

# ЕДНА БЕЛЕЖКА ВЪРХУ ТРИЕНЕТО В ПЛЪЗГАЩИ ЛАГЕРИ И ЧЕЛЮСТНИ СПИРАЧКИ

А. Стоянов

## Увод

През 1954 г. в Годишника на Машинно-електротехническият институт Г. Данов публикува две работи [1, 2], в които показва как може да се третира по един твърде прост и естествен начин проблемите, свързани с триенето в лагери и челюстни спирачки. Във всяка задача авторът предварително редуцира системата реакции, които се явяват в мястото на допирането. Пресмятанията не са много сложни, но са доста дълги.

В настоящата работа, използвайки комплексните числа, показвам как могат да се съкратят значително пресмятанията.

## Спомагателна задача

В равнината  $Oxy$  в точка  $M(x, y)$  е приложена сила  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$  (фиг. 1). Завъртаме силата  $\vec{F}$  около  $M$  на ъгъл  $\psi$  и получаваме силата  $\vec{F}^*$ . Да се намерят проекциите  $X^*$ ,  $Y^*$  на  $\vec{F}^*$  и моментът  $M^*$  спрямо  $Oz$ .

Решение. 1) Да съпоставим на силите  $\vec{F}$  и  $\vec{F}^*$  комплексните числа  $\zeta = X + iY$  и  $\zeta^* = X^* + iY^*$ . Очевидно

$$\zeta^* = \zeta e^{i\psi}, \text{ т. е. } X^* + iY^* = (X + iY)(\cos \psi + i \sin \psi),$$

отгдето

$$(1) \quad X^* = X \cos \psi - Y \sin \psi, \quad Y^* = X \sin \psi + Y \cos \psi.$$

Ще се условим да записваме (1) съкратено така:

$$(1') \quad \vec{F}^* = \vec{F} e^{i\psi}.$$

2) За момента  $M^*$  на  $\vec{F}^*$  спрямо  $Oz$  имаме

$$M^* = xY^* - yX^* = \cos \psi (xY - yX) + \sin \psi (xX + yY) \quad \text{или}$$

$$(2) \quad M^* = M \cos \psi + (\vec{r} \cdot \vec{F}) \sin \psi, \quad \text{гдето } \vec{r} \cdot \vec{F} = rF \cos \mu.$$

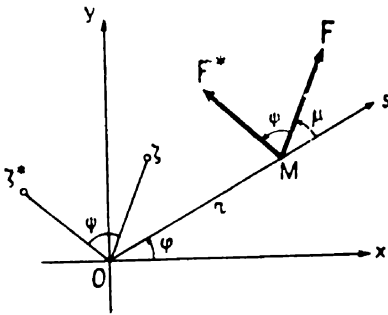
Ако  $\mu = 0$  или  $\pi$ , т. е. ако  $\vec{F}$  лежи на правата  $Os$ , тогава

$$M = \text{мом}_z \vec{F} \quad 0, \cos \mu = 1 \text{ или } -1 \text{ и (2) получава вида}$$

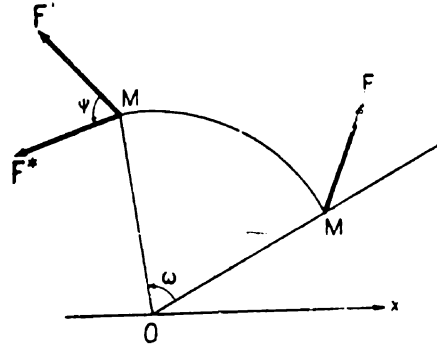
$$(2') \quad M^* = \pm rF \sin \psi,$$

което може да се установи и директно.

