ЕДНА КЛАСА АНАЛИТИЧНО НЕПРОДЪЛЖИМИ СТЕПЕННИ РЕДОВЕ

Л. Илиев

1. Нека степенният ред

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \tag{1}$$

удовлетворява условието

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=1. \tag{2}$$

Ф. Льош [1] и Х. Клаус [2] установиха критерии за аналитична непродължимост на редовете от вида (1), които удовлетворяват допълнителното условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|c_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}}=1, \tag{3}$$

гдето $\varphi(x)$ е подходящо избрана функция.

Нека $\varphi(x)$ е неотрицателна, монотонно растяща функция, дефинирана за $x\geqq 0$, която удовлетворява условията

а) $$\varphi(x)\leqq x,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=0;$$

б) $\varphi'(x)$ клони монотонно към нула при $x\to\infty$ и при всяко фиксирано $\varepsilon>0$: $\varepsilon[\varphi(x)-x\varphi'(x)]+\ln\varphi'(x)\geqq 0$ за $x\geqq x_0(\varepsilon)$;

в) съществува положителна константа α, така че ако при произволно λ от един подходящ интервал $0<\lambda<\lambda_0$ означим с x_1 и x_2 единствените положителни корени съответно на уравненията $\varphi'(x)-\lambda=0$ и $\varphi(x)-\lambda qx=0$ при някое q, $0<q<1$, да имаме $x_2<x_1^{\alpha}$;

г) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\ln x}=\infty.$$

Да означим накратко с $F(\varphi)$ класата на степенните редове (1), които удовлетворяват условията (2) и (3), гдето функцията $\varphi(x)$ удовлетворява условията а), б), в) и г).

Ще установим следната

Теорема 1. Ако редът (1) принадлежи на класата $F(\varphi)$ и е аналитично продължим вън от единичната окръжност, то при $\tau=[\varphi(m)]$, гдето m е цяло положително число, съществуват една редица от комплексни числа $q_\tau^{(\tau)}, q_{\tau-1}^{(\tau)}, \ldots, q_1^{(\tau)}$ и едно число θ, $0<\theta<1$, така че

$$(4) \qquad c_{n-\tau}q_\tau^{(\tau)} \quad c_{n-\tau+1}q_{\tau-1}^{(\tau)}+\cdots+c_{n-1}q_1^{(\tau)}+c_n < A\theta^{\varphi(m)},$$

гдето $[\varphi(m)]\leqq n\leqq m$, а числото A не зависи от m.

Като използуваме този резултат, ще установим следната

Теорема 2. Нека редът (1) принадлежи на класата $F(\varphi)$. Ако съществуват две редици от индекси $\{m_\nu\}$, $\{n_\nu\}$, $m_\nu<n_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,$ така че

$$(5) \qquad \lim_{\nu\to\infty} |\, c_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}}=1,$$

$$(6) \qquad c_{m_\nu-k}=c_{n_\nu-k}, \quad k=1,2,\ldots,\ [\varphi(n_\nu)]\,;$$

числата

$$\frac{c_{m_\nu}}{c_{n_\nu}}$$

при $\nu\to\infty$ не клонят към единица, то този ред е аналитично непродължим вън от единичната окръжност.

Доказателство на теорема 1. Нека $0\leqq\varphi_1<\varphi_2<2\pi$, $R>1$ и δ, $0\leqq\delta\leqq 1$ са дадени числа. Да означим с Γ_δ контура, който е съставен от дъгите

$$(8) \qquad \begin{aligned} &z=Re^{i\varphi} && \varphi_1\leqq\varphi\leqq\varphi_2,\\ &z=(1-\delta)e^{i\varphi} && \varphi_2\leqq\varphi\leqq\varphi_1+2\pi,\\ &z=re^{i\varphi_1} && 1-\delta\leqq r\leqq R,\\ &z=re^{i\varphi_2} && 1-\delta\leqq r\leqq R. \end{aligned}$$

Г. Сегьо [3] установи следния резултат:

Има една област G, съдържаща контура Γ_0, за която съществува една редица от полиноми

$$\Phi_\tau(z^{-1})=q_\tau^{(\tau)}+\frac{q_{\tau-1}^{(\tau)}}{z}+\cdots+\frac{q_1^{(\tau)}}{z^{\tau-1}}+\frac{1}{z^\tau}, \quad \tau=0,1,2,\ldots,$$

едно ρ, $0<\rho<1$ и един индекс τ_0, така че при $\tau\geqq\tau_0$ е изпълнено неравенството

$$(9) \qquad |\,\Phi_\tau(z^{-1})\,|<\rho^\tau,$$

ако $z\in G$.

При достатъчно малки стойности на $\delta \leq \delta_0$, $\delta > 0$ всяка крива Γ_δ ще принадлежи на областта G, така че за $z \in \Gamma_\delta$ ще бъде валидно неравенството (9).

Ако $\varepsilon > 0$ е произволно число, от (1) и (3) върху окръжността $|z| = (1-\delta)^\varepsilon$ получаваме

$$(10) \quad |f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (1-\delta)^{\varepsilon n} \leq K \sum_{n=0}^{\infty} e^{\varepsilon\varphi(n)} (1-\delta)^{\varepsilon n} = K \sum_{n=0}^{\infty} e^{\varepsilon[\varphi(n)+n\ln(1-\delta)]},$$

гдето K не зависи от ε.

