,\ \delta r=\cdots$$

(14) $$p=q\varphi+\cdots,\ q=-p\varphi+\cdots,\ r=$$

Като държим сметка на (9), от (8) получаваме

$$\dot{P}=[P_1\cos(\vec{J}.\vec{i})+P_2\cos(\vec{J}.\vec{j})+P_3\cos(\vec{J}.\vec{k})]\dot{\varphi}=Q\dot{\varphi}+$$

$$\dot{Q}=-[P_1\cos(\vec{I}.\vec{i})+P_2\cos(\vec{I}.\vec{j})+P_3\cos(\vec{I}.\vec{k})]\dot{\varphi}=-P\dot{\varphi}+\cdots,\ \dot{R}=\cdots$$

отгдето

(15) $$\delta P=Q\delta\varphi+\cdots,\ \delta Q=-P\delta\varphi+\cdots,\ \delta R=\cdots,$$

(6) $$\ddot{P}=Q\varphi+\cdots,\ \ddot{Q}=-P\varphi+\cdots,\ \ddot{R}=\cdots$$

От (11) съгласно (14) и (16) получаваме

(A) $$\frac{1}{2}\ddot{T}_1=\frac{1}{2}[C(\dot{r}+\dot{R})^2+(A-B)(p+P)(q+Q)\ddot{\varphi}]+\cdots,\ \dot{r}=\varphi+\cdots$$

Като вземем пред вид (10), (13) и (15), за търсената част от $\delta\tau$ намираме

(B) $$\delta\tau=N\delta\varphi+\frac{3}{2}(A-B)(p+P)(q+Q)\delta\varphi+\cdots$$

и уравнението (12) за обобщената координата φ е

$$C(\dot{r}+\dot{R})+(B-A)(p+P)(q+Q)=N$$

или

(17) $$C\dot{r}+(B-A)pq=N+[-C\dot{R}-(B-A)(pQ+qP+PQ)].$$

Другите две уравнения на движението за обобщените координати ψ и θ ще се получат, като се изчислят напълно функцията $\frac{1}{2}\ddot{T}_1$ в зависимост и от $\ddot{\psi}$ и $\ddot{\theta}$ и функцията $\delta\tau$ в зависимост и от $\delta\psi$ и $\delta\theta$. Но изчислението е доста комплицирано. Вземайки пред вид, че в полученото уравнение за φ величините p, q, r, P, Q, R, A, B, C играят една и съща роля във въпроса и че освен това уравнението за φ не съдържа явно ъглите φ, ψ, θ, казаното изчисление е безполезно. Вследствие на това чрез циклична замяна на величините ние можем да напишем другите две уравнения:

(18) $$\begin{cases} A\dot{p}+(C-B)qr=L+[-A\dot{P}-(C-B)(qR+rQ+QR)], \\ B\dot{q}+(A-C)rp=M+[-B\dot{Q}-[A-C)(rP+pR+RP)]. \end{cases}$$

Величините $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, $\dot{P}$, $\dot{Q}$, $\dot{R}$ са пълните производни спрямо времето t съответно на p, q, r, P, Q, R.

Уравненията (17) и (18) са диференциалните уравнения на движението на тялото спрямо осите $Gx'y'z'$, разгледани като постоянни, когато движението е отнесено на свързаните с тялото оси $GXYZ$.

Забележка I. Уравнението (17) може да се получи и от трансформираните уравнения (III) на $n^\circ 1$, като уравненията (4′) в този n° са уравненията (6) в сегашния n°, разрешени спрямо $\dot\theta, \dot\psi, \dot\varphi$:

$$\dot\theta = \dot\mu_1 \cos\varphi - \dot\mu_2 \sin\varphi,$$

$$\sin\theta \,.\, \dot\psi = \dot\mu_1 \sin\varphi + \dot\mu_2 \cos\varphi,$$

$$\dot\varphi = \dot\mu_3 - \operatorname{cotg}\theta\,(\dot\mu_1 \sin\varphi + \dot\mu_2 \cos\varphi)\cdot$$

Механичното тълкуване на величините $\dot\mu_1, \dot\mu_2, \dot\mu_3$ е следното. При релативното движение на тялото (или на осите $GXYZ$) спрямо осите $Gx'y'z'$ нека $d\mu_1, d\mu_2, d\mu_3$ са елементарните ъгли, на които трябва да завъртим тялото около осите GX, GY, GZ, за да го доведем от едно положение в друго безкрайно близко положение. Тогава релативният ротационен вектор $\vec\omega$ се заменя с ъгловата скорост

$$\frac{d\mu}{dt} = \dot{\vec\mu} = \dot\mu_1 \vec I + \dot\mu_2 \vec J + \dot\mu_3 \vec K, \quad \vec\omega = \dot{\vec\mu};$$

оттук получаваме равенствата

$$p = \dot\mu_1, \quad q = \dot\mu_2, \quad r = \dot\mu_3,$$

които изразяват, че алгебричните проекции p, q, r на релативния ротационен вектор $\vec\omega$ върху осите GX, GY, GZ са равни съответно на ъгловите скорости $\dot\mu_1, \dot\mu_2, \dot\mu_3$, нанесени върху тези оси. Ъглите μ_1, μ_2, μ_3 може да се разглеждат като обобщени координати, т. е. да заместват обобщените координати φ, ψ, θ.

Ние ще намерим трансформираното уравнение за μ_3. Понеже $\ddot\varphi = \ddot\mu_3 + \cdots$, $\delta\varphi = \delta\mu_3 \ldots$, то равенствата (A) и (B) в този n^0 приемат формата

$$\frac{1}{2} T_1 = \frac{1}{2} C(\ddot\mu_3 + \dot R) + \frac{1}{2}(A - B)(p \quad P)\ (q + Q)\mu_3 +$$

$$\delta\tau = N\delta\mu_3 + \frac{3}{2}(A - B)(p + P)\ (q + Q)\,\delta\mu_3 + \cdots$$

Въз основа на тези равенства в трансформираното уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \dddot T_1}{\partial \ddot\mu_3} = \frac{\partial\,\delta\tau}{\partial\mu_3} \quad \text{или} \quad C(\ddot\mu_3 + \dot R) + (B - A)(pQ + qP + PQ) = N$$

заместваме μ_3 с $\dot r$ и получаваме уравнението (17). Другите две диференциални уравнения на движението се получават, както по-горе, чрез циклична замяна на величините.

Забележка II. Ние ще покажем, че изразите, заградени със средни скоби в десните части на уравненията (17) и (18), представляват сумата от моментите на фиктивните сили, приложени на точките P от тялото относно осите GX, GY, GZ.

Като вземем пред вид, че $\vec{oP} = \vec{oG} + \vec{GP}$ и $\Sigma m\vec{GP} = 0$, то за резултантният момент на преносните инерчни сили за точката G имаме

$$\Sigma(\vec{GP} \times \vec{F_1}) = -\Sigma m\vec{GP} \times \{\vec{a^0} + \vec{\Omega'} \quad (\vec{oG} + \vec{GP}) +$$

$$+ \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times (\vec{oG} + \vec{GP})]\}$$

$$= -\Sigma m\vec{GP} \times (\vec{\Omega'} \quad \vec{GP}) - \Sigma m\vec{GP} \times [\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{GP})]$$

$$-\vec{\Omega'}\, \Sigma m\vec{GP}^2 + \Sigma m\vec{GP}(\vec{\Omega'} . \vec{GP}) - \Sigma m(\vec{GP} \times \vec{\Omega})(\vec{\Omega} . \vec{GP}).$$

Тук векторът $\vec{\Omega'}$ е производната на вектора $\vec{\Omega} = P\vec{I} + Q\vec{J} + R\vec{K}$ спрямо осите $Gx'y'z'$, успоредни на $oxyz$:

$$\vec{\Omega'} = \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\omega} \times \vec{\Omega}.$$

Тогава

$$\Sigma (\vec{GP} \times F_1) = \{-(\dot{P} + qR - rQ)\, \Sigma m\, (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$+ \Sigma mx\, [(\dot{p} + qR - rQ)x]$$

$$-\Sigma m\, (yR - zQ)\, (Px + Qy + Rz)\}\, \vec{I} + \{\ldots\}\, \vec{J} + \{\ldots\}\, \vec{K}$$

$$= [-A\, (\dot{P} + qR - rQ) - (C - B)\, QR]\, \vec{I} + \{\ldots\}\, \vec{J} + \{\ldots\}\, \vec{K}.$$

За резултантния момент на центробежните съставни сили за точката G получаваме

$$\Sigma (\vec{GP} \times \vec{F_2}) = -2\, \Sigma m\, [\vec{GP} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v_r^P})]$$

$$= -2\, \vec{\Omega}\, \Sigma m\, (\vec{GP} . \vec{v_r^P}) + 2\, \Sigma m\vec{v_r^P}\, (\vec{\Omega} . \vec{GP}).$$

Но съгласно (3) $\vec{v_r^P} = \vec{v_r^G} + \vec{\omega} \times \vec{GP}$, тогава

$$\Sigma (\vec{GP} \times \vec{F_2}) = 2\Sigma m\, (\vec{\omega} \times \vec{GP})\, (\vec{\Omega} . \vec{GP})$$

$$= 2\, \Sigma m\, (qz - ry)(Px + y + Rz)\, \vec{I} + (\ldots)\, \vec{J} + (\ldots)\, \vec{K}$$

$$= 2\, (qR\, \Sigma mz^2 - rQ\, \Sigma my^2)\, \vec{I} + (\ldots)\, \vec{J} + (\ldots)\, \vec{K}.$$

Сумата от моментите на фиктивните сили например спрямо оста GX е равна на

$$-A\dot{P} - \Sigma m\, (y^2 + z^2 - 2z^2)\, qR + \Sigma m\, (y^2 + z^2 - 2y^2)\, rQ - QR\, (C - B)$$

$$= -A\dot{P} - (C-B)(qR + rQ + QR),$$

което искахме да докажем.

Друг начин за намиране уравненията на движението чрез смяна на обобщените координати. По-горе ние диференцирахме функцията $\frac{1}{2} T_1$ спрямо осите $GXYZ$; нека сега диференцираме $\frac{1}{2} T_1$ спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$, успоредни на постоянните оси $o_1x_1y_1z_1$, като производните на величините спрямо тези оси ще означаваме с „$'$" или „$\frac{d'}{dt}$" и вариациите — с „δ'". Производните на функцията $\frac{1}{2} T_1$, дадена с (10), са

$$\frac{1}{2} T_1' = \frac{1}{2}[A(p+P)(p'+P') + B(q+Q)(q'+Q')$$
$$+ C(r+R)(r'+R')],$$

$$\frac{1}{2} T_1'' = \frac{1}{2}[A(p'+P')^2 + B(q'+Q')^2 + C(r'+R')^2]$$

$$+\frac{1}{2}[A(p+P)(p''+P'') + B(q+Q)(q''+Q'') + C(r+R)(r''+R'')],$$

гдето неизвестните $p'+P'$ $q'+Q'$, $r'+R'$ и $p''+P''$,$q''+Q''$, $r''+R''$ са алгебричните проекции върху осите $GXYZ$ съответно на производните $\vec{\omega}'+\vec{\Omega}'$ и $\vec{\omega}''+\vec{\Omega}''$ на вектора $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$ спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$:

$$(19) \qquad \begin{cases} \vec{\omega}'+\vec{\Omega}' = (p'+P')\vec{I} + (q'+Q')\vec{J} + (r'+R')\vec{K}, \\ \vec{\omega}''+\vec{\Omega}'' = (p''+P'')\vec{I} + (q''+Q'')\vec{J} + (r''+R'')\vec{K}. \end{cases}$$

От друга страна, за тези производни получаваме

$$\vec{\omega}'+\vec{\Omega}' = \dot{\vec{\omega}} + \dot{\vec{\Omega}} + (\vec{\omega}+\vec{\Omega})\times(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) = \dot{\vec{\omega}} + \dot{\vec{\Omega}},$$

$$\vec{\omega}''+\vec{\Omega}'' = \ddot{\vec{\omega}} + \ddot{\vec{\Omega}} + (\vec{\omega}+\vec{\Omega})\times(\dot{\vec{\omega}}+\dot{\vec{\Omega}}).$$

От последните две равенства и (19) следва

$$p'+P' = \dot{p}+\dot{P},\ q'+Q' = \dot{q}+\dot{Q},\ r'+R' = \dot{r}+\dot{R},$$

$$p''+P'' = \ddot{p}+\ddot{P} + (q+Q)(\dot{r}+\dot{R}) - (r+R)(\dot{q}+\dot{Q}),$$

$$q''+Q'' = \qquad r''+R'' = \cdots$$

и функцията $\frac{1}{2}\ddot{T}_1$ се дава с уравнението

$$\frac{1}{2} T_1'' = \frac{1}{2}[A(\dot{p}+\dot{P})^2 + B(\dot{q}+\dot{Q})^2 + C(\dot{r}+\dot{R})^2]$$

$$\frac{1}{2}[A(p+P)(\ddot{p}+\ddot{P})+B(q+Q)(\ddot{q}+\ddot{Q})+C(r\quad R)(\ddot{r}+\ddot{R})$$

$$+(B-C)(q+Q)(r+R)(\dot{p}+\dot{P})+(C-A)(r+R)(p+P)(\dot{q}+\dot{Q})+$$

$$+(A-B)(p+P)(q+Q)(\dot{r}+\dot{R})]\cdot$$

При движението на тялото или на осите $GXYZ$ спрямо осите $Gx'_1y'_1z'_1$ нека $d\nu_1$, $d\nu_2$, $d\nu_3$ са елементарните ъгли, на които трябва да завъртим тялото около осите GX, GY, GZ, за да го доведем до едно положение в друго, безкрайно близко положение. Тогава ние можем да вземем за обобщени координати на тялото ъглите ν_1, ν_2, ν_3 вместо ъглите φ, ψ, θ и да заменим абсолютния ротационен вектор $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$ с ъгловата скорост

$$\frac{d\vec{\nu}}{dt}=\dot{\vec{\nu}}=\dot{\nu}_1\vec{I}+\dot{\nu}_2\vec{J}+\dot{\nu}_3\vec{K},$$

така че

(20) $$p+P=\dot{\nu}_1,\quad q\quad Q=\dot{\nu}_2,\quad r+R=\dot{\nu}_3$$

и функцията $\frac{1}{2}T''_1$ приема вида

$$\frac{1}{2}T''_1=\frac{1}{2}(A\ddot{\nu}_1^2+B\ddot{\nu}_2^2+C\ddot{\nu}_3^2)+\frac{1}{2}[(B-C)\dot{\nu}_2\dot{\nu}_3\nu_1+$$

(21) $$+(C-A)\dot{\nu}_3\dot{\nu}_1\nu_2+(A-B)\dot{\nu}_1\dot{\nu}_2\ddot{\nu}_3],$$

като изпускаме израза $A\dot{\nu}_1\dddot{\nu}_1+B\ddot{\nu}_2\dddot{\nu}_2+C\dot{\nu}_3\dddot{\nu}_3$, понеже не зависи от вторите производни $\ddot{\nu}_1$, $\ddot{\nu}_2$, $\ddot{\nu}_3$ на обобщените координати ν_1, ν_2, ν_3.

Да изчислим сега функцията $\delta'\tau$, като заменим вектора $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$ с ъгловата скорост $\dot{\nu}$. Ако P е точката от тялото и $\vec{F}$ е приложената ѝ дадена сила, то виртуалната работа на дадените сили е

$$\Sigma\vec{F}.\delta\overrightarrow{GP}=\Sigma\vec{F}.(\delta\vec{\nu}\times\overrightarrow{GP})=\Sigma(\overrightarrow{GP}\times\vec{F}).\delta\vec{\nu}=L\delta\nu_1+M\delta\nu_2+N\delta\nu_3,$$

гдето L, M, N са сумата от моментите на тия сили относно осите GX, GY, GZ. Виртуалната работа на силите, произхождащи от функцията на сили

$$\frac{3}{2}T_1=\frac{3}{2}(A\dot{\nu}_1^2+B\dot{\nu}_2^2+C\dot{\nu}_3^2),$$

е равна на вариацията на тази функция спрямо осите $Gx'_1y'_1z'_1$*

* Вариацията на функцията $\frac{3}{2}T_1$ спрямо осите $GXYZ$ е равна на нула, понеже функцията $\frac{3}{2}T_1$ се разглежда с постоянни обобщени скорости $\dot{\nu}_1$, $\dot{\nu}_2$, $\dot{\nu}_3$ и следователно $\delta\dot{\nu}_1=0$, $\delta\dot{\nu}_2=0$, $\delta\dot{\nu}_3=0$.

$$\frac{3}{2}\delta' T_1 = \frac{3}{2}(A\dot{\nu}_1\delta'\dot{\nu}_1 + B\dot{\nu}_2\delta'\dot{\nu}_2 + C\dot{\nu}_3\delta'\dot{\nu}_3)$$

$$(22) \qquad = \frac{3}{2}(A\dot{\nu}_1\delta\nu_1' + B\dot{\nu}_2\delta\nu_2' + C\dot{\nu}_3\delta\nu_3'),$$

гдето неизвестните $\delta\nu_1'$, $\delta\nu_2'$, $\delta\nu_3'$ са алгебричните проекции върху осите $GXYZ$ на вариацията на производната $\vec{\nu}' = \frac{d'\vec{\nu}}{dt}$ на вектора $\vec{\nu} = \nu_1\vec{I} + \nu_2\vec{J} + \nu_3 K$ спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$:

$$\overrightarrow{\delta\nu'} = \delta\nu_1'\vec{I} + \delta\nu_2'\vec{J} + \delta\nu_3' K.$$

От друга страна, тази вариация се дава с равенството

$$\overrightarrow{\delta\nu'} = \delta(\dot{\vec{\nu}} + \dot{\vec{\nu}} \times \vec{\nu}) = \vec{\nu}' \times \delta\nu$$

$$= (\dot{\nu}_2\delta\nu_1 - \dot{\nu}_3\delta\nu_2)\vec{J} + (\dot{\nu}_3\delta\nu_1 - \dot{\nu}_1\delta\nu_3)\vec{y} + (\dot{\nu}_1\delta\nu_2 - \dot{\nu}_2\delta\nu_1)\vec{K},$$

понеже спрямо осите $GXYZ$ $\delta\dot{\vec{\nu}} = \delta(\dot{\nu}_1\vec{J} + \dot{\nu}_2\vec{y} + \dot{\nu}_3\vec{K}) = 0$. От двата израза на $\overrightarrow{\delta\nu'}$ получаваме

$$\delta\nu_1' = \dot{\nu}_2\delta\nu_3 - \dot{\nu}_3\delta\nu_2, \quad \delta\nu_2' = \dot{\nu}_3\delta\nu_1 - \dot{\nu}_1\delta\nu_3, \quad \delta\nu_3' = \dot{\nu}_1\delta\nu_2 - \dot{\nu}_2\delta\nu_1.$$

Стойностите на $\delta\nu_1'$, $\delta\nu_2'$, $\delta\nu'$ поставяме в (22) и за търсената функция $\delta'\tau$ получаваме

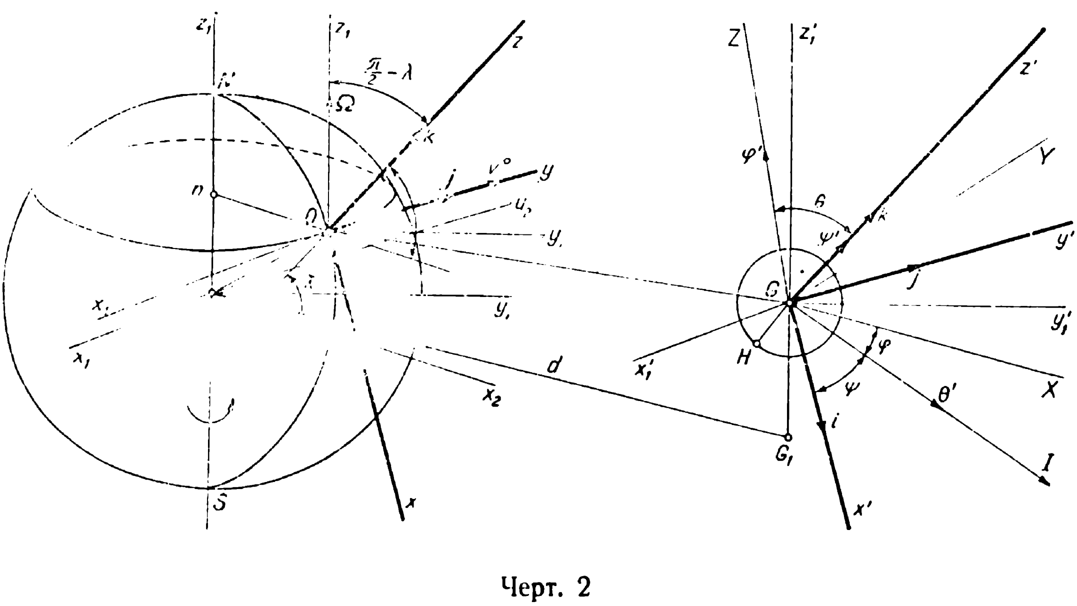
$$(23) \qquad \begin{aligned} \delta'\tau = L\delta\nu_1 + M\delta\nu_2 + N\delta\nu_3 + \frac{3}{2}[(B-C)\dot{\nu}_2\dot{\nu}_3\delta\nu_1 \\ + (C-A)\dot{\nu}_3\nu_1\delta\nu_2 + (A-B)\dot{\nu}_1\dot{\nu}_2\delta\nu_3]. \end{aligned}$$

Въз основа на (22) и (23) от уравненията на движението (I) в n^0 1 получаваме намерените по-горе уравнения (18) и (17).