Забележка. Ако завъртим около  $O$  на ъгъл  $\omega$  точката  $M$  заедно със силата  $\vec{F}$  (фиг. 2), ще получим силата  $\vec{F}'$ , приложена в  $M'$ . Според казаното по-горе имаме  $\vec{F}' = \vec{F}e^{i\omega}$ , а моментът ѝ спрямо  $Oz$  е равен на момента на  $\vec{F}$ , т. е. е равен на  $M$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Ако след това завъртим силата  $\vec{F}'$  около  $M'$  на ъгъл  $\psi$ , ще получим силата  $\vec{F}^*$ , дадена с

$$(3) \quad \vec{F}^* = \vec{F}'e^{i\psi} = \vec{F}e^{i\omega} \cdot e^{i\psi} = \vec{F}e^{i(\omega+\psi)},$$

а за момента ѝ  $M^*$  ще получим същата формула (2), тъй като  $\vec{r}' \cdot \vec{F}' = \vec{r} \cdot \vec{F}$ .

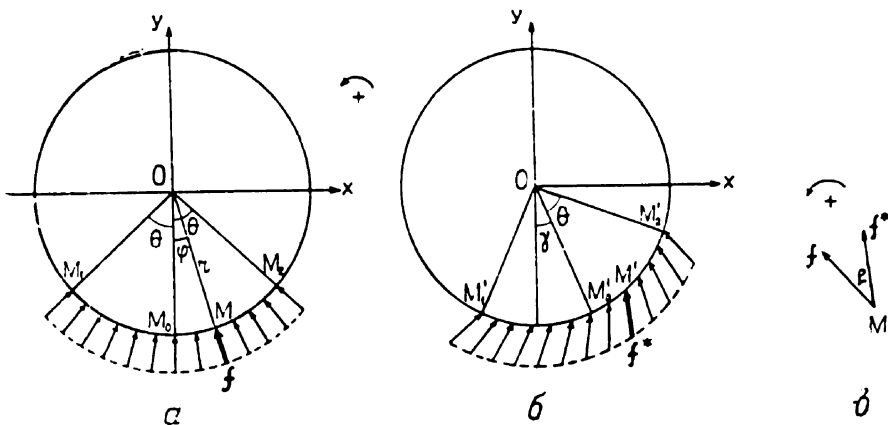
Нека имаме системата сили  $\vec{F}_i (i=1, 2, \dots, n)$ , приложени в точки  $M_i$ ; да означим с  $\vec{R}$ ,  $\vec{M} = M\vec{k}$  резултантната динама на тази система сили за точката  $O$ . Да завъртим цялата система точки и сили около  $O$  на ъгъл  $\omega$ , а след това да завъртим всяка сила  $\vec{F}_i$  около  $M_i$  на ъгъл  $\psi$ ; получаваме нова система сили  $\vec{F}_i^*$ , чиято резултантна динама  $\vec{R}^*$ ,  $\vec{M}^* = M^*\vec{k}$  спрямо  $O$  се дава с формулите (4) и (5) — непосредствено следствие от (1') и (2):

$$(4) \quad \vec{R}^* = \vec{R} e^{i(\omega+\psi)},$$

$$(5) \quad M^* = M \cos \psi + \sin \psi \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i, \text{ гдето } \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = r_i F_i \cos \mu_i.$$

Задача I

На фиг. 3, а е изобразена дъга  $M_1M_0M_2$  от окръжност с център  $O$  и радиус  $r$ ; при това  $\sphericalangle M_1OM_0 = \sphericalangle M_0OM_2 = \theta$ . Дъгата е натоварена с разпределен товар от вида  $\vec{f} = \vec{q} ds = \vec{q} r d\varphi$ ; при това предполагаме, че  $\vec{q}$  е насочено към  $O$  и че  $q = q(\varphi)$  е четна функция на  $\varphi$ , например  $q(\varphi) = q_0 \cos \varphi$ , или  $q(\varphi) = \text{конст.}$  (На фиг. 3 е изобразен последният случай, а на фигура 4 — първият случай.)



Фиг. 3

Тази система конкурентни сили  $\vec{f}$  има равнодействуваща  $\vec{R}$ , която минава през  $O$  и е равна на

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \vec{R} &= \int_{M_1, M_2} \vec{q} r d\varphi = \int_{-\theta}^{\theta} [-q(\varphi) \sin \varphi \vec{i} + q(\varphi) \cos \varphi \vec{j}] r d\varphi \\
 &= \vec{j} \cdot 2r \int_0^{\theta} q(\varphi) \cos \varphi d\varphi.
 \end{aligned}$$

Да завъртим цялата дъга  $M_1M_2$  около  $O$  на ъгъл  $\gamma$  (фиг. 3, б) и след това да завъртим всяка от силите  $\vec{f}$  около приложната ѝ точка  $M'$  на ъгъл  $-\rho$  (фиг. 3, в). Да редуцираме получената система сили  $\vec{f}^*$  за точката  $O$ ; нейната динама  $\vec{R}^*$ ,  $M^* = M^*k$  се дава с (4) и (5) при  $\omega = \gamma$ ,  $\psi = -\rho$ . Получаваме

$$(7) \quad \vec{R}^* = \vec{R} e^{i(\gamma-\psi)}, \text{ гдето } \vec{R} \text{ се дава с (6); }$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad M^* &= 0 + \sin(-\rho) \int_{-\theta}^{\theta} r f \cos \pi = \sin \rho \int_{-\theta}^{\theta} r \cdot q(\varphi) r d\varphi \\
 &= 2 r^2 \sin \rho \int_0^{\theta} q(\varphi) d\varphi.
 \end{aligned}$$

## Приложение: триене в лагери [1]

Един кръгов диск е натоварен с активни сили с резултантна динама, дадена с  $\vec{R}_a = R_a \vec{j}$  и  $M_a$ , и със сили на триене (фиг. 3, б) с динама, дадена със (7) и (8).

Условията за равновесие са  $\vec{R}^* + \vec{R}_a = 0$  и  $M^* - M_a = 0$ . Оттук следва:

$$1) \quad \gamma - \rho = 0, \quad \gamma = \rho;$$

$$2) \quad \vec{R} = R_a, \quad 2r \int_0^{\theta} q(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi = R_a;$$

$$3) \quad M^* = M_a, \quad 2r^2 \sin \rho \int_0^{\theta} q(\varphi) \, d\varphi = M_a.$$

Оттук се получава следната стойност за тъй наречения „редуциран коефициент на триене“  $\mu'$ , дефиниран с  $\mu' = \frac{M_a}{r} : R_a$ . Като заместим  $R_a$  и  $M_a$  с горните изрази, получаваме

$$(9) \quad \mu' = \sin \rho \int_0^{\theta} q(\varphi) \, d\varphi : \int_0^{\theta} q(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi.$$

Частни случаи:

$$а) \quad q \text{ конст.}; \text{ тогава } \mu' = \sin \rho \cdot \theta. \quad (\text{При } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \mu' = \frac{\pi}{2} \sin \rho.)$$

$$б) \quad q = q_0 \cos \varphi; \quad \mu' = \sin \rho \sin \theta : \left( \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right).$$

$$(\text{При } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \mu' = \frac{4}{\pi} \sin \rho.),$$