Забележка III. Ние намерихме диференциалните уравнения на движението на свободно твърдо тяло, като отнесохме движението на G спрямо осите $o_1x_1y_1z_1$ на осите $oxyz$, а движението на тялото спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$ — на осите $GXYZ$, свързани с тялото. Ако движението на тялото около G отнесем на осите $Gx'y'z'$, успоредни на осите $oxyz$, то инерчните моменти на тялото спрямо осите Gx', Gy', Gz' ще бъдат променливи величини, понеже тези оси не са свързани с тялото и ще трябва тези инерчни моменти посредством трансформираните формули на координатите да изразим с инерчните моменти спрямо осите GX, GY, GZ. Изчисляването на функцията $\frac{1}{2}\ddot{T}_1$ ще бъде доста комплицирано. Само при случая, когато инерчните моменти на тялото спрямо осите Gx', Gy', Gz' са постоянни величини, ние можем да отнесем движението на тялото около G на осите $Gx'y'z'$. Този случай се представя при движението на сфера върху хоризонтална равнина на земната повърхност, който сега ще разгледаме.

4. Движение на сфера върху хоризонтална равнина на земната повърхнина. Да се намери релативното движение на хомогенна сфера с радиус a, принудена да се движи върху хоризонтална равнина на земната повърхнина, като предполагаме, че земята се върти с постоянна ъглова скорост $\vec{\Omega}$ около оста си, и като допускаме: 1) че теглото, което е резултантата на земното привличане и преносната инерчна сила, е постоянна вертикална сила за всеки елемент от сферата и 2) че привличането е такава сила. Да се разгледат случаите, когато хоризонталната равнина е идеално гладка и идеално грапава.

Нека $o_1x_1y_1z_1$ е постоянна координатна система, на която началото o_1 е центърът на земята и оста o_1z_1' е постоянната земна ос и нека o е точка от земната повърхнина. През точката o прекарваме трите правоъгълни оси ox, oy, oz: първата е допирателна към меридианната крива и насочена към юг, втората — допирателна към паралелата и насочена към изток и третата — по вертикалата и насочена нагоре. Координатната система $oxyz$ е свързана със земята; равнината xoy е хоризонталната равнина, върху която е принудена да се движи сферата: вертикалната ос oz пресича земната ос o_1z_1; равнината xoz е меридианната равнина (черт. 2).



Черт. 2

Ротационният вектор $\vec{\Omega}$ на земята е насочен по земната ос o_1z_1 към север, понеже земята се върти от запад към изток около тази ос. Движението на осите $oxyz$ спрямо осите $o_1x_1y_1z_1$ е определено с ротацията $\vec{\Omega}$ около оста oz_1', успоредна на o_1z_1, и с транслацията $\vec{v}^0$, която е скоростта на точката o. Ако r_0 е радиусът на паралелата през o, на която центърът n е върху оста o_1z_1', и ако $\vec{j}$ е единичният вектор на оста oy, то скоростта $\vec{v}^0$ на точката o вследствие въртенето ѝ около оста o_1z_1 с ъглова скорост $\vec{\Omega}$ се дава от равенството

$$\vec{v}^0 = r_0 \Omega \vec{j}. \tag{1}$$

Нека намерим аналитичния израз на вектора $\vec{\Omega}$, лежащ в меридианната равнина xoz, с директриса оста oz_1'. Географската широчина на даденото място o е ъгълът λ, който образува вертикалната ос oz с екваториалната равнина, перпендикулярна на o_1z_1, т. е. ъгълът λ е ъгълът между oz и успоредната права no на екватора, която права е продължението радиус на паралелата през o и лежи също в меридианната равнина xoz. Тогава векторът $\vec{\Omega}$ сключва с оста oz ъгъл $\frac{\pi}{2}-\lambda$, а с оста ox — ъгъл

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\lambda=\pi-\lambda.$$

Ако $\vec{i}$ и $\vec{k}$ са единичните вектори на осите ox и oz, то

$$\vec{\Omega}=\Omega\vec{k}_1=\Omega(-\cos\lambda\vec{i}+\sin\lambda\vec{k})=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}, \tag{2}$$

гдето $k_1=-\cos\lambda\vec{i}+\sin\lambda\vec{k}$ е единичният вектор на оста oz_1'.

Векторите $\vec{v}^0$ и $\vec{\Omega}$ са постоянни вектори спрямо осите $oxyz$.

Положението на сферата спрямо подвижната координатна система $oxyz$ е определено от релативните координати ξ, η, ζ на центъра на тежестта ѝ G спрямо осите $oxyz$ и от трите Ойлерови ъгли ψ, φ, θ, които определят нейното положение спрямо осите $Gx'y'z'$, успоредни на осите $oxyz$. Третата координата ζ на G е равна на a; уравнението $\zeta=a$ изразява крайната връзка на сферата — да се допира винаги до равнината xoy. Прочее положението на сферата спрямо $oxyz$ е определено с петте координати ξ, η, ψ, φ, θ.

Движението на сферата относно осите $Gx'y'z'$ е релативната ротация $\vec{\omega}$, на която аналитичният израз спрямо тези оси е

$$\vec{\omega}=p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}, \tag{3}$$

гдето (виж [1], стр. 11)

$$\begin{aligned} p &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi, \\ q &= -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi+\dot{\theta}\sin\psi, \\ r &= \dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}. \end{aligned} \tag{4}$$

Осите $Gx'y'z'$ и $oxyz$ имат равни единични вектори, понеже са успоредни.

Кинетичната енергия T на сферата спрямо постоянните оси $o_1x_1y_1z_1$ е сумата от кинетичната енергия T_G спрямо осите $o_1x_1y_1z_1$ на цялата маса M на сферата, концентрирана в центъра на тежестта ѝ:

$$T_G = \frac{1}{2} M\vec{v}_a^{G^2} = \frac{1}{2} M(\vec{v}_r^G + \vec{v}^0 + \vec{\Omega} \times o\vec{G}),$$

и от кинетичната енергия T_1 на сферата за движението ѝ около точката G, т. е. за движението ѝ спрямо осите $Gx'_1y'_1z'_1$, успоредни на осите $o_1x_1y_1z_1$:

$$T_1 = \frac{1}{2} A(\vec{\omega} + \vec{\Omega})^2,$$

гдето A е инерчният момент на сферата спрямо ос, минаваща през G. Тогава абсолютната полукинетична енергия на сферата въз основа на (1), (2), (3) се дава с равенството

$$\frac{1}{2} T = \frac{1}{4} M[(\dot{\xi} - \Omega \sin\lambda\,.\,\eta)^2 + (\dot{\eta} + \Omega \sin\lambda\,.\,\xi + \Omega\cos\lambda\,.\,a + \Omega r_0)^2$$

(5)

$$+ \Omega^2 \cos^2\lambda\,.\,\eta^2] + \frac{1}{4} A[(p+P)^2 + (q+Q)^2 + (r+R)^2],$$

гдето $P = -\Omega\cos\lambda$, $Q = 0$, $R = \Omega\sin\lambda$. Оттук за втората производна на функцията $\frac{1}{2} T$ получаваме

$$\frac{1}{2}\ddot{T} = \frac{1}{2} M[(\ddot{\xi} - \Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\eta})^2 + (\ddot{\eta} + \Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\xi})^2 + (\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\xi} + \Omega^2\eta)\ddot{\eta}$$

(6)

$$+ (\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\eta} + \Omega^2\sin^2\lambda\,.\,\xi + \Omega^2\cos\lambda\sin\lambda\,.\,a + \Omega^2\sin\lambda\,.\,r_0)\ddot{\xi}]$$

$$+ \frac{1}{2} A[(\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2) + (p+P)\ddot{p} + (q+Q)\ddot{q} + (r+R)\ddot{r}] + \cdots$$

Да изчислим частта от функцията $\frac{1}{2}\ddot{T}$, която съдържа само $\ddot{\psi}$. От (4) имаме

$$\dot{p} = (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\dot{\psi} + \cdots = -q\dot{\psi} + \cdots,$$

$$\dot{q} = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\dot{\psi} + \cdots = p\dot{\psi} + \cdots,\ \dot{r} = \ddot{\psi} + \cdots;$$

оттук

$$\ddot{p} = -q\ddot{\psi} + \cdots,\ \ddot{q} = p\ddot{\psi} + \cdots,\ \ddot{r} = \cdots$$

и търсената част от функцията $\frac{1}{2}\ddot{T}$ е

$$\frac{1}{2}[A\ddot{\psi}^2 + A(pQ - qP)\ddot{\psi}].$$

Ние ще намерим диференциалните уравнения на движението на сферата, като приложим трансформираните уравнения (III) в n^0 1. При релативното движение на сферата спрямо осите $Gx'y'z'$ нека $d\mu_1$, $d\mu_2$, $d\mu_3$ са елементарните ъгли, на които трябва да завъртим сферата около осите Gx', Gy', Gz', за да я доведем от едно положение в друго, безкрайно близко положение. Тогава релативната ротация $\vec{\omega}$ се заменя с ъгловата скорост

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt}=\dot{\vec{\mu}}=\dot{\mu}_1\vec{i}+\dot{\mu}_2\vec{j}+\dot{\mu}_3\vec{k};$$

от равенството $\vec{\omega}=\dot{\vec{\mu}}$ въз основа на (3) получаваме

$$p=\dot{\mu}_1,\quad q=\dot{\mu}_2,\quad r=\dot{\mu}_3, \tag{7}$$

гдето $\dot{\mu}_1$, $\dot{\mu}_2$, $\dot{\mu}_3$ са ъгловите скорости, нанесени по осите Gx', Gy', Gz'. Ъглите μ_1, μ_2, μ_3 са обобщените координати вместо ъглите φ, ψ, θ. Уравненията (4) в n^0 1 за случая са уравненията (4) в сегашния n^0.

Понеже $r=\dot{\mu}_3$, то от третото уравнение на (4) имаме $\ddot{\psi}=\ddot{\mu}_3-\ldots$; тогава, ако в частта от функцията $\frac{1}{2}\ddot{T}$, която съдържа само $\ddot{\psi}$, поставим $\ddot{\mu}_3$ вместо $\ddot{\psi}$, то получаваме частта от функцията $\frac{1}{2}\ddot{T}$, която съдържа $\ddot{\mu}_3$:

$$\frac{1}{2}[A\ddot{\mu}_3^2+A(pQ-qP)\ddot{\mu}_3].$$

Другите две части от $\frac{1}{2}\ddot{T}$, които съдържат $\ddot{\mu}_1$ и $\ddot{\mu}_2$, се получават чрез циклична замяна на величините $p, q, r, P, Q, R, \ddot{\mu}_1$, $\ddot{\mu}_2$, $\ddot{\mu}_3$.

Прочее от (6) получаваме функцията

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ddot{T}=\frac{M}{2}&[(\ddot{\xi}-\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\eta})^2+(\ddot{\eta}+\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\xi})^2+(-\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\xi}+\Omega^2\eta)\,\ddot{\eta}\\ &+(\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\eta}+\Omega^2\sin^2\lambda\,.\,\xi+\Omega^2\cos\lambda\,\sin\lambda\,.\,a+\Omega^2\sin\lambda\,.\,r_0)\,\ddot{\xi}]\\ &+\frac{A}{2}[\ddot{\mu}_1^2+\ddot{\mu}_2^2+\ddot{\mu}_3^2+(qR-rQ)\,\ddot{\mu}_1+(rP-pR)\,\ddot{\mu}_2+(pQ-qP)\,\ddot{\mu}_3]+\ldots,\end{aligned} \tag{8}$$

гдето $P=-\Omega\cos\lambda$, $Q=0$, $R=\Omega\sin\lambda$.

I. Хоризонталната равнина хоу е идеално гладка. 1) С л у ч а й, к о г а т о т е г л о т о е п о с т о я н н а с и л а.

Дадените физични сили, действуващи върху сферата, са привличанията A на земята върху различните точки (елементи) от сферата. Когато теглото е постоянна вертикална сила, тези привличания произхождат от функцията на сили (виж [1], стр. 12):

$$U=-Mg\,a-\frac{1}{2}M\,\Omega^2\,[(r_0+\xi\sin\lambda+a\cos\lambda)^2+\eta^2]. \tag{9}$$

Сумата от виртуалните работи на дадените сили и на новите сили, произхождащи от функцията на сили $\frac{3}{2}T$, разгледана като функция само на обобщените координати ξ, η, φ, ψ, θ, се дава с равенството

$$\delta\tau = \delta U + \frac{3}{2}\delta T. \tag{10}$$

Ние ще изчислим частта от функцията $\delta\tau$, която съдържа само $\delta\psi$. От (5) и (4) получаваме

$$\frac{3}{2}\delta T = A[(p+P)\delta p + (q+Q)\delta q + (r+R)\delta r$$

$$= A[(p \quad P)(\quad q\,\delta\psi) + (q+Q)\,p\,\delta\psi] + \cdots = A(pQ - qP)\delta\psi$$

Понеже $r = \mu_3$, то от третото уравнение на (4) получаваме $\delta\psi = \delta\mu_3 \ldots$ и частта от функцията $\frac{3}{2}T$, която съдържа $\delta\mu_3$, е

$$\frac{3}{2}A[(pQ - qP)\delta\mu_3];$$

другите две части от $\frac{3}{2}\delta\bar{T}$, които съдържат само $\delta\mu_1$ и $\delta\mu_2$, се получават чрез циклична замяна на величините.

Прочее, като вземем пред вид (9) и (5), от (10) получаваме

$$\delta\bar{\tau} = \quad M\Omega^2[(r_0 \quad \xi\sin\lambda + a\cos\lambda)(\sin\lambda\,\delta\xi + \eta\,\delta\eta)$$

$$\tag{11} \frac{3}{2}M[(\text{[illegible]} - \dot{\xi}\,\Omega\sin\lambda + \Omega^2\eta)\delta\eta + (\dot{\eta} + \Omega\sin\lambda\,.\,\xi + \Omega\cos\lambda\,.\,a$$

$$+ \Omega r_0)\,\Omega\sin\lambda\,\delta\xi]$$

$$\frac{3}{2}[A(qR - rQ)\delta\mu_1 + (rP - pR)\delta\mu_2 + (pQ - qP)\delta\mu_3],$$

гдето $P = -\Omega\cos\lambda$, $Q = 0$, $R = \Omega\sin\lambda$.

Въз основа на (8) и (11) трансформираните уравнения на движението (III) в n^0 1 са

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{\xi}} \quad \frac{\partial\delta\tau}{\partial\delta\xi} = M(\ddot{\xi} - 2\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\eta}) = 0$$

или

$$\ddot{\xi} = 2\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\eta} = 0, \tag{I}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{\eta}} \quad \frac{\partial\delta\tau}{\partial\delta\eta} = M(\ddot{\eta} + 2\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\xi}) = 0,$$

отгдето

$$\text{(II)} \qquad \eta = -2\Omega \sin\lambda \,.\, \dot{\xi} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \mu_1} - \frac{\partial \overline{\delta\tau}}{\partial \delta\mu_1} = A(\mu_1 - \Omega \sin\lambda \,.\, q) = 0,$$

отгдето съгласно (7) получаваме

$$\text{(III)} \qquad \dot{p} = \Omega \sin\lambda \,.\, q = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \mu_2} - \frac{\partial \delta\tau}{\partial \delta\mu_2} = A(\ddot{\mu}_2 - \Omega \sin\lambda \,.\, p + \Omega \cos\lambda \,.\, r) = 0$$

или като заместим $\ddot{\mu}_2$ с $\dot{q}$:

$$\text{(IV)} \qquad \dot{q} = -\Omega \sin\lambda \,.\, p - \Omega \cos\lambda \,.\, r,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \mu_3} - \frac{\partial \overline{\delta\tau}}{\partial \delta\mu_2} = A(\mu_3 - \Omega \cos\lambda \,.\, q) = 0,$$

но понеже $\ddot{\mu}_3 = \dot{r}$, то

$$\text{(V)} \qquad \dot{r} = \Omega \cos\lambda \,.\, q.$$

Уравненията (I), (II), (III), (IV), (V) са диференциалните уравнения на движението на сферата при случая, когато теглото е постоянна сила и хоризонталната равнина е идеално гладка.

2) Случай, когато привличането е постоянна сила. Нека привличанията върху елементите на сферата са постоянни сили. Тогава и тяхната разултанта е също постоянна сила с вертикално направление и приложена в центъра на тежестта на сферата. Нейната виртуална работа е равна на нула: $\delta U = 0$.

Тогава функцията $\delta\tau$ се получава от (11) при $\delta U = 0$:

$$\text{(12)} \qquad \overline{\delta\tau} = \frac{3}{2} M[(-\dot{\xi}\,\Omega \sin\lambda + \Omega^2 \eta)\,\delta\eta + (\eta + \Omega \sin\lambda \,.\, \xi \quad \Omega\, a \cos\lambda$$
$$- \Omega\, r_0)\,\Omega \sin\lambda \delta\xi]$$
$$\frac{3}{2} A[(qR - rQ)\,\delta\mu_1 + (rP - pR)\,\delta\mu_2 \quad (pQ - qP)\,\delta\mu_3].$$

Трансформираните уравнения на движението (III) в n^0 1 въз основа на (8) и (12) са

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{\xi}} - \frac{\partial \delta\tau}{\partial \delta\xi} = M[\ddot{\xi} - 2\Omega \sin\lambda \,.\, \dot{\eta} \quad \Omega^2 \sin\lambda\,(\sin\lambda \,.\, \xi \quad a \cos\lambda \quad r_0)] = 0,$$

отгдето

$$\text{(VI)} \qquad \ddot{\xi} = 2\Omega \sin\lambda \,.\, \dot{\eta} \quad \Omega^2 \sin\lambda\,(\sin\lambda \,.\, \xi \quad a \cos\lambda + r_0),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \ddot{\eta}} - \frac{\partial \delta\tau}{\partial \delta\eta} = M(\ddot{\eta} + 2\Omega \sin\lambda \,.\, \dot{\xi} - \Omega^2 \eta) = 0,$$

отгдето

$$\text{(VII)} \qquad \ddot{\eta} = -2\Omega \sin\lambda \,.\, \dot{\xi} + \Omega^2 \eta.$$

Уравненията на движението на сферата при този случай са (VI) и (VII) и очевидно трите уравнения (III), (IV), (V).

II. Хоризонталната равнина хоу е идеално грапава. 1) Случай, когато теглото е постоянна сила. Когато равнината е идеално грапава, сферата само се търкаля, без да се хлъзга върху равнината; тогава трябва релативната скорост на материалната точка H от сферата, в която се допира до равнината, да бъде равна на нула. Понеже тази точка има координати $(0, 0, -a)$ относно осите $Gx'y'z'$, то векторното уравнение на нехолономната връзка е

$$\vec{v}^H = \vec{v}^G + \vec{\omega} \times \overrightarrow{GH} = 0,$$

отгдето

$$\vec{v}^G = -\vec{\omega} \times \overrightarrow{GH} = a(q\vec{i} - p\vec{j})$$

и уравненията (1) в $n^0 1$ за случая са

$$\text{(13)} \qquad \dot{\xi} = aq, \quad \dot{\eta} = -ap$$

или съгласно (7)

$$\dot{\xi} = a\mu_2, \quad \dot{\eta} = -a\mu_1.$$

Оттук имаме

$$\text{(14)} \qquad \ddot{\xi} = a\ddot{\mu}_2, \quad \ddot{\eta} = -a\ddot{\mu}_1,$$

$$\text{(15)} \qquad \delta\xi = a\,\delta\mu_2, \quad \delta\eta = -a\,\delta\mu_1.$$

Като вземем пред вид (14) и (15), от функциите $\frac{1}{2}\ddot{T}$ и $\delta\tau$, дадени с (8) и (11), получаваме функциите:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ddot{T}_l = \frac{M}{2}&[(a\ddot{\mu}_2 - \Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\eta})^2 + (-a\ddot{\mu}_1 + \Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\xi})^2 - (-\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\xi} + \Omega^2\eta)\,a\ddot{\mu}_1\\
\text{(16)} \qquad &+ (\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\eta} + \Omega^2\sin^2\lambda\,.\,\xi + \Omega^2\cos\lambda\sin\lambda\,.\,a + \Omega^2\sin\lambda\, r_0)\,a\ddot{\mu}_2]\\
&+ \frac{A}{2}[\ddot{\mu}_1^2 + \ddot{\mu}_2^2 + \ddot{\mu}_3^2 + (qR - rQ)\ddot{\mu}_1 + (rP - pR)\ddot{\mu}_2 + (pQ - qP)\ddot{\mu}_3] + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\tau_l = &-M\Omega^2[(r_0 + \xi\sin\lambda + a\cos\lambda)(a\sin\lambda\,\delta\mu_2 - a\eta\,\delta\eta)]\\
\text{(17)} \qquad &+ \frac{3}{2}M[-(-\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\xi} + \Omega^2\eta)\,a\,\delta\mu_1 + (\dot{\eta} + \Omega\sin\lambda\,.\,\xi + \Omega a\cos\lambda\\
&+ \Omega r_0)\,\Omega a\sin\lambda\,\delta\mu_2]\end{aligned}$$

$$+\frac{3}{2}A[(qR-rQ)\,\delta\mu_1+(rP-pR)\,\delta\mu_2+(pQ-aP)\,\delta\mu_3],$$

където $P=-\Omega\cos\lambda,\ Q=0,\ R=\Omega\sin\lambda$.

Трансформираните уравнения на движението (IV) в $n^0 1$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{\bar{T}}_l}{\partial\ddot{\mu}_1}=\frac{\partial\,\delta\tau_l}{\partial\,\delta\mu_1},\ \frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}_l}{\partial\ddot{\mu}_2}=\frac{\partial\,\delta\tau_l}{\partial\,\delta\mu_2},\ \frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{\bar{T}}_l}{\partial\ddot{\mu}_3}=\frac{\partial\,\delta\tau_l}{\partial\,\delta\mu_3}$$

съгласно (16) и (17) са:

(VIII) $$A\dot{p}=A\,\Omega\sin\lambda\,.\,q+Ma(\ddot{\eta}+2\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\xi}),$$

(IX) $$A\dot{q}=-A\,\Omega\sin\lambda\,.\,p-Ma(\ddot{\xi}-2\Omega\sin\lambda\,.\,\dot{\eta}),$$

(X) $$\dot{r}=\Omega\cos\lambda\,.\,q.$$

Към тези уравнения трябва да прибавим и уравненията на връзките

(XI) $$\dot{\xi}\quad aq,\quad \eta=-ap.$$

2) Случай, когато привличането е постоянна сила. При този случай виртуалната работа $\overrightarrow{\delta\tau_l}$ се дава от (12), гдето $\delta\xi=a\,\delta\mu_2$, $\delta\eta=-a\,\delta\mu_1$. Функцията $\frac{1}{2}\ddot{\bar{T}}_l$ е същата, каквато е по-горе (16).

Уравненията на движението са:

(XII) $$A\dot{p}=A\,\Omega\cos\lambda\,.\,q+Ma(\ddot{\eta}+2\,\Omega\sin\lambda\,.\,q-\Omega^2\eta),$$

(XIII) $$A\dot{q}=-A\,\Omega\sin\lambda\,.\,p-A\,\Omega\cos\lambda\,.\,r-Ma[\ddot{\xi}-2\Omega\cos\lambda\,.\,q$$
$$-\Omega^2\sin\lambda(\sin\lambda\,.\,\xi+\cos\lambda\,.\,a+r_0)],$$

към които трябва да прибавим уравненията (X) и (XI).

Забележка. Получените диференциални уравнения на движението на сферата бяха намерени в една наша работа [1], като обобщените координати на сферата при движението ѝ около центъра на тежестта G бяха Ойлеровите ъгли φ, ψ, θ. Там уравненията на движението изобщо не се намираха направо, а чрез доста сложни пресмятания се достигаше до тях. При сегашния случай, когато обобщените координати на сферата при релативното ѝ движение около G са ъглите μ_1, μ_2, μ_3, уравненията на движение се получават направо.

Нека забележим още, че уравненията на движението при всички случаи са интегрирани в една друга наша работа [3], в която тези уравнения са намерени, като се използуват класическите теореми за движението на материалните системи.

5. Релативно движение на свободно твърдо хомогенно въртящо тяло. Абсолютната полукинетична енергия на тялото спрямо постоянните оси $o_1x_1y_1z_1$ се дава с формулата (5) в $n^0 3$:

(1) $$\frac{1}{2}T=\frac{1}{4}M(\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\vec{oG}+\vec{v}_r^G)^2+\frac{1}{4}\Sigma m[(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\times\vec{GP}]^2=\frac{1}{2}T_G+\frac{1}{2}T_1,$$

гдето $\frac{1}{2}T_1$ е полукинетичната енергия на тялото спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$. Движението на центъра на тежестта G на тялото е определено в n^o2.

Уравненията на движението спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$ (или уравненията на движението на тялото при неговото движение около G) се получават от уравненията (17) и (18) в n^o3, като поставим $A=B$, ако тялото е връщателно около оста oZ:

$$A\dot{p}+(C-A)qr=L-A\dot{P}-(C-A)(qR+rQ+QR),$$
$$A\dot{q}+(A-C)rp=M-A\dot{Q}-(A-C)(rP+pR+RP),$$
$$C\dot{r}=N-C\dot{R},$$

гдето p, q, r, P, Q, R се дават от (6) и (8) в n^o3.

Ние сега ще намерим уравненията на движението на тялото около центъра на тежестта му, като **отнесем движението на осите** $GXYZ$, **подвижни в тялото**, които се дефинират така: оста GZ да бъде връщателната ос на тялото, която е свързана с тялото; оста GX е нормалата на равнината $z'GZ$ и най-сетне оста GY е перпендикулярна на равнината XGZ. Положението на тялото спрямо осите $Gx'y'z'$, успоредни на $oxyz$, е определено с трите Ойлерови ъгли: $\psi=(Gx', GX)$, $\theta=(Gz', GZ)$ и $\varphi=(GX, GD)$, гдето оста GD е неизменно свързана с тялото и лежи в равнината XGY. Положението на осите $GXYZ$ спрямо $Gx'y'z'$ е определено само с ъглите θ и ψ. Ако означим с $\vec{\Omega}_1$ ротационния вектор на осите $GXYZ$ при движението им спрямо $Gx'y'z'$, то аналитичният израз на тоя вектор е

(2) $$\vec{\Omega}_1=\dot{\theta}\vec{I}+\dot{\psi}\sin\theta\vec{J}+\dot{\psi}\cos\theta\vec{K},$$

$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ са единичните вектори на осите GX, GY, GZ. Аналитичният израз на релативния ротационен вектор $\vec{\omega}$ на тялото при движението му спрямо осите $Gx'y'z'$ се дава с равенството

(3) $$\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{I}+\dot{\psi}\sin\theta\vec{J}+(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\vec{K}=p\vec{I}+q\vec{J}+r\vec{K}.$$

Оттук имаме

(4) $$p=\dot{\theta},\ q=\dot{\psi}\sin\theta,\ r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}=q\operatorname{cotg}\theta+\dot{\varphi}$$

и от (2) получаваме

(5) $$\vec{\Omega}_1=p\vec{I}+q\vec{J}+q\operatorname{cotg}\theta\vec{K}=\dot{\theta}\vec{I}+\dot{\psi}\sin\theta\vec{J}+\dot{\psi}\cos\theta\vec{K},$$

така че

(6) $$\dot{\theta}=p,\ \dot{\psi}\sin\theta=q,\ \dot{\psi}\cos\theta=q\operatorname{cotg}\theta.$$

Векторът $\vec{\Omega}$ в (1) определя движението на осите $Gx'y'z'$ спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$. Нека неговият аналитичен израз относно $Gx'y'z'$ е

$$\vec{\Omega} = P_1\vec{i} + P_2\vec{j} + P_3\vec{k}, \tag{7}$$

гдето P_1, P_2, P_3 са дадени функции на времето t. Понеже движението на тялото спрямо $Gx_1'y_1'z_1'$ отнесохме на осите $GXYZ$, то изразът на $\vec{\Omega}$ спрямо тези оси да бъде

$$\vec{\Omega} = (\vec{\Omega}.\vec{I})\,\vec{I} + (\vec{\Omega}.\vec{J})\,\vec{J} + (\vec{\Omega}.\vec{K})\,\vec{K} = P\vec{I} + Q\vec{J} + R\vec{K}, \tag{8}$$

гдето алгебричните проекции на единичните вектори $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ върху осите Gx', Gy', Gz' се дават с таблицата

	$\vec{i}\,(Gx')$	$\vec{j}\,(Gy')$	$\vec{k}\,(Gz')$
$\vec{I}(GX)$	$\cos\psi$	$\sin\psi$	0
$\vec{J}(GY)$	$-\sin\psi\cos\theta$	$\cos\psi\cos\theta$	$\sin\theta$
$\vec{K}(GZ)$	$\sin\psi\sin\theta$	$-\cos\psi\sin\theta$	$\cos\theta$

добита от равенствата (9) на $n^0 3$ за $\varphi = 0$. Тогава от (8) и от тая таблица получаваме

$$\left\{\begin{aligned} P &= P_1\cos\psi + P_2\sin\psi, \\ Q &= -P_1\sin\psi\cos\theta + P_2\cos\psi\cos\theta + P_3\sin\theta, \\ R &= P_1\sin\psi\sin\theta - P_2\cos\psi\sin\theta + P_3\cos\theta. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Понеже инерчният елипсоид на тялото за точката G е връщателен около оста GZ на тялото, то осите GX, GY, GZ са главни инерчни оси и инерчните моменти относно осите GX и GY са равни на една и съща константа A, макар че тези оси се движат в тялото. Тогава аналитичният израз на функцията $\frac{1}{2}T_1$, дадена от (1), е

$$\frac{1}{2}T_1 = \frac{1}{4}[A(p + P)^2 + A(q + Q)^2 + C(r + R)^2]. \tag{10}$$

Оттук за втората производна на функцията $\frac{1}{2}T_1$ спрямо осите $GXYZ$ получаваме

$$\frac{1}{2}\ddot{T}_1 = \frac{1}{2}\{A[(p + P)^2 + (q + Q)^2] + C(r + R)^2 \tag{11}$$
$$+ A[(p + P)(\ddot{p} + \ddot{P}) + (q + Q)(\ddot{q} + \ddot{Q})] + C(r + R)(r + \ddot{R})\}.$$

От (4) и (6) имаме

(12) $$p=\ddot\theta,\ q=\ddot\psi\sin\theta+\dot\psi\dot\theta\cos\theta,\ \dot r\quad \ddot\psi\cos\theta-\dot\psi\dot\theta\sin\theta+\ddot\varphi,$$

(13) $$q=2\ddot\psi\,p\cos\theta+\ddot\theta\,q\operatorname{cotg}\theta+\ldots,\ r=-2\ddot\psi\,p\sin\theta-\ddot\theta\,q.$$

Като диференцираме (9), получаваме

$$\dot P=-(P_1\sin\psi-P_2\cos\psi)\dot\psi+\ldots,$$

но като елиминираме P_3 от двете последни уравнения на (9), намираме

$$Q\cos\theta-R\sin\theta=-(P_1\sin\psi-P_2\cos\psi)$$

и изразът на $\dot P$ приема вида

(14) $$\begin{cases}\dot P=(Q\cos\theta-R\sin\theta)\,\dot\psi+\ldots,\\ \dot Q=\quad P\cos\theta\,.\,\dot\psi+R\dot\theta+\ldots,\\ \dot R=P\sin\theta\,.\,\dot\psi-Q\,\dot\theta+\ldots\end{cases}$$

Вторите производни на P, Q, R са

(15) $$\begin{cases}\ddot P=(Q\cos\theta-R\sin\theta)\,\ddot\psi+\ldots,\\ \ddot Q=-P\cos\theta\,.\,\ddot\psi+R\,\ddot\theta+\ldots,\\ \ddot R=P\sin\theta\,.\,\ddot\psi-Q\,\ddot\theta+\end{cases}$$

Тогава изразът на функцията $\frac{1}{2}\ddot T_1$, даден с (11), въз основа на (13) и (15) става

$$\frac{1}{2}\ddot T_1=\frac{A}{2}[(\dot p+\dot P)^2+(\dot q+\dot Q)^2]+\frac{C}{2}(\dot r+\dot R)^2$$

(16) $$+\frac{A}{2}\{(p+P)(Q\cos\theta-R\sin\theta)\ddot\psi+(q+Q)[(2p\cos\theta-P\cos\theta)\ddot\psi$$

$$+(q\operatorname{cotg}\theta+R)\ddot\theta]\}+\frac{C}{2}(r+R)[(-2p\sin\theta+P\sin\theta)\ddot\psi-(q+Q)\ddot\theta],$$

гдето $\dot q$, $\dot r$, $\dot P$, $\dot Q$, $\dot R$ са пълните производни спрямо времето на q, r, P, Q, R.

Да изчислим сега вариацията на функцията T_1, разгледана като функция с а м о н а о б о б щ е н и т е к о о р д и н а т и φ, ψ, θ. От (10) имаме

$$\delta T_1=A[(p+P)(\delta p+\delta P)+(q+Q)(\delta q+\delta Q)+C(r+R)(\delta r+\delta R);$$

но от (4) и (14) намираме

$$\delta p=0,\ \delta q=\dot\psi\cos\theta\,\delta\theta=q\operatorname{cotg}\theta\,\delta\theta,\ \delta r=-\dot\psi\sin\theta\,\delta\theta=-q\,\delta\theta,$$

$$\delta P=(Q\cos\theta-R\sin\theta)\,\delta\psi,\ \delta Q=-P\cos\theta\,\delta\psi+R\delta\theta,\ \delta R=P\sin\theta\,\delta\psi-Q\delta\theta$$

и

$$\delta T_1 = A\{(p+P)(Q\cos\theta - R\sin\theta)\delta\psi + (q+Q)[-P\cos\theta\,\delta\psi$$
$$+ (q\operatorname{cotg}\theta + R)\delta\theta]\} + C(r+R)[P\sin\theta\delta\psi - (q+Q)\delta\theta].$$

Едно виртуално преместване в даден момент t на тялото около центъра на тежестта му ще получим, като считаме, че осите $Gx'y'z'$ са постоянни (понеже $t=\text{const}$, то $\vec{v}^0(t)$ и $\vec{\Omega}(t)$ се разглеждат постоянни и следователно осите $oxyz$ и $Gx'y'z'$ са постоянни) и като дадем на координатите φ, ψ, θ безкрайно малки произволни вариации $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$. Тогава сумата от работите на дадените сили има израз $L\delta\theta + M_1\delta\psi + N\delta\varphi$, гдето L, M, N са съответно сумата от моментите на тия сили спрямо осите GX, Gz', GZ. Нека резултантният момент на дадени сили за точката G е

$$\overrightarrow{GS} = L\vec{I} + M\vec{J} + N\vec{K};$$

понеже $\vec{k}$ е единичният вектор на оста Gz', то аналитичният му израз спрямо осите $GXYZ$ е $\vec{k} = \sin\theta\vec{J} + \cos\theta\vec{K}$ и

$$M_1 = \overrightarrow{GS}.\vec{k} = M\sin\theta + N\cos\theta.$$

Тогава сумата от работите на дадените сили е

$$L\,\delta\theta + (M\sin\theta + N\cos\theta)\delta\psi + N\delta\varphi.$$

Прочее функцията $\delta\tau$ се дава с равенството

$$\delta\tau = L\,\delta\theta + (M\sin\theta + N\cos\theta)\delta\psi + N\delta\varphi$$
$$+\frac{3}{2}A\{(p+P)(Q\cos\theta - R\sin\theta)\delta\psi + (q+Q)[-P\cos\theta\,\delta\psi$$
$$+(q\operatorname{cotg}\theta - R)\delta\theta]\} + \frac{3}{2}c(r+R)[P\sin\theta\,\delta\psi - (q+Q)\delta\theta]. \tag{17}$$

Уравненията на движението (I) в $n^0 1$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}_1}{\partial\ddot{\varphi}} = \frac{\partial\delta\tau}{\partial\delta\varphi},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}_1}{\partial\ddot{\theta}} = \frac{\partial\delta\tau}{\partial\delta\theta},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}_1}{\partial\ddot{\psi}} = \frac{\partial\delta\tau}{\partial\delta\psi}$$

въз основа на (16) и (17) са:

$$C(\dot{r}+\dot{R}) = N,$$
$$A(\dot{p}+\dot{P}) - A(q+Q)(q\operatorname{cotg}\theta + R) + C(r+R)(q+Q) = L,$$
$$A(\dot{q}+Q)\sin\theta + C(\dot{r}+\dot{R})\cos\theta - A(p+P)(Q\cos\theta - R\sin\theta)$$
$$+A(q+Q)(v+P)\cos\theta - C(r+R)(p+P)\sin\theta = M\sin\theta + N\cos\theta);$$

това последно уравнение, като вземем под внимание първото уравнение става

$$A(\dot{q}+\dot{Q})\quad A(p\quad P)(q\operatorname{cotg}\theta+R)-C(r+R)(p+P)=M.$$

Величините $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, $\dot{P}$, $\dot{Q}$, $\dot{R}$ са пълните производни спрямо времето на p, q, r, P, Q, R.