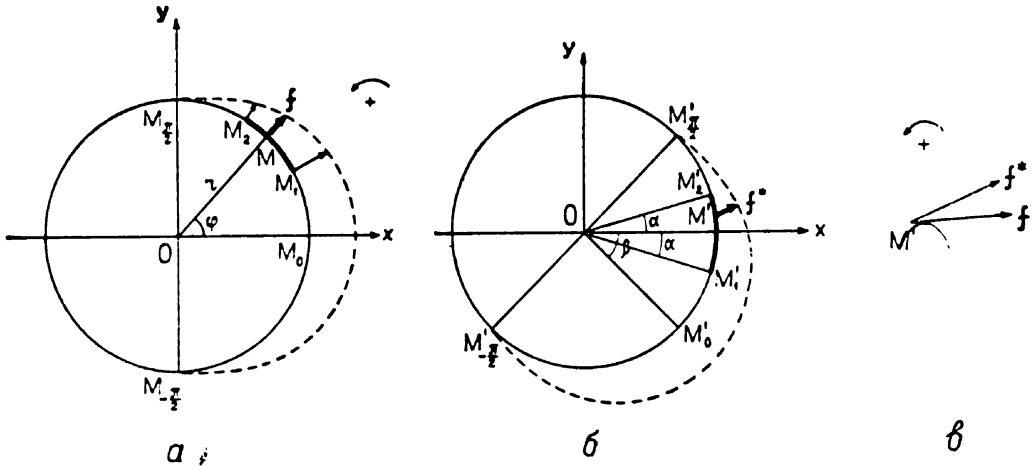
## Задача II

На фиг. 4, а е изобразена дъгата  $M_1 M_2$  с дължина  $2\alpha r$ , натоварена със сили  $\vec{f}$  от вида  $\vec{q} \, ds$ , гдето векторът  $\vec{q}$  има посоката  $OM$  и  $|\vec{q}| = q(\varphi) = q_0 \cos \varphi$ . Силите  $\vec{f}$  се редуцират на равнодействаща, която минава през  $O$  и е равна на

$$\vec{R} = \int_{M_1, M_2} \vec{q} r \, d\varphi.$$

Съответното на  $\vec{R}$  комплексно число  $R_x + iR_y$  е равно на\*

$$(10) \quad R_x + iR_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_0 \cos \varphi e^{i\varphi} \cdot r d\varphi = \frac{1}{2} r q_0 [\varphi_2 - \varphi_1 + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) e^{i(\varphi_2 + \varphi_1)}].$$



Фиг. 4

Да завъртим цялата дъга  $M_1M_2$  около  $O$  на ъгъл  $-\beta$ , така че  $M'_1M'_2$  да стане симетрична спрямо  $Ox$ ; освен това да завъртим всяка от силите  $\vec{f}$  около приложната ѝ точка  $M'$  на ъгъл  $\rho$ . Да редуцираме получената система сили  $\vec{f}^*$  за точката  $O$ ; нейната динама  $\vec{R}^*$ ,  $\vec{M}^* = M^*k$  се дава с (4) и (5) при  $\omega = -\beta$ ,  $\psi = \rho$ . Получаваме

$$(11) \quad \vec{R}^* = \vec{R} e^{i(-\beta + \rho)},$$

$$(12) \quad M^* = 0 + \sin \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r f \cos \theta d\varphi = \sin \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \cdot q_0 \cos \varphi \cdot r d\varphi \\ = r^2 q_0 \sin \rho (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = 2r^2 q_0 \sin \rho \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}.$$

От (10) и (11) следва:

$$R_x^* + iR_y^* = \frac{1}{2} r q_0 [\varphi_2 - \varphi_1 + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) e^{i(\varphi_2 + \varphi_1)}] e^{i(\rho - \beta)}, \quad \text{отгдето}$$

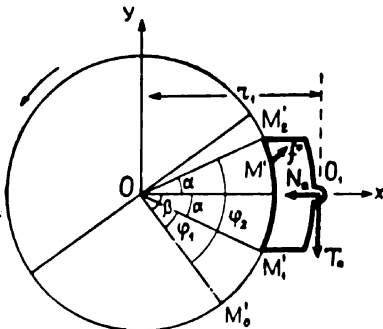
\* Пресмятането става лесно, като използваме формулите

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \quad \text{и} \quad \int e^{k\theta} d\theta = \frac{1}{k} e^{k\theta}.$$

$$(11') \begin{cases} R_x^* = \frac{1}{2} r q_0 [(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\rho - \beta) + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\varphi_2 + \varphi_1 + \rho - \beta)], \\ R_y^* = \frac{1}{2} r q_0 [(\varphi_2 - \varphi_1) \sin(\rho - \beta) + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \sin(\varphi_2 + \varphi_1 + \rho - \beta)]. \end{cases}$$

Приложение: триене в челюстни спирачки [2]

Формулите (11') и (12) обхващат всички формули на Данов, получени в работата му за челюстните спирачки [2]. Да разгледаме един частен случай (фиг. 5): спирачка с външна ставна челюст.