Тези уравнения, написани под вида

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}&A\dot{p}-(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)q\quad L\quad[-A\dot{P}+(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)Q\\&\qquad\qquad+(A-C)(qR+QR)],\\&A\dot{q}+(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)p=M+[-A\dot{Q}-(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)P\\&\qquad\qquad-(A-C)(pR+PR)],\\&\qquad\qquad C\dot{r}=N+[-C\dot{R}],\end{aligned}\right.$$

определят релативното движение на тялото спрямо осите $Gx'y'z'$, успоредни на $oxyz$, когато движението е отнесено на осите $GXYZ$, подвижни в тялото и в пространството.

Забележка I. Нека получим уравненията (18) от трансформираните уравнения (III) в $n^0 1$. Уравненията (4) в този n^0 са уравненията (4), решени спрямо $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\theta}=p,\ \dot{\psi}=\frac{q}{\sin\theta},\ \dot{\varphi}=r-q\operatorname{cotg}\theta;$$

понеже $p=\dot{\mu}_1$, $q=\dot{\mu}_2$, $r=\dot{\mu}_3$, то

$$(19)\qquad \dot{\theta}=\dot{\mu}_1,\ \dot{\psi}=\frac{\dot{\mu}_2}{\sin\theta},\ \dot{\varphi}=\dot{\mu}_3-\dot{\mu}_2\operatorname{cotg}\theta,$$

$$(20)\qquad \ddot{\theta}=\ddot{\mu}_2,\ \ddot{\psi}=\frac{\ddot{\mu}_2}{\sin\theta}+\ldots,\ \ddot{\varphi}=\ddot{\mu}_3-\ddot{\mu}_2\operatorname{cotg}\theta+\ldots$$

и от (19) имаме

$$(21)\qquad \delta\theta=\delta\mu_1,\ \delta\psi=\frac{\delta\mu_2}{\sin\theta},\ \delta\varphi=\delta\mu_3-\delta\mu_2\operatorname{cotg}\theta.$$

Въз основа на (20) и (21) от (16) и (17) получаваме функциите $\frac{1}{2}\ddot{T}_1$ и $\delta\tau$:

$$\frac{1}{2}T_1=\frac{A}{2}[(\ddot{\mu}_1+\dot{P})^2+(\ddot{\mu}_2\quad\dot{Q})^2]+\frac{C}{2}\left(\ddot{\mu}_3+\dot{R}\right)^2$$

$$+\frac{A}{2}\{(p\quad P)(Q\operatorname{cotg}\theta-R)\ddot{\mu}_2\quad(q+Q)[2p\ddot{\mu}_2\operatorname{cotg}\theta-\ddot{\mu}_2\dot{P}\operatorname{cotg}\theta$$

(22)

$$+(q\operatorname{cotg}\theta+R)\ddot{\mu}_1]\}+\frac{C}{2}(r+R)[-2p\ddot{\mu}_2-\ddot{\mu}_2P-(q\quad Q)\ddot{\mu}_1],$$

$$\delta\tau = L\,\delta\mu_1 + M\,\delta\mu_2 + N\,\delta\mu_3 + \frac{3A}{2}\{(p+P)(Q\operatorname{cotg}\theta - R)\,\delta\mu_2$$
$$+ (q+Q)\,[-P\operatorname{cotg}\theta\,\delta\mu_2 + (q\operatorname{cotg}\theta + R)\,\delta\mu_2]\}$$
$$+ \frac{3C}{2}(r+R)\,[P\,\delta\mu_2 - (q+Q)\,\delta\mu_1]. \tag{23}$$

Въз основа на (22) и (23) трансформираните уравнения (III) в n^0 1 дават направо уравненията на движението (18).

Забележка II. Изразите, заградени със средни скоби в десните части на уравненията на движението (18), представляват сумата от моментите на фиктивните сили, приложени в точките P от тялото, относно осите GX, GY, GZ, за да може да се разглежда релативното движение на тялото спрямо осите $Gx'y'z'$ като абсолютно.

И наистина резултантният момент на преносните инерчни сили за точката G се дава с равенството

$$\sum(\overrightarrow{GP}\times\vec{F}_1) = -\sum m\overrightarrow{GP}\times\{\vec{a}^0 + \vec{\Omega}'\times(\overrightarrow{oG}+\overrightarrow{GP}) + \vec{\Omega}\times[\vec{\Omega}\times(\overrightarrow{oG}+\overrightarrow{GP})]\}$$
$$= -\sum m\,\overrightarrow{GP}\times(\vec{\Omega}'\times\overrightarrow{GP}) - \sum m\,\overrightarrow{GP}\times[\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{GP})]$$
$$= -\vec{\Omega}'\sum m\,\overrightarrow{GP}^2 + \sum m\,\overrightarrow{GP}(\vec{\Omega}'.\overrightarrow{GP}) - \sum m\,(\overrightarrow{GP}\times\vec{\Omega})\,(\vec{\Omega}.\overrightarrow{GP}),$$

гдето $\vec{\Omega}'$ е производната на вектора $\vec{\Omega} = P\vec{I} + Q\vec{J} + R\vec{K}$ спрямо осите $Gx'y'z'$, успоредни на $oxyz$:

$$\vec{\Omega}' = \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega}_1\times\vec{\Omega},$$

$\vec{\Omega}_1$ се дава от равенството (5). Понеже $A = B$ или $\sum mx^2 = \sum my^2$, то

$$\sum(\overrightarrow{GP}\times\vec{F}_1) = [-(\dot{P} + qR - rQ\operatorname{cotg}\theta)\,\Sigma m\,(y^2+z^2) + (A-C)\,QR]\,\vec{I}$$
$$+ [-(\dot{Q} - pR + qP\operatorname{cotg}\theta)\,\Sigma m\,(z^2+x^2) - (A-C)\,RP]\,\vec{J}$$
$$+ [-(\dot{R} + pQ - qP)\,\Sigma m\,(x^2+y^2)\,\vec{K}.$$

За резултантния момент за точката G на центробежните съставни сили получаваме

$$\sum(\overrightarrow{GP}\times F_2) = -2\sum m\,[\overrightarrow{GP}\times(\vec{\Omega}\times\vec{V}_r^P)]$$
$$= -2\,\vec{\Omega}\sum m(\overrightarrow{GP}.\vec{V}_r^P) + 2\sum m\,\vec{V}_r^P\,(\vec{\Omega}.\overrightarrow{GP})$$
$$= 2\sum m\,(\vec{V}_r^O + \vec{\omega}\times\overrightarrow{GP})\,(\vec{\Omega}.\overrightarrow{GP}) = 2\sum m(\vec{\omega}\times\overrightarrow{GP})\,(\vec{\Omega}.\overrightarrow{GP})$$
$$= 2\,[(qR\sum mz^2 - rQ\sum my^2)\,\vec{I} + (rP\sum mx^2 - pR\sum mz^2)\,\vec{J}$$

$$+(pQ\sum my^2-qP\sum mx^2)\vec{K}.$$

Прочее резултантният момент за точката G на фиктивните сили е

$$\sum \overrightarrow{GP}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=[-A\dot{P}+(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)\,Q+(A-C)\,(qR\quad QR)]\,\vec{I}$$

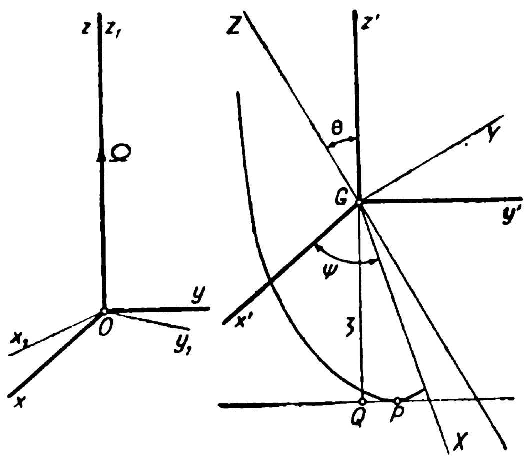
$$+[-A\dot{Q}-(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)\,P\quad (A-C)\,(pR+PR)]\,\vec{J}$$

$$+[-C\dot{R}]\,\vec{K}.$$

Неговите проекции върху осите GX, GY, GZ са точно изразите, заградени в средните скоби на (18).

Забележка III. Уравненията на движението (18) могат да се намират и като диференцираме функцията T_1 спрямо осите $Gx_1'\,y_1'\,z_1'$, както това направихме в $n^0\,3$; но за случая пресмятанията са по-сложни.

6. Приложение. Да се намери движението на твърдо тежко въртателно хомогенно тяло, принудено да се движи върху хоризонтална равнина, която се върти с постоянна ъгълна скорост $\vec{\Omega}$ около постоянна вертикална ос. Да се разгледат случаите, когато равнината е идеално гладка — хлъзгане на тялото, и когато е идеално грапава — търкаляне на тялото без хлъзгане.



Черт. 3

Случай на хлъзгане. Нека $oxyz$ е подвижната координатна система, на която оста oz се слива с постоянната вертикална ос o_1z_1 на постоянната координатна система $o_1x_1y_1z_1$ (черт. 3).

Релативното движение на тялото спрямо осите $oxyz$ е определено с шестте параметъра: ξ, η, ζ — координатите на центъра на тежестта на тялото G и Ойлеровите ъгли ψ, θ, φ. Но тези параметри не са независими, понеже тялото е принудено да се допира до подвижната хоризонтална равнина xoy. Ние ще покажем, че апликатата ζ на точката G е дадена функция на ъгъла θ. И наистина тялото в даден момент t ще се опира до равнината xoy в точката P; тази равнина ще бъде тангенциалната равнина към повърхнината на тялото в точката P. Да намерим нормалното уравнение на тази равнина спрямо осите $GXYZ$. Разстоянието $\overrightarrow{GQ}$ от точката G до тангенциалната равнина xoy е равно на ζ, $\overline{GQ}=\zeta$. Понеже единичният вектор $\vec{k}$ на вертикалната ос Gz' има аналитичен израз $\sin\theta\,\vec{J}+\cos\theta\,\vec{K}$ спрямо осите $GXYZ$, то аналитичен израз спрямо същите оси на единичния вектор $-\vec{k}$ на перпендикуляра GQ към равнината xoy е $-\vec{k}=-\sin\theta\vec{I}-\cos\theta\vec{K}$. Тогава ако $M(X, Y, Z)$ е коя да е точка от равнината xoy, то алгебричната проекция на векторната координата $\overrightarrow{GM}=X\vec{I}+Y\vec{J}+Z\vec{K}$ на точката M върху нормалата GQ на равнината xoy е винаги равна на $\zeta: -\overrightarrow{GM}\cdot\vec{k}=\zeta$. Прочее нормалното уравнение на тангенциалната равнина на опорната точка P от повърхнината на тялото е

$$\zeta=-Y\sin\theta-Z\cos\theta; \tag{1}$$

тази равнина е успоредна на оста GX. Но точката P е точка и на меридианната крива, образувана от пресичането на повърхнината на тялото с вертикалната равнина YGZ; тогава уравнението (1) ще бъде и нормалното уравнение на тангентата, прокарана в точката P на меридианната крива. Нека $F(Y, Z)=0$ е уравнението на дадената меридианна крива. Уравнението на тангентата в точка $P(o, Y, Z)$ има вида

$$(z-Z)\frac{\partial F}{\partial Z}+(y-Y)\frac{\partial F}{\partial Y}=0.$$

От това уравнение и уравнението (1) следва

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial Y}}{\sin\theta}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial Z}}{\cos\theta},\quad F(Y, Z)=0.$$

От тези две последни уравнения намираме координатите Y и Z на точката P във функция от θ. Заместваме стойностите Y и Z в (1) и получаваме

$$\zeta=f(\theta).$$

Прочее релативното движение на тялото спрямо осите $oxyz$ е определено с петте независими параметъра ξ, η, φ, ψ, θ.

Полукинетичната енергия на тялото спрямо постоянната координатна система $o_1x_1y_1z_1$ се дава с формулата (5) в $n^\circ 3$:

$$\frac{1}{2}T=\frac{M}{4}(\vec{v}^0+\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oG}+\vec{v}_r^G)^2+\frac{1}{4}\sum m[(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\times\overrightarrow{GP}]^2=\frac{1}{2}T_G+\frac{1}{2}T_1.$$

Понеже движението на центъра на тежестта G спрямо осите $o_1x_1y_1z_1$ е отнесено на осите $oxyz$, то векторите $\vec{\Omega}$, $\vec{v}^0$ и $\overrightarrow{oG}$ са

$$\vec{\Omega}=\Omega\vec{k},\quad \vec{v}^0=0,\quad \overrightarrow{oG}=\xi\vec{i}+\eta\vec{j}+f(\theta)\vec{k}.$$

Движението на тялото около G, т. е. спрямо осите $Gx_1'y_1'z_1'$, е отнесено на осите $GXYZ$, подвижни в тялото и в пространството; векторите $\vec{\Omega}$, $\vec{\omega}$ и $\overrightarrow{GP}$ имат аналитични изрази:

$$\vec{\Omega}=\Omega(\sin\theta\vec{J}+\cos\theta\vec{K}),\quad \vec{\omega}=p\vec{I}+q\vec{J}+r\vec{K},\quad \overrightarrow{GP}=x\vec{I}+y\vec{J}+z\vec{K}.$$

Тогава аналитичният израз на абсолютната полукинетична енергия на тялото се дава с равенството

$$\frac{1}{2}T = \frac{M}{4}[(\dot\xi - \Omega\eta)^2 + (\eta + \Omega\xi)^2 + \dot f^2 p^2]$$

(2)

$$+\frac{1}{4}\{A[p^2 \quad (q + \Omega\sin\theta)^2] + C(r + \Omega\cos\theta)^2\},$$

понеже $\zeta = f(\theta)$, $\dot\zeta = \dot f p$.

Първата и втората производна на функцията $\frac{1}{2}T$ са:

$$\frac{1}{2}\dot T = \frac{M}{2}[(\dot\xi - \Omega\eta)(\ddot\xi - \Omega\dot\eta) + (\eta \quad \Omega\xi)(\ddot\eta + \Omega\dot\xi) + \dot f\ddot f p^3 + \dot f p\dot p]$$

$$\frac{A}{2}[p\dot p + (q + \Omega\sin\theta)(q + \Omega\cos\theta\,.\,p) + C(r + \Omega\cos\theta)(\dot r - \Omega\sin\theta\,.\,p],$$

$$\frac{1}{2}\ddot T = \frac{M}{2}[(\ddot\xi \quad -\Omega\dot\eta)^2 + (\ddot\eta + \Omega\dot\xi)^2 - (\dot\xi - \Omega\eta)\Omega\ddot\eta + (\dot\eta + \Omega\xi)\Omega\ddot\xi + \ddot f^2\dot p^2 + 5\dot f\ddot f p^2\dot p$$

(3)

$$-\frac{A}{2}[\dot p^2 + (\dot q \quad \Omega\cos\theta\,.\,p)^2 + (q + \Omega\sin\theta)(\ddot q + \Omega\cos\theta\,.\,\dot p)]$$

$$+\frac{C}{2}[(\dot r \quad \Omega\sin\theta\,.\,p)^2 + (r + \Omega\cos\theta)(\ddot r - \Omega\sin\theta\,.\,p)] +$$

гдето

$$p = \dot\theta,\ q = \dot\psi\sin\theta,\ r = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi,$$

$$p = \ddot\theta,\ q = \ddot\psi\sin\theta + \dot\psi\dot\theta\cos\theta,\ \dot r = \ddot\psi\cos\theta - \dot\psi\dot\theta\sin\theta + \varphi,$$

$$\ddot q = 2\ddot\psi p\cos\theta + \dot\psi\ddot\theta\cos\theta + \cdots = 2\ddot\psi p\cos\theta + \ddot\theta q\operatorname{cotg}\theta,$$

$$r = -2\ddot\psi p\sin\theta - \dot\psi\ddot\theta\sin\theta + \cdots = -2\ddot\psi p\sin\theta - \ddot\theta q + \cdots$$

Да изчислим сега функцията $\delta\tau$. Единствената дадена сила е теглото Mg, на което приложната точка е центърът на тежестта G на тялото. Тази сила произхожда от функцията на сили

$$U = -Mg\zeta = -Mgf(\theta).$$

Функцията T, дадена с (2), се разглежда като функция само на обобщените координати ξ, η, φ, ψ, θ. Тогава

$$\delta\tau = \delta U + \frac{3}{2}\delta T = -Mg\dot f\delta\theta + \frac{3}{2}M[-(\dot\xi - \Omega\eta)\Omega\delta\eta$$

(5)

$$(\eta \quad \Omega\xi)\Omega\delta\xi + \dot f\ddot f p^2\delta\theta]$$

$$+\frac{3}{2}[A(q+\Omega\sin\theta)(q\operatorname{cotg}\theta+\Omega\cos\theta)-C(r+\Omega\cos\theta)(q+\Omega\sin\theta)]\delta\theta.$$

Уравненията на движението (I) в $n^0 1$ на основание (3) и (5) са:

$$\text{(I)}\qquad \ddot{\xi}-2\Omega\dot{\eta}-\Omega^2\xi=0,$$

$$\text{(II)}\qquad \ddot{\eta}+2\Omega\dot{\xi}-\Omega^2\eta=0,$$

$$\text{(III)}\qquad \begin{gathered}(A+Mf^2)\dot{p}+Mf\dot{f}\ddot{f}p^2-(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)q+C\Omega r\sin\theta\\ -(2A-C)\Omega q\cos\theta+(C-A)\Omega^2\cos\theta\sin\theta=-Mg\dot{f},\end{gathered}$$

$$\text{(IV)}\qquad \dot{r}-\Omega p\sin\theta=0$$

и най-сетне, ако в петото уравнение на движението за ψ пишем $\dot{r}=\Omega p\sin\theta$ и разделим двете му страни със $\sin\theta$, получаваме

$$\text{(V)}\qquad A\dot{q}-(Cr-Aq\operatorname{cotg}\theta)p+(2A-C)\Omega p\cos\theta=0.$$

Ние намерихме тези уравнения в една друга наша работа [4] и по метода на Лагранж в Апел. Там показахме, че диференциалните уравнения, които определят движението на центъра на тежестта на тялото, се интегрират чрез елементарни функции, а тези, които определят движението на тялото около центъра на тежестта, заедно с първите дават три първи интеграла на движението и интегрирането на проблемата се довършва изобщо чрез хиперелиптични квадратури.

Нека приложим трансформираните уравнения (III) в $n^0 1$, като положим

$$p=\dot{\theta}=\dot{\mu}_1,\quad q=\dot{\psi}\sin\theta=\dot{\mu}_2,\quad r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}=\dot{\mu}_3$$

и вземем за обобщени координати величините ξ, η, μ_1, μ_2, μ_3. Тогава, като вземем пред вид, че равенствата (4) стават

$$\ddot{q}=2\ddot{\mu}_2 p\operatorname{cotg}\theta+\ddot{\mu}_1 q\operatorname{cotg}\theta t\ldots,\quad \ddot{r}=-2\ddot{\mu}_2 p-\ddot{\mu}_1 q+\ldots,$$

то от (3) получаваме функцията

$$\text{(6)}\qquad \begin{gathered}\frac{1}{2}\ddot{T}=\frac{1}{2}M[(\ddot{\xi}-\Omega\dot{\eta})^2+(\ddot{\eta}+\Omega\dot{\xi})^2-(\xi-\Omega\eta)\Omega\ddot{\eta}+(\dot{\eta}+\Omega\xi)\Omega\ddot{\xi}\\ +f^2\ddot{\mu}_1^2+5f\dot{f}p^2\ddot{\mu}_1]+\frac{A}{2}\{\ddot{\mu}_1^2+(\ddot{\mu}_2+\Omega\cos\theta)^2\\ +(q+\Omega\sin\theta)[2\ddot{\mu}_2 p\operatorname{cotg}\theta+(q\operatorname{cotg}\theta+\Omega\cos\theta)\ddot{\mu}_1]\}\\ +\frac{C}{2}\{(\ddot{\mu}_3-\Omega p\sin\theta)^2+(r+\Omega\cos\theta)[-2\ddot{\mu}_2 p-(q+\Omega\sin\theta)\ddot{\mu}_1]\}.\end{gathered}$$

Функцията $\delta\tau$ се получава от (5), като поставим $\delta\mu_1$ вместо $\delta\theta$. Тогава от (6) и (5) се написват направо намерените по-горе пет уравнения на движението.

Случай на търкаляне без хлъзгане. За да изразим условието, че тялото се търкаля без хлъзгане върху хоризонталната равнина xoy, трябва да напишем, че релативната скорост на материалната точка от тялото, която е в опорната точка $P(o, Y, Z)$, е равна на нула. Релативната скорост на тази точка P спрямо осите $oxyz$ е резултантата от релативната скорост на точката G относно осите $oxyz$ и от релативната скорост на точката P от тялото вследствие на въртенето му с релативния ротационен вектор $\vec{\omega}$ спрямо осите $Gx'y'z'$:

$$\vec{v}_r^P = \vec{v}_r^G + \vec{\omega} \times GP = 0.$$

Проекциите на $\vec{v}_r^G$ върху осите $oxyz$ или $Gx'y'z'$ са

$$\dot{\xi},\ \dot{\eta},\ \dot{\zeta} = \dot{f}p,$$

а проекциите му върху осите $GXYZ$, на които косинусите от ъглите с осите $Gx'y'z'$ са дадени с таблицата в $n^0 4$, са

$$\dot{\xi}\cos\psi + \dot{\eta}\sin\psi,$$

$$-\dot{\xi}\sin\psi\cos\theta + \dot{\eta}\cos\psi\cos\theta + \dot{f}p\sin\theta,$$

$$\dot{\xi}\sin\psi\sin\theta - \dot{\eta}\cos\psi\sin\theta + \dot{f}p\cos\theta.$$

Тогава условието, че тялото се търкаля без хлъзгане върху хоризонталната равнина xoy, се изразява със следните три уравнения:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dot{\xi}\cos\psi + \dot{\eta}\sin\psi + qZ - rY = 0, \\ -\dot{\xi}\sin\psi\cos\theta + \dot{\eta}\cos\psi\cos\theta + \dot{f}p\sin\theta - pZ = 0, \\ \dot{\xi}\sin\psi\sin\theta - \dot{\eta}\cos\psi\sin\theta + \dot{f}p\cos\theta + pY = 0. \end{cases}$$

Ние намерихме по-горе координатите на точката P, когато меридианната крива е дадена, и показахме, че разстоянието $\overline{GQ} = \zeta$ от центъра на тежестта G до тангенциалната равнина в точка P от дадената меридианна крива е функция на ъгъла θ между $\overline{GQ}$ и оста $GZ: \zeta = f(\theta)$. Обратно, да си дадем отнапред релацията $\zeta = f(\theta)$; съответната меридианна крива е обвивката на правите PQ, дадени с (1), които проверяват условието $\zeta = f(\theta)$:

$$(8)\qquad f(\theta) = Y\sin\theta - Z\cos\theta.$$

Понеже меридианната крива е обвивката на тези прави, когато θ се измени, то ние ще намерим координатите на точката P, като към уравнението 8 прибавим неговата производна спрямо θ:

$$f'(\theta) = -Y\cos\theta + Z\sin\theta,$$

тъй като обвивката на правите (2) може да се разгледа като геометрично място на опорните точки от тялото. Прочее координатите на точката P са

$$(9)\qquad \begin{cases} Y = -f(\theta)\sin\theta - \dot{f}(\theta)\cos\theta\,, \\ Z = -f(\theta)\cos\theta + \dot{f}(\theta)\sin\theta, \quad X = 0. \end{cases}$$

Като вземем пред вид (9), трите уравнения (7) се редуцират на следните две уравнения:

$$\dot{\xi}\cos\psi + \eta\sin\psi + q\,(\dot{f}\sin\theta - f\cos\theta) + r\,(\dot{f}\cos\theta + f\sin\theta) = 0,$$

$$\dot{\xi}\sin\psi - \dot{\eta}\cos\psi - pf = 0,$$

от които получаваме

$$(10)\qquad \begin{cases} \dot{\xi} = q\cos\psi\,(f\cos\theta - \dot{f}\sin\theta) - r\cos\psi\,(f\sin\theta + \dot{f}\cos\theta) + pf\sin\psi\,, \\ \dot{\eta} = q\sin\psi\,(f\cos\theta - \dot{f}\sin\theta) - r\sin\psi\,(f\sin\theta + \dot{f}\cos\theta) - pf\cos\psi\,. \end{cases}$$

Диференциалните уравнения на движението на тялото ще намерим, като приложим уравненията (IV) в n^0 1. Понеже $p = \dot{\mu}_1$, $q = \dot{\mu}_2$, $r = \dot{\mu}_3$, то от (10) получаваме

$$(11)\qquad \begin{cases} \ddot{\xi} = \ddot{\mu}_2\cos\psi\,(f\cos\theta - \dot{f}\sin\theta) - \ddot{\mu}_3\cos\psi\,(f\sin\theta \\ \qquad + \dot{f}\cos\theta) + \ddot{\mu}_3 f\sin\psi + \cdots, \\ \ddot{\eta} = \ddot{\mu}_2\sin\psi\,(f\cos\theta - \dot{f}\sin\theta) - \ddot{\mu}_3\sin\psi\,(f\sin\theta \\ \qquad + \dot{f}\cos\theta) - \ddot{\mu}_1 f\cos\psi + \cdots, \end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} \delta\xi = \delta\mu_2\cos\psi\,(f\cos\theta - \dot{f}\sin\theta) - \delta\mu_3\cos\psi\,(f\sin\theta + \dot{f}\cos\theta) + \delta\mu_1 f\sin\psi, \\ \delta\eta = \delta\mu_2\sin\psi\,(f\cos\theta - \dot{f}\sin\theta) - \delta\mu_3\sin\psi\,(f\sin\theta + \dot{f}\cos\theta) - \delta\mu_1 f\cos\psi) \end{cases}.$$

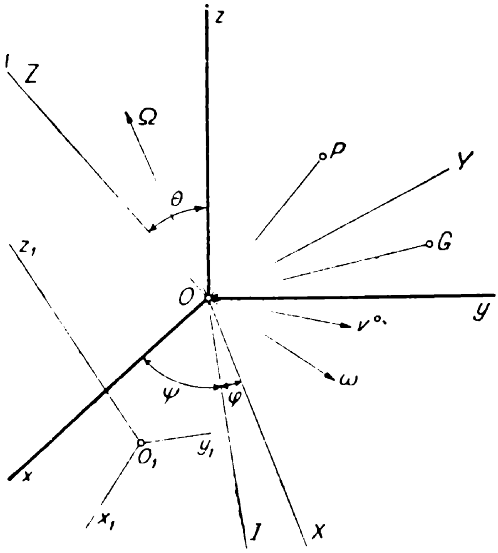
Функцията $\frac{1}{2}\ddot{\bar{T}}$, дадена с (6), посредством (11) става функция само на $\ddot{\mu}_1, \ddot{\mu}_2, \ddot{\mu}_3$, която означаваме с $\frac{1}{2}\ddot{\bar{T}}_l$, а функцията $\delta\bar{\tau}$, дадена с (5) (гдето сме поставили $\delta\mu_1$ вместо $\delta\theta$), посредством (12) става функция само на $\delta\mu_1$, $\delta\mu_2$, $\delta\mu_3$, която означаваме с $\delta\bar{\tau}_l$.

Диференциалните уравнения на движението са

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{\bar{T}}_l}{\partial\ddot{\mu}_1} = \frac{\partial\delta\bar{\tau}_l}{\partial\delta\mu_1}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{\bar{T}}_l}{\partial\ddot{\mu}_2} = \frac{\partial\delta\bar{\tau}_l}{\partial\delta\mu_2}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{\bar{T}}_l}{\partial\ddot{\mu}_3} = \frac{\partial\delta\bar{\tau}_l}{\partial\delta\mu_3}.$$

Като извършим диференцирането и пишем $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ вместо $\ddot{\mu}_1$, $\ddot{\mu}_2$, $\ddot{\mu}_3$, получаваме трите уравнения на движението, към които трябва да прибавим и двете уравнения (10).

7. Релативно движение на твърдо тяло с една постоянна точка. Нека едно твърдо тяло има една постоянна точка *о*. Да намерим диференциалните уравнения на релативното движение на тялото спрямо координатната система $oxyz$, движението на която спрямо постоянната координатна система $o_1x_1y_1z_1$ е определено с ротационния вектор $\vec{\Omega}$ и транслационния вектор $\vec{V}^0$.



Черт. 4

Движението на тялото спрямо осите $oxyz$ отнасяме на осите $oXYZ$, свързани с тялото, като осите oX, oY, oZ са главни инерчни оси. Обобщените координати на тялото са Ойлеровите ъгли φ, ψ, θ между двете системи оси $oxyz$ и $oXYZ$.

Аналитичните изрази на векторите $\vec{\Omega}$ и $\vec{V}^0$ спрямо осите $oxyz$ са

$$\vec{\Omega}=P_1\vec{i}+P_2\vec{j}+P_3\vec{k},\quad \vec{V}^0=V_x^o\vec{i}+V_y^o\vec{j}+V_z^o\vec{k}.$$

$P_1, P_2, P_3, V_x^o, V_y^o, V_z^o$ са дадени функции на времето t (черт. 4); изразите на тия вектори спрямо осите $oXYZ$ са

$$\vec{\Omega}=P\vec{I}+Q\vec{J}+R\vec{K},\quad \vec{V}^0=V_X^o\vec{I}+V_Y^o\vec{J}+V_Z^oK,$$

гдето

$$(1)\quad \begin{cases} P=\vec{\Omega}.\vec{I}=P_1\cos(\vec{i}\ \vec{I})+P_2\cos(\vec{j},\ \vec{I})+P_3\cos(\vec{k},\ \vec{I}),\\ Q=\vec{\Omega}.\vec{J}=P_1\cos(\vec{i},\ \vec{J})+P_2\cos(\vec{j},\ \vec{J})+P_3\cos(\vec{k},\ \vec{J}),\\ R=\vec{\Omega}.\vec{K}=P_1\cos(\vec{i},\ \vec{K})+P_2\cos(\vec{j},\ \vec{K})+P_3\cos(\vec{k},\ \vec{K}),\end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} V_X^0=\vec{V}^0.\vec{I}=V_x^0\cos(\vec{i},\ \vec{I})+V_y^0\cos(\vec{j},\ \vec{I})+V_z^0\cos(\vec{k},\ \vec{I}),\\ V_Y^0=\vec{V}^0.\vec{J}=V_x^0\cos(\vec{i},\ \vec{J})+V_y^0\cos(\vec{j},\ \vec{J})+V_z^0\cos(\vec{k},\ \vec{J}),\\ V_Z^0=\vec{V}^0.\vec{K}=V_x^0\cos(\vec{i},\ \vec{K})+V_y^0\cos(\vec{j},\ \vec{K})+V_z^0\cos(\vec{k},\ \vec{K}),\end{cases}$$

косинусите на ъглите между осите на системите $oxyz$ и $oXYZ$ са дадени от равенствата (9) в n^0 3.

Релативният ротационен вектор на тялото

$$\vec{\omega}=p\vec{I}+q\vec{J}+r\vec{K},$$

гдето p, q, r се дават от равенствата (6) в $n^0$3. Релативната скорост на точка P от тялото $\vec{V}_r^p = \vec{\omega} \times \vec{oP}$. Векторната координата на центъра на тежестта на тялото

$$\vec{oG} = a\vec{I} + b\vec{J} + c\vec{K},$$

a, b, c са постоянни числа.

Абсолютната полукинетична енергия на тялото

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\ddot{T} = \frac{1}{4}\Sigma m \vec{V}_a^{P2} = \frac{1}{4}\Sigma m(\vec{V}_e^P + \vec{V}_r^P)^2 = \frac{1}{4}\Sigma m[\vec{V}^0 + (\vec{\Omega} + \vec{\omega})\times\vec{oP}]^2$$

$$= \frac{1}{4}M\vec{V}^{02} + \frac{1}{2}M\vec{V}^0 . [(\vec{\Omega} + \vec{\omega})\times\vec{oG}] + \frac{1}{4}\Sigma m[(\vec{\Omega} + \vec{\omega})\times oP]^2$$

или

$$(3')\qquad \frac{1}{2}T = \frac{1}{4}MV^{02} + \frac{M}{2}\Big\{a[V_Y^0(R+r) - V_Z^0(Q+q) + b(V_Z^0(P+p) - V_X^0(R+r)]$$
$$+ c[V_X^0(Q+q) - V_Y^0(P+p)]\Big\} + \frac{1}{4}[A(P+p)^2 + B(Q+q)^2 + C(r+R)^2].$$

Сумата от виртуалните работи на силите

$$(4)\qquad \delta\tau = N\delta\varphi + Q_\theta\delta\theta + Q_\psi\delta\psi + \frac{3}{2}\delta T,$$

гдето T се разглежда като функция само на φ, θ, ψ.

Нека намерим диференциалното уравнение на движението за обобщената координата φ:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{\varphi}} = \frac{\partial \delta\tau}{\partial \delta\varphi}.$$

За тая цел ще изчислим частта от функцията $1/2\,\ddot{T}$, която зависи само от $\ddot{\varphi}$ и от функцията $\delta\tau$ — частта, която зависи от $\delta\varphi$.

От (3′) и (4) имаме

$$\frac{1}{2}\ddot{T} = \frac{1}{2}M\Big\{a[\ddot{V}_Y^0(R+r) + 2\dot{V}_Y^0(\dot{R}+\dot{r}) + V_Y^0(\ddot{R}+\ddot{r}) - \ddot{V}_Z^0(Q+q)$$
$$- 2\dot{V}_Z^0(\dot{Q}+\dot{q}) - V_Z^0(\ddot{Q}+\ddot{q})] + b[\ddot{V}_Z^0(P+p) + 2\dot{V}_Z^0(\dot{P}+\dot{p}) + V_Z^0(\ddot{P}+\ddot{p})$$
$$- \ddot{V}_X^0(R+r) - 2\dot{V}_X^0(\dot{R}+\dot{r}) - V_X^0(\ddot{R}+\ddot{r})] + c[\ddot{V}_X(Q+q) + 2\dot{V}_X^0(\dot{Q}+\dot{q})$$
$$+ V_X^0(\ddot{Q}+\ddot{q}) - \ddot{V}_Y^0(P+p) - 2\dot{V}_Y^0(\dot{P}+\dot{p}) - V_Y^0(\ddot{P}+\ddot{p})]\Big\} + \frac{1}{2}[A(\dot{P}+\dot{p})^2$$
$$+ B(\dot{Q}+\dot{q})^2 + C(\dot{R}+\dot{r})^2] + A(P+p)(\ddot{P}+\ddot{p}) + B(Q+q)(\ddot{Q}+\ddot{q})$$

$$+C(R+r)(\ddot{R}+\ddot{r}),$$

$$\delta\tau = N\delta\varphi + Q_{\psi}\delta\psi + Q_{\theta}\delta\theta$$

$$+\frac{3}{2}M\Big\{a[(R+r)\delta V_y^0 + V_y^0(\delta R+\delta r) - (Q+q)\delta V_z^0 - V_z^0(\delta Q+\delta q)]$$

$$+b[(P+p)\delta V_z^0 + V_z^0(\delta P+\delta p) - (R+r)\delta V_x^0 - V_x^0(\delta R+\delta r)]$$

$$+c[(Q+q)\delta V_x^0 + V_x^0(\delta Q+\delta q) - (P+p)\delta V_y^0 - V_y^0(\delta P+\delta p)]\Big\}$$

$$+A(P+p)(\delta P+\delta p) + B(Q+q)(\delta Q+\delta q) + C(R+r)(\delta R+\delta r).$$

От равенствата (1), (2) и от (6) в n^0 3 чрез диференциране и вариране получаваме следните равенства, които съдържат само $\ddot{\varphi}$ и $\delta\varphi$:

$$\ddot{P} = Q\ddot{\varphi} + \cdots,\ \ddot{Q} = -P\ddot{\varphi} + \cdots,\ \ddot{R} = \cdots,\ \delta P = Q\delta\varphi +$$

$$\delta Q = -P\delta\varphi + \cdots,\ \delta R = \cdots,$$

$$\ddot{V}_X^0 = V_Y^0\ddot{\varphi} + \cdots,\ \ddot{V}_Y^0 = -V_X^0\ddot{\varphi} + \cdots,\ \ddot{V}_Z^0 = \cdots,\ \delta V_X^0 = V_Y^0\delta\varphi + \cdots,$$

$$\delta V_Y^0 = -V_X^0\delta\varphi + \cdots,\ \delta V_Z^0 = \cdots,$$

$$\dot{r} = \ddot{\varphi} + \cdots,\ \ddot{p} = q\ddot{\varphi} + \cdots,\ \ddot{q} = -p\ddot{\varphi} + \cdots,\ \delta p = q\delta\varphi + \cdots,$$

$$\delta q = -p\delta\varphi + \cdots,\ \delta r = \cdots$$

Тогава функциите $\frac{1}{2}\ddot{T}$ и $\delta\tau$ приемат вида

$$\frac{1}{2}\ddot{T} = M\Big\{(a\dot{V}_Y^0 - b\dot{V}_X^0) + \frac{1}{2}V_Z^0[a(P+p) + b(Q+q)] - \frac{1}{2}(R$$

$$+r)(aV_X^0 + bV_Y^0)\Big\}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}C(\dot{R}+\dot{r})^2 + \frac{1}{2}(A-B)(P+p)(Q+q)\ddot{\varphi} + \cdots,$$

$$\delta\tau = N\delta\varphi + \frac{3}{2}M\{V_Z^0[a(P+p) + b(Q+q)] - (R+r)(aV_X^0 + bV_Y^0)\}\delta\varphi$$

$$+\frac{3}{2}(A-B)(P+p)(Q+q)\delta\varphi + \cdots$$

и уравнението на движението за φ е

$$(5)\quad \begin{cases} C\dot{r} + (B-A)pq = N + \{-C\dot{R} - (B-A)(pQ + qP + PQ) \\ -M(a\dot{V}_Y^0 - b\dot{V}_X^0) + MV_Z^0[a(P+p) + b(Q+q)] - M(R+r)(aV_X^0 + bV_Y^0)\}. \end{cases}$$

Другите две уравнения на движението се получават чрез циклична замяна на величините в това уравнение:

$$A\dot{p}+(C-B)qr=M+\{-A\dot{P}-(C-B)(qR+rQ+RQ)$$
$$-M(b\dot{V}_Z^0-c\dot{V}_Y^0)+MV_X^0[b(Q+q)+c(R+r)]$$
$$(6)\qquad -M(P+p)(bV_Y^0+cV_Z^0)\},$$
$$A\dot{q}+(A-C)rp=N+\{-B\dot{Q}-(A-C)(rP+pR+RP)$$
$$-M(c\dot{V}_X^0-a\dot{V}_Z^0)+MV_Y^0[c(R+r)+a(P+p)]-M(Q+q)(cV_Z^0+aV_X^0)\}.$$

В уравненията (5) и (6) величините $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}, \dot{V}_X^0, \dot{V}_Y^0, \dot{V}_Z^0$ са пълните производни спрямо времето t на $p, q, r, P, Q, R, V_X^0, V_Y^0, V_Z^0$.