Фиг. 5

Едно колело с радиус  $r$  се върти около центъра си  $O$ . По протежение на дъгата  $M_1 M_2$  колелото се трие о една челюст, една от повърхнините на която има формата на дъга от окръжност с централен ъгъл  $2\alpha$ , т. е. „ъгълът на допирането“  $M_1 O M_2 = 2\alpha$ . Предполагаме, че върху всеки елемент  $ds$  от тази дъга действа сила  $\vec{f}^*$  от вида, разгледан по-горе ( $\sphericalangle M_0 O M = \varphi$ ,  $\sphericalangle x O M_0 = \beta$ ;  $\beta$  и  $q_0$  са непознати).

Освен силите на триене  $\vec{f}^*$  върху челюстта действа в ставата  $O_1$  активна сила с компоненти  $N_a$  и  $T_a$ , които са непознати.

Условията за равновесие на челюстта са:

$$(13) \quad R_x^* = N_a, \quad R_y^* = T_a, \quad M^* = T_a r_1.$$

$R_x^*$ ,  $R_y^*$ ,  $M^*$  трябва да се заместят с изразите (11') и (12), в които трябва да поставим  $\varphi_2 = \beta + \alpha$ ,  $\varphi_1 = \beta - \alpha$ . Получаваме три уравнения с четири неизвестни:  $q$ ,  $\beta_0$ ,  $N_a$ ,  $T_a$ . Трябва ни още едно уравнение, което се получава, като предположим, че познаваме „триеция момент“, т. е.  $M^* = M_{\text{тр}}$ .

Същите формули (11') и (12) могат да се използват за външна и вътрешна ставна челюст, за положително и отрицателно въртене: достатъчно е евентуално да променим посоката на  $\vec{f}^*$  и знаците на  $\rho$  и  $\beta$  (виж фиг. 12—15 от Сборника). В случая на спирачки със запънати челюсти (виж фиг. 16—20 от Сборника) точката  $M_0$  е точно определена и следователно ъгълът  $\beta$  е даден.

Постъпила на 28. I. 1959 г

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Данов Г. Критични бележки към решението на задачата за сухо триене в лагери. Годишник на Машинно-електротехническият институт, т. VI, 1954. — Също: Малчев, Тодоров, Данов, Новаков. Сборник от задачи по теоретична механика, ч. I — Статика 1954, стр. 344—346.
2. Данов Г. Изчисление на челюстни спирачки с равномерен коефициент на триене. Годишник на МЕИ, т. VI, 1954. — Също: Сборник..., стр. 347—354.

## ОДНА ЗАМЕТКА О ТРЕНИИ В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ И В КОЛОДОЧНЫХ ТОРМОЗАХ

А. П. Стоянов

### РЕЗЮМЕ

В двух работах, опубликованных в 1954 г. [1, 2], Г. Данов дал простой способ изучения задач, связанных с трением в подшипниках скольжения и в колодочных тормозах.

В настоящей работе показано, как можно, пользуясь комплексными числами, сократить значительно вычисления.

## UNE REMARQUE SUR LE FROTTEMENT DANS LES PALIERS GLISSANTS ET LES FREINS À MÂCHOIRE

A. Stoyanoff

### RÉSUMÉ

Dans deux travaux récents (1954) publiés dans l'Annuaire de l'Institut de Mécanique et Electrotechnique de Sofia [1, 2] G. Danov a donné une méthode simple et naturelle pour traiter les problèmes concernant le frottement dans les paliers glissants et les freins à mâchoire.

Dans cette note nous montrons que l'usage des nombres complexes permet d'abrégé considérablement les calculs.