Забележка. Изразите, заградени в големите скоби в десните страни на (5) и (6), представляват сумите от моментите на фиктивните сили, приложени в точките P от тялото, съответно спрямо осите oZ, oX, oY. И наистина нека намерим сумата от моментите на тия сили спрямо оста oZ.

Резултантният момент на преносните инерчни сили за точката o:

$$\Sigma(\overrightarrow{oP}\times\vec{F}_1)=-\Sigma m\overrightarrow{oP}\times[\vec{V}^{0\prime}+\vec{\Omega}\times\vec{V}^0+\vec{\Omega}'\times\overrightarrow{oP}+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})].$$

Тук векторите $\vec{V}^{0\prime}$ и $\vec{\Omega}'$ са съответно производните на векторите $\vec{V}^0$ и $\vec{\Omega}$ спрямо осите $oxyz$. Понеже движението на тялото спрямо тези оси отнесохме на осите $oXYZ$, то

$$\vec{V}^{0\prime}=\dot{\vec{V}}^0+\vec{\omega}\times\vec{V}^0,\quad \vec{\Omega}'=\dot{\vec{\Omega}}+\vec{\omega}\times\Omega$$

и

$$\Sigma(\overrightarrow{oP}\times\vec{F}_1)=-\Sigma m\overrightarrow{oP}\times[\dot{\vec{V}}^0+(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\times\vec{V}^0]-\Sigma m\overrightarrow{oP}\times[(\dot{\vec{\Omega}}+\vec{\omega}\times\vec{\Omega})\times\overrightarrow{oP}$$
$$-\Sigma m\overrightarrow{oP}\times[\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})]=-M\overrightarrow{oG}\times\dot{\vec{V}}^0-M\{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})(\vec{V}^0.\overrightarrow{oG})$$
$$(10)\qquad -\vec{V}^0[(\vec{\omega}+\vec{\Omega}).\overrightarrow{oG}]\}-(\dot{\vec{\Omega}}+\vec{\omega}\times\vec{\Omega})\,\Sigma m\overrightarrow{oP}^2+\Sigma m\overrightarrow{oP}[(\dot{\vec{\Omega}}+\vec{\omega}\times\vec{\Omega}).\overrightarrow{oP}]$$
$$+\Sigma m(\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP})(\overrightarrow{oP}.\vec{\Omega})=\{-M(a\dot{V}_Y^0-b\dot{V}_X^0)-M(R+r)(aV_X^0+bV_Y^0)$$
$$+MV_Z^0[a(p+P)+b(q+Q)]-C(\dot{R}+pQ-qP)+(A-B)PQ\}\vec{K}$$
$$+\{\cdots\}\vec{I}+\{\cdots\}\vec{J}.$$

Резултантният момент на центробежните съставни сили за точката:

$$\Sigma(\overrightarrow{oP}\times\vec{F}_2)=-2\Sigma m[\overrightarrow{oP}\times(\vec{\Omega}\times\vec{V}_r^P)]=-2\Sigma m\{\overrightarrow{oP}\times[\vec{\Omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{oP}]\}$$
$$=2\Sigma m(\vec{\omega}\times\overrightarrow{oP})(\overrightarrow{oP}.\vec{\Omega})$$

$$= 2\,\Sigma m [(qZ - rY)\vec{I} + (rX - pZ)\vec{J}\quad (pY - qX)\vec{K}](PX + QY + RZ)$$

(11) $$2(\cdots)\vec{I}\quad 2(\cdots)\vec{J} + 2\,(pQ\,\Sigma\, m\, Y^2 - qP\Sigma\, m\, X^2)\,\vec{K}.$$

Сумата от коефициентите пред $\vec{K}$ на (10) и (11) е равна на сумата от моментите на фиктивните сили спрямо оста oZ; тази сума е точно равна на израза, заграден с големите скоби в уравнението (8), което трябваше да докажем.

8. Релативно движение на въртящително тяло с една постоянна точка от неговата ос. Нека намерим диференциалните уравнения на движението на твърдо въртящително тяло с една постоянна точка o от неговата въртящелна ос oZ спрямо осите $oxyz$, които притежават най-общо движение спрямо постоянната координатна система $o_1\,x_1\,y_1\,z_1$.

Тези уравнения се получават, когато в уравненията (9) и (8) на n^0 7 поставим $B = A$ и $a = b = 0$, понеже центърът на тежестта на тялото G лежи върху неговата въртящелна ос oZ:

$$A\dot{p} + (C - A)qr = L - A\dot{P} - (C - A)\,(qR + rQ + QR)$$
$$+ Mc\dot{V}_Y^0 + MC\,[V_X^0(R + r) - V_Z^0(P + p)],$$

(1) $$A\dot{q} + (A - C)\,rp = M - A\dot{Q} - (A - C)\,(rP + pR + RP)$$
$$- Mc\,\dot{V}_X^0 + MC\,[V_Y^0(R + r) - V_Z^0(Q + q)],$$
$$C\dot{r} = N - C\dot{R},$$

тук p, q, r се дават от (6) в n^0 3, а P, Q, R, V_X^0, V_Y^0, V_Z^0 — от (1) и (2) в n^0 7.

Ние сега ще дадем друга форма на уравненията на движението, като релативното движение на тялото спрямо осите $oxyz$ отнесем не на осите $oXYZ$, свързани с тялото (както това направихме в $n^0$7), а на подвижните оси $oXYZ$ в тялото, дефинирани в $n^0$5: оста oZ е въртящелната ос на тялото, оста oX е перпендикулярна на равнината Zoz и оста oY е перпендикулярна на равнината ZoX.

Ротационните вектори $\vec{\Omega}_1$ и $\vec{\omega}$ съответно на осите $oXYZ$ и на тялото при движението им спрямо осите $oxyz$ се дават от (2) и (3) в $n^0$5:

(2) $$\vec{\Omega}_1 = \dot{\theta}\,\vec{I} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{J} + \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{K},$$
$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{I} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{J} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\,\vec{K} = p\vec{I} + q\vec{J} + r\vec{K},$$

така че

(3) $$p = \dot{\theta},\ q = \dot{\psi}\sin\theta,\ r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = q\,\mathrm{cotg}\,\theta + \dot{\varphi},$$

(2') $$\vec{\Omega}_1 = p\vec{I} + q\vec{J} + q\,\mathrm{cotg}\theta\,\vec{K}.$$

Косинусите на ъглите между осите $oXYZ$ и $oxyz$ се дават от таблицата в $n^0\,5$; тогава аналитичните изрази на векторите

$$\vec{\Omega}=P_1\vec{i}+P_2\vec{j}+P_3\vec{k},\quad \vec{V}^0=V_X^0\vec{i}+V_Y^0\vec{j}+V_Z^0\vec{k}$$

спрямо осите $oXYZ$ са

$$\vec{\Omega}=P\vec{I}+Q\vec{J}+R\vec{K},\quad \vec{V}^0=V_X^0\vec{I}+V_Y^0\vec{J}+V_Z^0\vec{K},$$

гдето

$$(4)\qquad \begin{cases} P=P_1\cos\psi+P_2\sin\psi,\\ Q=-P_1\sin\psi\cos\theta+P_2\cos\psi\cos\theta+P_3\sin\theta,\\ R=P\sin\psi\sin\theta-P_2\cos\psi\sin\theta+P_3\cos\theta,\end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} V_X^0=V_x^0\cos\psi+V_y^0\sin\psi,\\ V_Y^0=-V_x^0\sin\psi\cos\theta+V_y^0\cos\psi\cos\theta+V_z^0\sin\theta,\\ V_Z^0=V_x^0\sin\psi\sin\theta-V_y^0\cos\psi\sin\theta+V_z^0\sin\theta.\end{cases}$$

Абсолютната полукинетична енергия на тялото се дава от (3) или (3′) в $n^0\,7$ при $a=b=0$, $B=A$:

$$(6)\qquad \frac{1}{2}T=\frac{1}{4}MV^{0^2}+\frac{1}{2}Mc\,[V_X^0(Q+q)-V_Y^0(P+p)]$$
$$+\frac{1}{4}\{A\,[(P+p)^2+(Q+q)^2]+C\,(R+r)^2\}.$$

Оттук

$$\frac{1}{2}\ddot{T}=Mc[\dot{V}_X^0(\dot{Q}+\dot{q})-\dot{V}_Y^0(\dot{P}+\dot{p})+\frac{1}{2}Mc\,[\ddot{V}_X^0(Q+q)-\ddot{V}_Y^0(P+p)]$$
$$+\frac{1}{2}Mc\,[V_X^0(\ddot{Q}+\ddot{q})-V_Y^0(\ddot{P}+\ddot{p})]+\frac{1}{2}\{A\,[(\dot{P}+\dot{p})^2+(\dot{Q}+\dot{q})^2+C(\dot{R}+\dot{r})^2]\}$$
$$(7)\qquad +\frac{1}{2}\{A\,[(P+p)(\ddot{P}+\ddot{p})+(Q+q)(\ddot{Q}+\ddot{q})]+C(R+r)(\ddot{R}+\ddot{r})\}.$$

Диференцираме (4), (5) и (3); получаваме

$$(8)\qquad \begin{cases} \dot{P}=-(P_1\sin\psi-P_2\cos\psi)\,\dot{\psi}+\cdots=(Q\cos\theta-R\sin\theta)\dot{\psi}+\cdots,\\ \dot{Q}=-P\cos\theta\dot{\psi}+R\dot{\theta}+\cdots,\quad \dot{R}=P\sin\theta\,\dot{\psi}-Q\,\dot{\theta}+\cdots,\end{cases}$$

$$\ddot{P}=(Q\cos\theta-R\sin\theta)\,\ddot{\psi}+\cdots,\ Q=-P\cos\theta\,\ddot{\psi}+R\,\ddot{\theta}+\cdots,\ \ddot{R}=P\sin\theta\ddot{\psi}-Q\ddot{\theta}+$$

$$(9)\qquad \begin{cases} \dot{V}_X^0=-(V_X^0\sin\psi-V_Y^0\cos\psi)\,\dot{\psi}+\cdots=(V_Y^0\cos\theta-V_Z^0\sin\theta)\,\dot{\psi}+\cdots,\\ \dot{V}_Y^0=-V_X^0\cos\theta\,\dot{\psi}+V_Z^0\,\dot{\theta}+\cdots,\ \dot{V}_Z^0=V_X^0\sin\theta\,\dot{\psi}-V_Y^0\,\dot{\theta}+\cdots\end{cases}$$

$$\ddot{V}_X^0 = (V_Y^0 \cos\theta - V_Z^0 \sin\theta)\ddot{\psi} + \quad \ddot{V}_Y^0 = - V_X^0 \cos\theta\ddot{\psi}$$

$$+ V_Z^0 \ddot{\theta} + \cdots, \ \ddot{V}_Z^0 = V_X^0 \sin\theta\ddot{\psi} - V_Y^0 \ddot{\theta} + \cdots,$$

$$\dot{p} = \ddot{\theta}, \ \dot{q} = \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta, \ \dot{r} = \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\varphi},$$

$$\ddot{p} = \cdots, \ \ddot{q} = 2p\cos\theta\,.\,\ddot{\psi} + q\operatorname{cotg}\theta\,.\,\ddot{\theta}, \ \ddot{r} = -2p\sin\theta.\ddot{\psi} - q\ddot{\theta} +$$

Равенството (7) въз основа на тези равенства приема вида

$$\frac{1}{2}\ddot{T} = Mc\,(\dot{V}_X^0 \sin\theta\,.\,\ddot{\psi} - \dot{V}_Y^0 \ddot{\theta}) + Mc\,V_X^0\,p\cos\theta\,.\,\ddot{\psi} + \frac{1}{2}Mc\,[(V_Y^0\cos\theta$$

$$-V_Z^0\sin\theta)(Q+q)\ddot{\psi} - (-V_X^0\cos\theta.\ddot{\psi} + V_Z^0\ddot{\theta})(P+p) + V_X^0(-P\cos\theta\,.\,\ddot{\psi}$$

$$+ R\ddot{\theta} + q\operatorname{cotg}\theta\,.\,\ddot{\theta}) - V_Y^0(Q\cos\theta - R\sin\theta)\ddot{\psi}] + \frac{1}{2}\{A[(\dot{P}+\dot{p})^2$$

$$+(\dot{Q}+\dot{q})^2] + C(\dot{R}+\dot{r})^2\} + [A(Q+q)\cos\theta - C(R+r)\sin\theta]p\ddot{\psi}$$

$$+\frac{1}{2}\{A[(P+p)(Q\cos\theta - R\sin\theta)\ddot{\psi} + (Q+q)(-P\cos\theta\ddot{\psi} + R\ddot{\theta} + q\operatorname{cotg}\theta\,.\,\ddot{\theta}]$$

$$+C(R+r)(P\sin\theta\,.\,\ddot{\psi} - Q\ddot{\theta} - q\ddot{\theta})\} + \cdots$$

Да изчислим сега функцията

$$\delta\tau = \delta\tau_d + \frac{3}{2}\delta T,$$

гдето T се разглежда като функция само на θ, φ, ψ. Ние намерихме в n^0 5, че $\delta\tau_d = L\,\delta\theta + (M\sin\theta + N\cos\theta)\,\delta\psi + N\delta\psi$. Тогава въз основа на (6)

$$\delta\tau = L\,\delta\theta + (M\sin\theta + N\cos\theta)\,\delta\psi + N\delta\varphi + \frac{3}{2}Mc\,[(Q+q)\,\delta V_X^0 - (P+p)\,\delta V_Y^0$$

$$+V_X^0(\delta Q + \delta q) - V_Y^0(\delta P + \delta p) + \frac{3}{2}\{A[(P+p)(\delta P + \delta p)$$

$$+(Q+q)(\delta Q + \delta q)] + C(R+r)(\delta R + \delta r)\}.$$

Но от (3), (8) и (9) имаме

$$\delta p = 0, \ \delta q = \dot{\psi}\cos\theta\delta\theta = q\operatorname{cotg}\delta\theta, \ \delta r = -\dot{\psi}\sin\theta\,\delta\theta = -q\,\delta\theta,$$

$$\delta P = (Q\cos\theta - R\sin\theta)\,\delta\psi, \ \ \delta Q = -P\cos\theta\delta\psi + R\,\delta\theta, \ \delta R = P\sin\theta\delta\psi - Q\,\delta\theta,$$

$$\delta V_X^0 = (V_Y^0\cos\theta - V_Z^0\sin\theta)\,\delta\psi, \ \delta V_Y^0 = -V_X^0\cos\theta\delta\psi + V_Z^0\delta\theta,$$

$$\delta V_Z^0 = V_X^0\sin\theta\delta\psi - V_Y^0\,\delta\theta.$$

Тогава

$$\delta\tau = L\,\delta\theta + (M\sin\theta + N\cos\theta)\,\delta\psi + N\delta\varphi + \frac{3}{2}Mc\,[(V_Y^0\cos\theta - V_Z^0\sin\theta)(Q+q)\delta\psi$$

$$
\begin{aligned}
&-(-V_X^0\cos\theta\delta\psi+V_Z^0\delta\theta)(P+p)+V_X^0(-P\cos\theta\,\delta\psi+R\,\delta\theta+q\operatorname{cotg}\theta\,\delta\theta\\
(11)\quad&-V_Y^0(Q\cos\theta-R\sin\theta)\,\delta\psi]+\frac{3}{2}\{A[(P+p)(Q\cos\theta-R\sin\theta)\,\delta\psi\\
&+(Q+q)(-P\cos\theta\delta\psi+R\delta\theta+q\operatorname{cotg}\theta\,\delta\theta)]\\
&+C(R+r)(P\sin\theta\,\delta\psi-Q\,\delta\theta-q\,\delta\theta)\}.
\end{aligned}
$$

Диференциранитe уравнения на движението

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{\varphi}}=\frac{\partial\delta\tau}{\partial\delta\varphi},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{\theta}}=\frac{\partial\delta\tau}{\partial\delta\theta},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{\psi}}=\frac{\partial\delta\tau}{\partial\delta\psi}$$

въз основа на (10) и (11) са

$$
\begin{gathered}
C(\dot{R}+\dot{r})=N,\\
Mc[-\dot{V}_Y^0+V_Z^0(P+p)-V_X^0(R+q\operatorname{cotg}\theta)]-A(Q+q)(R+q\operatorname{cotg}\theta)\\
+C(R+r)(Q+q)+A(\dot{P}+\dot{p})=L,\\
Mc[\dot{V}_X^0+V_Z^0(Q+q)-V_X^0(R+q\operatorname{cotg}\theta)]+A(P+p)(R+q\operatorname{cotg}\theta)\\
-C(R+r)(P+p)+A(\dot{Q}+\dot{q})=M,
\end{gathered}
$$

последното уравнение е получено, като сме взели пред вид първото уравнение и сме разделили със $\sin\theta$ неговите две страни.

Тези уравнения написваме така:

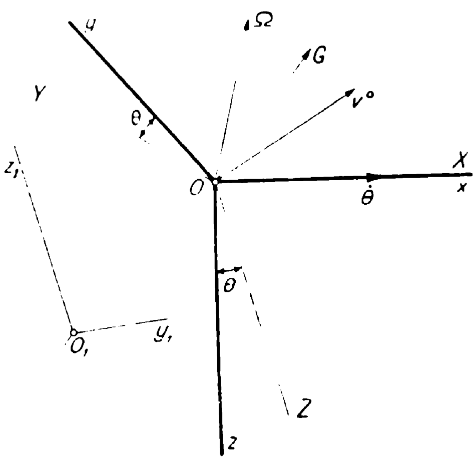
$$
\begin{gathered}
A\dot{p}-(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)q=L+\{-A\dot{P}+(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)Q+(A-C)(qR+QR)\\
-MC[-\dot{V}_Y^0+V_Z^0(P+p)-V_X^0(R+q\operatorname{cotg}\theta)]\},\\
A\dot{q}+(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)p=M+\{-A\dot{Q}-(Aq\operatorname{cotg}\theta-Cr)P-(A-C)(pR+PR)\\
-Mc[\dot{V}_X^0+V_Z^0(Q+q)-V_Y^0(R+q\operatorname{cotg}\theta)]\},\\
C\dot{r}=N+\{-C\dot{R}\}.
\end{gathered}
$$

Лесно се показва, както това направихме в забележката на $n^0\,7$, че изразите, заградени в големите скоби, представляват сумата от моментите на фиктивните сили спрямо осите oX, oY, oZ. Но за този случай производните $\vec{V}^{0\prime}$ и $\vec{\Omega}'$ на $\vec{V}^0$ и $\vec{\Omega}$ спрямо осите $oxyz$ се дават с равенствата

$$\vec{V}^{0\prime}=\dot{\vec{V}}^0+\vec{\Omega}_1\times\vec{V}^0,\quad \vec{\Omega}'=\dot{\vec{\Omega}}+\vec{\Omega}_1\times\vec{\Omega},$$

гдето $\vec{\Omega}_1$ се дава от равенството (2').

9. Релативно движение на твърдо тяло с две постоянни точки. Нека твърдото тяло има две постоянни точки o и o' или постоянна ос oX, която се слива с оста ox на осите $oxyz$, които притежават най-общо движение спрямо постоянните оси $o_1x_1y_1z_1$ (черт. 5). Да намерим релативното движение на тялото спрямо осите $oxyz$. Това движение на тялото отнасяме на осите $oXYZ$, неизменно свързани с него. Положението на тялото спрямо осите $oxyz$ зависи само от ъгъла θ, който сключва оста oZ с оста oz, и ротационния вектор на тялото $\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{I}$. Векторната координата на центъра на тежестта на тялото $\overrightarrow{oG}=a\vec{I}+b\vec{J}+c\vec{K}$. Косинусите на ъглите между осите ox, oy, oz и oX, oY, oZ се дават от таблицата



Черт. 5

	ox	oy	oz
oX	1	0	0
oY	0	$\cos\theta$	$\sin\theta$
oZ	0	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

Изразите на векторите

$$\vec{V}^0=V_x^0\vec{i}+V_y^0\vec{j}+V_z^0\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{\Omega}=P_1\vec{i}+P_2\vec{j}+P_3\vec{k}$$

спрямо осите $oXYZ$ са

$$\vec{V}^0=V_X^0\vec{I} \quad \vec{V}_Y^0\vec{J}+V_Z^0\vec{K} \text{ и } \vec{\Omega}=P\vec{I}+Q\vec{J}+R\vec{K},$$

гдето

$$V_X^0=V_x^0,\quad V_Y^0=V_y^0\cos\theta+V_z^0\sin\theta,\quad V_Z^0=-V_y^0\sin\theta+V_z^0\cos\theta,$$

(1)

$$P=P_1,\quad Q=P_2\cos\theta+P_3\sin\theta,\quad R=-P_2\sin\theta+P_3\cos\theta,$$

V_x^0, V_y^0, V_z^0, P_1, P_2, P_3 са дадени функции на времето t.

Абсолютната полукинетична енергия на тялото се дава от равенството (3) в n^0 7, в което трябва да поставим $\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{I}$:

$$\frac{1}{2}T=\frac{1}{4}MV^{0^2}+\frac{1}{2}M\vec{V}^0[(\vec{\Omega}+\dot{\theta}\vec{I})\times\overrightarrow{oG}+\frac{\Sigma m}{4}[(\vec{\Omega}+\dot{\theta}\vec{I})\times\overrightarrow{oP}]^2$$

или

$$\frac{1}{2}T=\frac{1}{4}MV^{0^2}+\frac{M}{2}\{a(V_Y^0R-V_Z^0Q)+b[V_Z^0(P+\dot{\theta})-V_X^0R]$$

$$+c[V_X^0Q-V_Y^0(P+\dot{\theta})]\}+\frac{1}{4}[A(P+\dot{\theta})^2+BQ^2+CR^2]$$

$$-\frac{1}{2}[DQR+ER(P+\dot{\theta})+F(P+\dot{\theta})Q],$$

гдето A, B, C и D, E, F са инерчните моменти и инерчните произведения за осите $oXYZ$.

Сумата от виртуалните работи на силите

$$\delta\tau = L\,\delta\theta + \frac{3}{2}\delta T,$$

гдето T се разглежда като функция само на θ; L е сумата от моментите на дадените сили спрямо оста oX.

Като вземем пред вид, че първите производни на величините в (1) не съдържат $\ddot{\theta}$, а така също и вторите производни на V_X^0 и P, тогава

$$\frac{1}{2}\ddot{T} = \frac{1}{2}M\{a(\ddot{V}_Y^0 R + V_Y^0\ddot{R} - \ddot{V}_Z^0 Q - V_Z^0\ddot{Q}) + b[\ddot{V}_Z^0(P+\dot{\theta}) + 2\dot{V}_Z^0\ddot{\theta} - V_X^0\ddot{R}]$$

$$+ c[V_X^0\ddot{Q} - \ddot{V}_Y^0(P+\dot{\theta}) - 2\dot{V}_Y^0\ddot{\theta}]\} + \frac{1}{2}[A(\dot{P}+\ddot{\theta})^2 + BQ\ddot{Q} + CR\ddot{R}]$$

$$-\frac{1}{2}\{D(R\ddot{Q} + Q\ddot{R}) + E[(P+\dot{\theta})\ddot{R} + 2\dot{R}\ddot{\theta}] + F[\ddot{Q}(P+\dot{\theta}) + 2\dot{Q}\ddot{Q}]\}.$$

Понеже от (1) имаме $\delta V_X^0 = 0$, $\delta P = 0$, то

$$\delta\tau = L\,\delta\theta + \frac{3}{2}M\{a(R\,\delta V_Y^0 + V_Y^0\delta R - V_Z^0\delta Q - Q\,\delta V_Z^0)$$

$$+ b[(P+\dot{\theta})\,\delta V_Z^0 - V_X^0\,\delta R] + c[V_X^0\,\delta Q - (P+\dot{\theta})\,\delta V_Y^0]\}$$

$$+\frac{3}{2}\{BQ\,\delta Q + CR\,\delta R - [D(R\,\delta Q + Q\,\delta R) + E(P+\dot{\theta})\,\delta R + F(P+\dot{\theta})\,\delta Q]\}.$$

Но от (1) получаваме

$$\ddot{V}_Y^0 = V_Z^0\ddot{\theta} + \cdots,\ \ddot{V}_Z^0 = -V_Y^0\ddot{\theta} + \cdots,\ \ddot{Q} = R\ddot{\theta} + \cdots,\ \ddot{R} = -Q\ddot{\theta} + \cdots,$$

$$\delta V_Y^0 = V_Z^0\delta\theta + \cdots,\ \delta V_Z^0 = -V_Y^0\delta\theta + \cdots,\ \delta Q = R\,\delta\theta + \cdots,\ \delta R = -Q\,\delta\theta + \cdots,$$

тогава функциите $\frac{1}{2}\ddot{T}$ и $\delta\tau$ приемат вида

$$\frac{1}{2}\ddot{T} = M(b\dot{V}_Z^0 - c\dot{V}_Y^0)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}M[V_X^0(bQ + cR) - (P+\dot{\theta})(bV_Y^0 + cV_Z^0)]\ddot{\theta}$$

(2) $$+\frac{1}{2}A(\dot{P}+\ddot{\theta})^2 - (E\dot{R} + F\dot{Q})\ddot{\theta} - \frac{1}{2}[(C-B)QR + D(R^2 - Q^2)$$

$$-(P+\dot{\theta})(EQ - FR)]\ddot{\theta} + $$

$$\delta\tau = L\,\delta\theta + \frac{3}{2}\{M[V_X^0(bQ + cR) - (P+\dot{\theta})(bV_Y^0 + cV_Z^0)$$

(3)

$$-[(C-B)\,QR+D\,(R^2-Q^2)-(P+\dot\theta)\,(EQ-FR)]\}\,\delta\theta$$

и уравнението на движението на тялото

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ddot T}{\partial \ddot\theta}=\frac{\partial\,\delta\tau}{\partial\,\delta\theta}$$

въз основа на (2) и (3) е

(4) $$A\ddot\theta=L+\{-M(b\dot V_Z^0-c\dot V_Y^0)+M[V_X^0\,(bQ+cR)-(P+\dot\theta)\,(bV_Y^0+cV_Z^0)]$$
$$-A\dot P+(ER+FQ)-[(C-B)\,QR+D\,(R^2-Q^2)-(P+\dot\theta)\,(EQ-FR)\}.$$

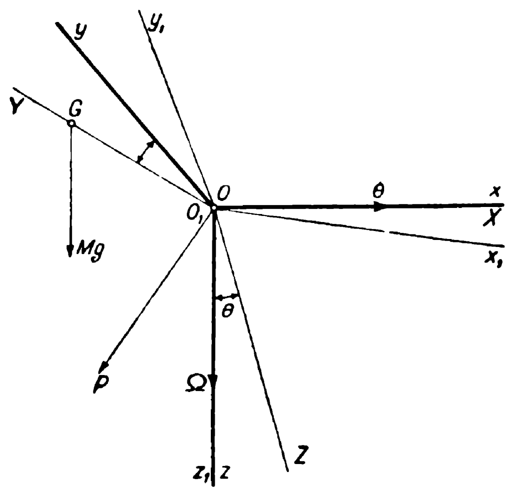
Лесно е да се провери, че изразът, заграден с големите скоби, представлява сумата от моментите на фиктивните сили спрямо оста oX:

$$[\Sigma\,(\vec{oP}\times\vec{F}_1)+\Sigma\,(\vec{oP}+\vec{F}_2)]\,.\,\vec{I}=\{\cdots\}.$$

Ако осите $oXYZ$, свързани с тялото, са главни инерчни оси, то уравнението на движението е

$$A\ddot\theta=L-M\,[b\dot V_Z^0-c\dot V_Y^0-V_X^0\,(bQ+cR)$$

(5) $$+(P+\dot\theta)\,(bV_Y^0+cV_Z^0)]-A\dot P-(C-B)\,QR.$$



Черт. 6

Това уравнение може да се получи и от първото уравнение на (6) в n^0 7, когато оста oX се слее с ox. И наистина при тези случаи $\psi=0$, $\varphi=0$ (виж черт. 4); тогава $p=\dot\theta$, $q=0$, $r=0$ и от първото уравнение на (6) в n^0 7 получаваме уравнението (5).

Пример. Да се намери движението на едно твърдо тяло, което се върти около хоризонталната ос ox, която обикаля с постоянна ъгълна скорост $\vec\Omega$ около постоянната вертикална ос oz. Центърът на тежестта G на тялото лежи в равнината, минаваща през точката o и е перпендикулярна на оста ox (черт. 6).

При този случай оста o_1z_1 на осите $o_1x_1y_1z_1$ се слива с оста oz на осите $oxyz$ и оста oY на свързаните с тялото оси $oXYZ$ се слива с oG. Проекциите P, Q, R на $\vec\Omega$ върху осите oX, oY, oZ са $P=0$, $Q=\Omega\sin\theta$, $R=\Omega\cos\theta$; освен това величините V_X^0, V_Y^0, V_Z^0, a и c са равни на нула. Моментът спрямо оста oX на теглото $M\vec g$:

$$L=(\vec{oG}\times M\vec g)\,.\,\vec I=(b\vec J\times Mg\vec k)\,.\,\vec I=Mgb\,[\vec J\times(\sin\theta\,\vec J+\cos\theta\,\vec K)]\,.\,\vec I$$

$$= Mgb \cos\theta.$$

Прочее уравнението на движението (5) за случая е

$$A\ddot{\theta} = Mgb\cos\theta - (C - B)\,\Omega^2\cos\theta\sin\theta. \tag{6}$$

Забележка. Нека намерим диференциалното уравнение на движението тялото направо, т. е. без да използуваме уравнението (5).

Понеже релативното движение на тялото спрямо осите $oxyz$ е въртене около оста ox с ъглна скорост $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{I}$, то релативната скорост $\vec{V}_r^p$ на точката P от тялото е равна на $\dot{\theta}\vec{I}\times\overrightarrow{oP}$. Преносната скорост $\vec{V}_e^p$ на точката P, считана свързана с осите $oxyz$, е равна на $\vec{\Omega}\times\overrightarrow{oP}$, понеже движението на осите $oxyz$ спрямо $o_1x_1y_1z_1$ е въртене с ъглна скорост $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{k} = \Omega(\sin\theta\,\vec{J} + \cos\theta\,\vec{K}) = Q\vec{J} + R\vec{K}$. Тогава абсолютната полукинетична енергия на тялото

$$\frac{1}{2}\,T = \frac{1}{4}\,\Sigma m\,\vec{V}_a^{p^2} = \frac{1}{4}\Sigma m\,[(\theta'\vec{I} + Q\vec{J} + R\vec{K})\times\overrightarrow{oP}]^2$$

$$= \frac{1}{4}(A\dot{\theta}^2 + BQ^2 + CR^2).$$

Оттук

$$\frac{1}{2}\,\ddot{T} = \frac{1}{2}(A\ddot{\theta}^2 + BQ\ddot{Q} + CR\ddot{R}) + $$

Функцията

$$\delta\tau = L\,\delta\theta + \frac{3}{2}\delta\,T = L\delta\theta + \frac{3}{2}(BQ\,\delta\,Q + CR\,\delta\,R\Big]\,.$$

Но от $Q = \Omega\sin\theta$, $R = \Omega\cos\theta$ получаваме

$$\dot{Q} = R\dot{\theta},\ \dot{R} = -Q\,\dot{\theta},\ \ddot{Q} = R\ddot{\theta} + \cdots, \ddot{R} = -Q\,\ddot{\theta} + \cdots, \delta\,Q = R\,\delta\theta,\ \ \delta\,R = -Q\,\delta\theta.$$

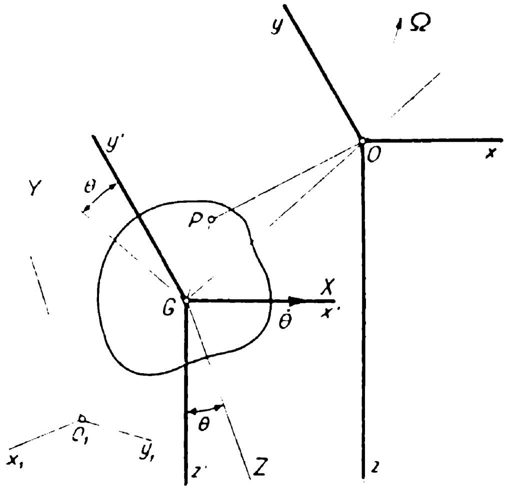
Тогава

$$\frac{1}{2}\,\ddot{T} = \frac{1}{2}[A\,\ddot{\theta}^2 + (B - C)\,\Omega^2\cos\theta\sin\theta] + \cdots,\ \ \delta\tau = Mgl\cos\theta\delta\theta$$

$$+ \frac{3}{2}(B - C)\,\Omega^2\cos\theta\sin\theta\,\delta\theta$$

и уравнението на движението е уравнението (6).

10. Релативно движение на твърдо тяло, което може да се движи само успоредно на дадена равнина. Нека през центъра на тежестта G на едно твърдо тяло, което може да се движи само успоредно на една дадена равнина, прекараме в неговото начално положение равнината yoz, успоредна на дадената равнина; тогава точката G и всичките точки от тялото, които в началния момент са били в равнината yoz, ще останат в тая равнина през време на движението на тялото (черт. 7). По този начин се образува едно сечение от тялото (една равнинна фигура) в равнината yoz. Положението на тялото спрямо осите $oxyz$ е определено, ако знаем положението на сечението (на равнинната фигура) спрямо осите oyz. Това положение зависи от три параметъра: координатите (η, ζ) на центъра на тежестта G спрямо осите oyz и ъгълът θ, който образува оста GZ, свързана със сечението, с оста Gz'; успоредна на oz. Осите $Gx'y'z'$ са успоредни на осите $oxyz$ и осите $GXYZ$ са свързани със сечението.



Черт. 7

Видяхме в $n^0 3$, че абсолютната полукинетична енергия на твърдо тяло спрямо осите $o_1 x_1 y_1 z_1$ е равна на абсолютната полукинетична енергия спрямо тези оси на цялата маса M на тялото, концентрирана в неговия център на тежестта, увеличена с абсолютната полукинетична енергия на тялото спрямо осите $Gx_1' y_1' z_1'$, успоредна на осите $o_1 x_1 y_1 z_1$:

$$(1) \qquad \frac{1}{2} T = \frac{M}{4} [(\vec{v}^0 + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{oG} + \vec{v}_r^G)^2 + \frac{1}{4} \Sigma m [(\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \times \overrightarrow{GP}]^2$$

$$= \frac{1}{2} T_G + \frac{1}{2} T_1,$$

гдето за този случай на твърдо тяло във функцията $\frac{1}{2} T_G$

$$\vec{v}^0 = v_x^0 \vec{i} + v_y^0 \vec{j} + v_z^0 \vec{k}, \ \vec{\Omega} = P_1 \vec{i} + P_2 \vec{j} + P_3 \vec{k}, \ \overrightarrow{oG} = \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}, \ \vec{v}_r^G = \dot{\eta} \vec{j} + \dot{\zeta} \vec{k},$$

а във функцията $\frac{1}{2} T_1$

$$\vec{\Omega} = P \vec{I} + Q \vec{J} + R \vec{K}, \ \overrightarrow{GP} = x \vec{I} + y \vec{J} + z \vec{K}, \ \vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{I},$$

понеже положението на сечението (или на осите GYZ) спрямо осите $Gy'z'$ зависи само от ъгъла θ и ротационния вектор на сечението $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{I}$; неговата директриса е оста Gx' (или GX), перпендикулярна на сечението.

Тогава абсолютната полукинетична енергия на тялото

$$\frac{1}{2} T = \frac{M}{4} [(v_x^0 + P_2 \zeta - P_3 \eta)^2 + (v_y^0 - P_1 \zeta + \dot{\eta})^2 + (v_z^0 + P_1 \eta + \dot{\zeta})^2]$$

$$(2) \qquad + \frac{1}{4} [A (P + \dot{\theta})^2 + BQ^2 + CR^2] - \frac{1}{2} [DQR + ER (P + \dot{\theta}) + F (P + \dot{\theta}) Q],$$

гдето $P=P_1$, $Q=P_2\cos\theta+P_3\sin\theta$, $R=-P_2\sin\theta+P_3\cos\theta$. Като вземем пред вид, че $\dot P=\cdots$, $\dot Q=R\dot\theta$, $\dot R=-Q\dot\theta$, оттук получаваме функцията

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}\ddot T = \frac{M}{2}&[(v_y^0-P_1\dot\zeta-\dot P_1\zeta+\ddot\eta)^2+(v_z^0+P_1\dot\eta+\dot P_1\eta+\ddot\zeta)^2\\ &+(v_x^0+P_2\zeta-P_3\eta)(P_2\ddot\zeta-P_3\ddot\eta)-(v_y^0-P_1\zeta+\dot\eta)P_1\ddot\zeta\\ &+(v_z^0+P_1\eta+\dot\zeta)P_1\ddot\eta]+\frac{1}{2}A(\dot P+\ddot\theta)^2-(E\dot R+F\dot Q)\ddot\theta\\ &-\frac{1}{2}[(C-B)QR+D(R^2-Q^2)-(P+\dot\theta)(EQ-FR)]\ddot\theta+\cdots \end{aligned}$$

Да изчислим сега функцията $\delta\tau$. Нека

$$\vec F=X_1\vec i+X_2\vec j+X_3\vec k=X\vec I+Y\vec J+Z\vec K$$

е дадената сила, приложена на точка P от твърдото тяло с векторна координата $\vec{oP}=\vec{oG}+\vec{GP}$. За едно виртуално преместване на тялото, съвместимо с положената му връзка — да се движи успоредно на равнината yoz, виртуалното преместване на точката P от тялото е $\delta\vec{oP}=\delta\vec{oG}+\delta\vec{GP}$, гдето $\delta\vec{oG}$ е вариацията на $\vec{oG}$ спрямо осите $oxyz$, а $\delta\vec{GP}$ — вариацията на $\vec{GP}$ спрямо осите $Gx'y'z'$. Понеже скоростта $\vec{GP}$ на точката P спрямо осите $Gx'y'z'$ е равна на $\vec\omega\times\vec{GP}=\dot\theta\vec I\times\vec{GP}$, то вариацията $\delta\vec{GP}$ на $\vec{GP}$ е равна на $\delta\theta\vec I\times\vec{GP}$. Тогава виртуалната работа $\vec F.\delta\vec{oP}$ на силата $\vec F$ за това преместване на точката P е равна на $\vec F.\delta\vec{oG}+\vec F.(\vec I\times\vec{GP})\,\delta\theta$, гдето векторите в първото скаларно произведение са отнесени на осите $oxyz$, а във второто — на осите $GXYZ$.

Прочее сумата от виртуалните работи на дадените сили

$$\delta\tau_A=\Sigma\vec F.\delta\vec{oG}+\vec I.\Sigma(\vec{GP}\times\vec F)\,\delta\theta$$

и като вземем пред вид, че $\delta P_1=\delta P_2=\delta P_3=\delta P=0$, $\delta Q=R\delta\theta$, $\delta R=\quad Q\,\theta$, то функцията

$$(4)\qquad \begin{aligned} \delta\tau=\delta\tau_A+\frac{3}{2}\delta T&=\Sigma X_2\delta\eta+\Sigma X_3\delta\zeta+\Sigma(yZ-zY)\delta\theta,\\ +\frac{3}{2}\Big\{&M[(v_x^0+P_2\zeta-P_3\eta)(P_2\delta\zeta-P_3\delta\eta).(v_y^0-P_1\zeta+\dot\eta)P_1\delta\zeta\\ &+(v_z^0+P_1\eta+\dot\zeta)P_1\delta\eta]\\ &-[(C-B)QR+D(R^2-Q^2)-(P+\dot\theta)(EQ-FR)]\delta\theta. \end{aligned}$$

Въз основа на (3) и (4) намираме диференциалните уравнения на движението

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{\eta}}=\frac{\partial \delta\tau}{\partial \delta\eta},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{\zeta}}=\frac{\partial \delta\tau}{\partial \delta\zeta},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{\theta}}=\frac{\partial \delta\tau}{\partial \delta\theta}. \tag{5}$$

Забележка. Нека въведем на тялото нова връзка, изразена с крайно или диференциално уравнение:

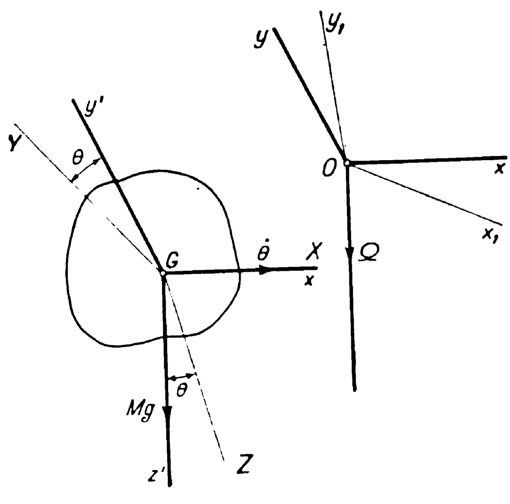
$$f(\eta, \zeta, \theta, t)=0 \text{ или } Ad\eta+Bd\zeta+Cd\theta+Ddt=0,$$

A, B, C, D са функции на η, ζ, θ, t. От тези уравнения имаме

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}\delta\eta+\frac{\partial f}{\partial \zeta}\delta\zeta+\frac{\partial f}{\partial \theta}\delta\theta=0,\quad A\delta\eta+B\delta\zeta+C\delta\theta=0.$$

При този случай ние можем да изразим например $\ddot{\theta}$ във функция от $\ddot{\eta}$ и $\ddot{\zeta}$ и $\delta\theta$ — във функция от $\delta\eta$ и $\delta\zeta$; тогава изразът (3) на $1/2\,\ddot{T}$ става функция на $\ddot{\eta}$ и $\ddot{\zeta}$, а изразът (4) на $\delta\tau$ — функция на $\delta\eta$ и $\delta\zeta$ и уравненията на движението са

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}_1}{\partial \ddot{\eta}}=\frac{\partial \delta\tau_1}{\partial \delta\eta},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}_1}{\partial \ddot{\zeta}}=\frac{\partial \delta\tau_1}{\partial \delta\zeta}.$$



Черт. 8

Пример. Да се намери движението на тежка хомогенна плоча, с незначителна дебелина и с каквато и да е форма, поставена да се движи във вертикалната равнина yoz, която равнина се върти с постоянна ъгълна скорост $\vec{\Omega}$ около постоянната вертикална ос oz (черт. 8).

За случая оста oz на осите $oxyz$ се слива с оста o_1z_1 на осите $o_1x_1y_1z_1$.

Тогава

$$\vec{v}^0=0,\quad \vec{\Omega}=\Omega\vec{k},\quad P_1=0,\quad P_2=0,\quad P_3=\Omega,$$

$$\vec{\Omega}=\Omega(\sin\theta\vec{J}+\cos\theta\vec{K}),\ P=0,\ Q=\Omega\sin\theta,\ R=\Omega\cos\theta$$

и от (2) имаме

$$\frac{1}{2}T=\frac{M}{4}(\Omega^2\eta^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2)+\frac{1}{4}(A\dot{\theta}^2+B\Omega^2\sin^2\theta+C\Omega^2\cos^2\theta) \tag{6}$$

$$-\frac{1}{2}\Omega^2D\cos\theta\sin\theta-\frac{1}{2}\Omega(E\cos\theta+F\sin\theta)\dot{\theta}.$$

Оттук имаме

$$\frac{1}{2}\ddot{T}=\frac{M}{2}(\Omega^2\eta\ddot{\eta}+\ddot{\eta}^2+\ddot{\zeta}^2)+\frac{1}{2}A\ddot{\theta}^2+\frac{\Omega^2}{2}[(B-C)\cos\theta\sin\theta$$

$$-D(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]\ddot{\theta}-\frac{3\Omega}{2}(-E\sin\theta+F\cos\theta)\dot{\theta}\ddot{\theta}+\cdots \tag{7}$$

Дадената сила е теглото $M\vec{g}$, приложено в точката G, с директриса оста Gz'. Виртуалната работа на теглото

$$\delta\tau_d=M\vec{g}\,.\,\delta\overrightarrow{oG}=Mg\vec{k}\,.\,(\delta\eta\vec{j}+\delta\zeta\vec{k})=Mg\,\delta\zeta$$

и въз основа на (6) функцията

$$\delta\tau=Mg\,\delta\zeta+\frac{3}{2}\{M\Omega^2\eta\delta\eta+\Omega^2[(B-C)\cos\theta\sin\theta$$

$$-D\cos 2\theta]-\Omega(-E\sin\theta+F\cos\theta)\dot{\theta}\delta\theta\}. \tag{8}$$

Като вземем пред вид (7) и (8), уравненията на движението (5) са

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\Omega^2\eta,\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=g,$$

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}=\Omega^2(B-C)\cos\theta\sin\theta-D\cos 2\theta.$$

Ако предположим, че осите oX, oY, oZ са главни инерчни оси, то последното уравнение става

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{\Omega^2(C-B)}{A}\cos\theta\sin\theta.$$

Интегрирани, първите две уравнения на движението дават

$$\eta=Ae^{\Omega t}+Be^{-\Omega t},\quad \zeta=\frac{1}{2}gt^2+\zeta_0't+\zeta_0,$$

гдето A и B са две произволни константи; ζ_0 и ζ_0' са съответно проекциите на центъра на тежестта G и на началната му скорост върху оста oz. Последното уравнение показва, че проекцията на G върху оста oz се движи равномерно ускорително.

Третото уравнение, след като поставим в него

$$A=M(b^2+c^2),\ C-B=M(b^2-c^2),$$

взема вида

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\Omega^2\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\cos\theta\sin\theta,$$

b^2 и c^2 са инерчните радиуси спрямо осите GY и GZ, които зависят от формата на плочата.

Ако инерчният елипсоид за центъра на тежестта е вращателен около оста GX, перпендикулярна на равнината на плочата, то $b^2 = c^2$ и имаме $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = \text{const}$, т. е. движението на плочата около центъра на тежестта е ротация с постоянна ъглна скорост.

Ако инерчният момент спрямо оста GZ е по-голям от тоя спрямо оста GY, т. е. ако $b^2 - c^2 > 0$, то като означим

$$\Omega^2 \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} = \lambda^2, \text{ гдето } \lambda^2 > 0,$$

получаваме

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\lambda^2 \cos\theta \sin\theta.$$

Като интегрираме и забележим с h константата при интегрирането, имаме

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \lambda^2 (h - \sin^2\theta) \quad \text{или} \quad \lambda\, dt = \int \frac{d\theta}{\pm\sqrt{h - \sin^2\theta}};$$

θ се изразява с времето чрез елиптична функция. Знакът $+$ или $-$ зависи от това, дали θ расте, или се намалява с времето.

Ако $h > 1$, то ъгълът θ обикаля всякога в една и съща посока и взема всички възможни стойности.

Ако $0 < h < 1$ и нека $h = \sin^2\alpha$, то

$$\lambda t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta}}$$

ъгълът θ варира от двете страни на оста Gz', като достига до границите $+\alpha$ и $-\alpha$.

За безкрайно малки осцилации имаме

$$\lambda t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}$$

или като интегрираме,

$$\lambda t = \arc\sin\frac{\theta}{\alpha},$$

гдето константата при интегрирането е нула, ако имаме начални условия за $t = 0$, $\theta = 0$.

Оттук за $\theta = \alpha$ имаме $\lambda t = \frac{\pi}{2}$; за $\theta = -\alpha$, $\lambda t = -\frac{\pi}{2}$. Тогава времето T, нужно за една пълна осцилация, се дава от равенството $\lambda T = 2\pi$, т. е.

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\Omega}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}};$$

това време е по-голямо от времето, нужно за едно пълно обръщане около оста oz на равнината на плочата.

Постъпила на 25. III. 1959 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ценов Ив. Годишник на СДУ—ФМФ. Т. 49, 1954/55, кн. I, ч II.
2. Tzénoff Iv. Comptes Rendus de l'Acad. Bulg. des Sc. T. 9, № 3, 1956.
3. Ценов Ив. Годишник на СДУ—ФМФ. Т. 47, 1950/51—1951/52, кн. I, ч. I.
4. Ценов Ив. Годишник на СДУ—ФМФ. Т. 13—14, 1916/17—1917/18.

ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ УРАВНЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ К ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Ив. Ценов

РЕЗЮМЕ

1. Было найдено [1] и [2], что уравнение движения голономной материальной системы является:

$$\text{(I)}\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial \delta\tau}{\partial \delta_{q_i}},\quad i = 1,\ 2\ldots,\ s,$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_s$ являются обобщенными координатами этой системы; $1/2\ \ddot{T}$ является второй полной производной полукинетической энергии системы $1/2\ T$; $\delta\tau$ — сумма виртуальных работ данных сил и новых сил, происходящих из функции сил $2/3$ T, рассматриваемой в качестве функции только обобщенных координат и времени t.

Уравнения (I) не изменяют своего вида, если материальная система является неголономной с линейными дифференциальными связями и если заменить обобщенные скорости новыми величинами, связанными с этими скоростями через линейные дифференциальные зависимости. Таким образом, уравнениями движения голономной системы являются (I) и (II), а для неголономных систем — (II) и (IV).

Эти уравнения мы применили к относительному движению твердых тел относительно координатной системы $oxyz$, которая обладает общим движением относительно постоянной координатной системы $o_1x_1y_1z_1$. Движение координатной системы $oxyz$ относительно координатной системы $o_1x_1y_1z_1$ является результатом двух одновременных движений: I) вращение $\vec{\Omega}$ координатной системы $oxyz$ относительно триганника $ox_1'y_1z_1'$, оси

которого являются соответственно параллельными осям трigранника $o_1x_1y_1zo$; вращение происходит вокруг оси, проходящей через точку o и 2) перемещение этого триgранника относительно координатной системы $o_1x_1y_1z_1$; это перемещение определяется скоростью $\vec{v}^0$ точки o. Дано движение координатной системы $oxyz$ относительно координатной системы $o_1x_1y_1z_1$, т. е. векторы $\vec{\Omega}$ и $\vec{v}^0$ являются данными функциями времени t и помещенных на осях координатной системы $oxyz$.

2. Было применено уравнение (I) для нахождения векторного дифференциального уравнения относительного движения материальной точки $P(x_1y_1z)$. Функцию $1/2\ T$ получили путем дифференциации функции $1/2\ T$ — абсолютной полукинетической энергии точки P относительно осям координатной системы $oxyz$, принятых за постоянные. В качестве следствия этого уравнения вывели уравнение, которое выражает теорему Кориолиса.

3. Нашли дифференциальное уравнение относительного движения свободного твердого тела. Движение центра тяжести G тела определено в $n^0\,2$. Дифференциальные уравнения, выражаюшие движение тела около центра тяжести G, нашли тремя способами: путем дифференцирования абсолютной кинетической энергии тела, вычисленной для осей $Gx'_1y_1z'_1$, параллельных осям $o_1x_1y_1z$ относительно осей $Gxyz$, связанных с телом, и относительно осей $Gx'_1y'_1z'_1$; и, наконец, заменив обобщенные скорости $\dot{\varphi},\dot{\psi},\dot{\theta}$ алгебраическими проекциями p,q,r вектора вращения $\vec{\omega}$ тела, расположенных на осях Gx, Gy, GZ применили уравнение (I) и (III).

4. Были применены уравнения (III) и (IV) для нахождения относительного движения сферы, вынужденной двигаться по горизонтальной плоскости земной поверхности, предположив, что земля вертится с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$ около своей оси. Рассмотрены случаи, когда плоскость является идеально гладкой и идеально шероховатой.

5. Применив уравнение (I) и (III), двумя способами нашли уравнение относительного движения свободно вращающегося твердого тела относительно осей $Gx'y'z'$, параллельных осям $oxyz$; движение тела отнесли к осям подвижной координатной системы $GXYZ$ в теле, определенных следующим образом: ось GZ является осью вращения тела, ось GX нормальная плоскости $z'GZ$ и ось GY — перпендикулярна плоскости XGZ.

6. Было найдено уравнение движения вращающегося тела, вынужденного двигаться по горизонтальной плоскости, которая вертится с постоянной угловой скоростью вокруг своей постоянной вертикальной оси. Были применены уравнения (I) в том случае, когда плоскость является идеально ровной, и уравнение (IV) в том случае, когда плоскость идеально шероховатая.

7. Применив уравнение (I), нашли уравнение относительного движения твердого тела с одной постоянной точкой o относительно осей $oxyz$, движение которых относительно осей $ox_1y_1z_1$ определено вектором вращения $\vec{\Omega}$ и вектором перемещения V^0.

8. Было найдено уравнение относительного движения вращающегося тела с одной постоянной точкой o, находящейся на его оси вращения относительно осей координатной системы $oxyz$, отнеся движение к осям $oxyz$, являющимися подвижными в теле.

9. Было рассмотрено относительное движение твердого тела с двумя постоянными точками o и o' или с постоянной осью oX, которая совпадает с осью их координатной системы $oxyz$, имеющими обобщенное движение тела относительно осей $o_1x_1y_1z_1$, отнеся движение к осям $OXYZ$, неизменно связанных с телом. Полученное уравнение применили на одном примере.

10. Нашли уравнение относительного движения твердого тела, которое движется только параллельно данной плоскости. Полученные уравнения были применены на одном примере.

APPLICATION DES NOUVELLES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE ANALYTIQUE AU MOUVEMENT RELATIF DES CORPS SOLIDES

Iv. Tzénoff

RÉSUMÉ

1. Dans deux travaux antérieurs [1] et [2] nous avons montré que les équations du mouvement d'un système matériel holonome sont

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial \delta\tau}{\partial \delta q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_s$ étant les coordonnées généralisées du système: $\frac{1}{2}\ddot{T}$ — la seconde dérivée totale de la demi-énergie cinétique $\frac{1}{2}T$ du système $\delta\tau$ — la somme des travaux virtuels des forces données et de forces nouvelles dérivant d'une fonction de forces $\frac{3}{2}T$, considérée comme fonction des seules coordonnées généralisées et du temps t.

Les équations (I) conservent leur forme lorsque le système matériel est non holonome à liaisons différentielles linéaires et lorsqu'on remplace les vitesses généralisées par de nouvelles quantités, liées avec les vitesses généralisées par des relations différentielles linéaires. Les équations du mouvement d'un système holonome sont (I) et (II) et d'un système non holonome— (II) et (IV).

Nous avons appliqué ces équations au mouvement relatif des corps solides par rapport aux axes $oxyz$ effectuant le mouvement le plus général

par rapport aux axes fixes $o_1x_1y_1z_1$. Le mouvement de $oxyz$ par rapport à $o_1x_1y_1z_1$ résulte de deux mouvements simultanés: 1) une rotation $\vec{\Omega}$ de $oxyz$ par rapport au trièdre $ox'_1y'_1z'_1$ dont les axes sont parallèles aux axes $o_1x_1y_1z_1$; l'axe de rotation passe le point o; et 2) une translation de ce trièdre par rapport à $o_1x_1y_1z_1$; la vitesse de translation est la vitesse $\vec{v}^0$ du point o. Le mouvemet de $oxyz$ par rapport à $o_1x_1y_1z_1$ est donné, c'est-à-dire les vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{v}^0$, rapportés aux axes $oxyz$, sont des fonctions données du temps t.

2. Nous avons appliqué les équations (I) pour trouver l'équation différentielle vectorielle du mouvement relatif d'un point matériel P. Nous avons obtenu la fonction $\frac{1}{2}\ddot{T}$, en dérivant la fonction $\frac{1}{2}T$ — la demi-énérgie cinétique absolue du point P par rapport aux axes $oxyz$ considérés comme fixes. Comme une conséquence de cette équation nous avons déduit l'équation exprimant le théorème de Coriolis.

3. En appliquant les équations (I) et (III), nous avons obtenu les équations différentielles du mouvement relatif d'un corps solide libre. Le mouvement du centre de gravité G du corps est déterminé dans le n^0 2. Les équations différentielles du mouvement du corps autour du centre de gravité G ont été obtenues de trois manières: 1) et 2) en dérivant la demi-énergie cinétique absolue du corps, calculée pour les axes $Gx'_1y'_1z'_1$ parallèles aux axes $o_1x_1y_1z_1$, par rapport aux axes $GXYZ$, liés au corps, et par rapport aux axes $Gx'_1y'_1z'_1$; 3) en remplaçantl es vitesses généralisées $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ par les projections algébriques p, q, r du vecteur de rotation $\vec{\omega}$ du corps sur les axes GX, GY, GZ.

4. Nous avons appliqué les équations (III) et (IV) pour trouver le mouvement relatif d'une sphère sur un plan horizontal de la surface terrestre en supposant que la Terre tourne uniformément autour de son axe avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante. On a étudié les cas où le plan est parfaitement poli et parfaitement rugueux.

5. A l'aide des équations (I) et (III) nous avons obtenu de deux manières les équations du mouvement relatif d'un corps solide de révolution libre par rapport aux axes $Gx'y'z'$, parallèles aux axes $oxyz$; nous avons rapporté le mouvement à des axes mobiles $GXYZ$ dans le corps, définis de le manière suivante: GZ est l'axe de révolution du corps, GX — la normale au plan $z'GZ$, GY — perpendiculaire au plan XGZ.

6. Nous avons trouvé les équations du mouvement d'un corps de révolution sur un plan horizontal qui tourne autour d'un axe vertical fixe avec une vitesse angulaire constante. Nous avons appliqué les équations (I) au cas, où le plan est parfaitement rugueux.

7. En appliquant les équations (I), nous avons obtenu les équations du mouvement relatif d'un corps solide ayant un point fixe o coïncidant avec l'origine o du système $oxyz$ dont le mouvement par rapport aux axes $o_1x_1y_1z_1$ est déterminé par les vecteurs $\bar{\Omega}$ et $\vec{v}^0$.

8. Nous avons obtenu les équations du mouvement relatif d'un corps de révolution ayant un point fixe o de son axe de révolution coïncidant avec l'oririgine o aux axes $oxyz$, en rapportant le mouvement à des axes $oXYZ$, mobiles dans le corps.

9. Nous avons étudié le mouvement relatif d'un corps solide ayant deux points fixes o et o' ou bien un axe fixe oX coïncidant avec l'axe ox du système $oxyz$, effectuant le mouvement le plus général par rapport aux axes $o_1x_1y_1z_1$ en rapportant le mouvement à des axes $oXYZ$ invariablement liés au corps. Nous avons appliqué l'équation obtenue à un exemple.

10. Nous avons trouvé les équations du mouvement relatif d'un corps solide qui se meut parallèlement à un plan donné. Nous avons appliqué les équations obtenues à un exemple.