При фиксирано ε и δ функцията

$$(11) \qquad y = e^{\varepsilon[\varphi(x)+x\ln(1-\delta)]}$$

добива максимум при $x = x_1$, гдето $x_1 = x_1(\delta)$ е единственият при достатъчно малка стойност на $\delta < 1$ корен на уравнението

$$(12) \qquad \varphi'(x) + \ln(1-\delta) = 0.$$

Нека Δ, $0 < \Delta < 1$ е число, за което съгласно условието в) уравнението (12) и уравнението

$$(13) \qquad \varphi(x) + qx\ln(1-\delta) = 0$$

имат по един единствен корен, щом $0 < \delta \leq \Delta$. Да означим с $x_2 = x_2(\delta)$ единствения корен на (13) в този интервал.

Ако разглеждаме уравненията (12) и (13) за едни и същи значения на δ от интервала $0 < \delta \leq \Delta$, съгласно условието в) ще имаме $x_2 < x_1^\alpha$ за всяко δ от този интервал.

Ако δ е от интервала $0 < \delta \leq \Delta_1$, гдето $(1-\Delta)^q = 1 - \Delta_1$, уравнението

$$(14) \qquad \varphi(x) + x\ln(1-\delta) = 0$$

има един единствен корен $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(\delta)$, тъй като ако положим $(1-\delta_1)^q = 1-\delta$, това уравнение добива вида

$$(15) \qquad \varphi(x) + xq\ln(1-\delta_1) = 0,$$

гдето $0 < \delta_1 \leq \Delta$. При това, понеже $|q\ln(1-\delta)| < |\ln(1-\delta)|$, то $\bar{x}_2 < x_2 < x_1^\alpha$ за всяко δ от интервала $0 < \delta \leq \Delta$.

Ако изберем δ достатъчно малко, то всяко число $x_1 = x_1(\delta) > 1$, тъй като $x_2 \to \infty$, когато $\delta \to 0$. За в бъдеще ще считаме $\Delta' \leq \Delta$ така малко, щото за съответното x_1 на всяко δ от интервала $0 < \delta \leq \Delta'$ да имаме $x_1 > 1$. Поради това може да предполагаме, че в неравенството $x_2 < x_1^\alpha$ имаме $\alpha > 1$.

Като вземем пред вид всичко това, от (10) получаваме, ако $0 < \delta \leq \Delta'$:

$$(16) \qquad |f(z)| \leq K x_1^\alpha e^{\varepsilon[\varphi(x_1)+x_1\ln(1-\delta)]} + K \sum_{n \geq x_1^\alpha}^{\infty} e^{\varepsilon[\varphi(n)+n\ln(1-\delta)]}$$

$$\leqq Kx_1^a e^{\varepsilon[\varphi(x_1)+x_1\ln(1-\delta)]}+K\sum_{n\geqq x_1^a}^{\infty} e^{\varepsilon(1-q)n\ln(1-\delta)},$$

тъй като при $x>x_2<x_1^a$ имаме $\varphi(x)<-qx\ln(1-\delta)$.

По-нататък, понеже $\alpha>1$ и $x_1>1$, от (16) следва

$$(17)\quad \begin{aligned}|f(z)|&\leqq K x_1^a e^{\varepsilon[\varphi(x_1)+x_1\ln(1-\delta)]}+K\int_{x_1}^{\infty} e^{\varepsilon(1-q)x\ln(1-\delta)}dx\\ &=K x_1^a e^{\varepsilon[\varphi(x_1)+x_1\ln(1-\delta)]}-\frac{K}{\varepsilon(1-q)}\,\frac{e^{\varepsilon(1-q)x_1\ln(1-\delta)}}{\ln(1-\delta)},\end{aligned}$$

гдето $\varphi'(x_1)\quad\ln(1-\delta)=0$, т. е. $\ln(1-\delta)=-\varphi'(x_1)$, така че

$$(18)\quad \begin{aligned}f(z)|&\leqq K x_1^a e^{\varepsilon[\varphi(x_1)-x_1\varphi'(x_1)]}+\frac{K}{\varepsilon(1-q)}\,e^{-\varepsilon(1-q)x_1\varphi'(x_1)-\ln\varphi'(x_1)}\\ &\leqq\frac{Kx_1^a}{\varepsilon(1-q)}\left\{e^{\varepsilon[\varphi(x_1)-x_1\varphi'(x_1)]}+e^{-\varepsilon(1-q)x_1\varphi'(x_1)-\ln\varphi'(x_1)-a\ln x_1}\right\}.\end{aligned}$$

Като вземем пред вид условие в), получаваме

$$\begin{aligned}&\varepsilon[\varphi(x_1)-x_1\varphi'(x_1)]-[-\varepsilon(1-q)x_1\varphi'(x_1)-\ln\varphi'(x_1)-\alpha\ln x_1]\\ &=\varepsilon[\varphi(x_1)-qx_1\varphi'(x_1)]+\ln\varphi'(x_1)+\alpha\ln x_1\\ &\geqq\varepsilon[\varphi(x_1)-x_1\varphi'(x_1)]+\ln\varphi'(x_1)+\alpha\ln x_1\geqq\alpha\ln x_1>0\end{aligned}$$

при достатъчно големи $x_1\geqq x_0(\varepsilon)$, т. е. в един подходящ интервал $0<\delta\leqq\Delta''$, $\Delta''=\Delta''(\varepsilon)\leqq\Delta'$.

Следователно от (18) получаваме

$$(20)\qquad |f(z)|\leqq\frac{2K}{\varepsilon(1-q)}x_1^a e^{\varepsilon[\varphi(x_1)+x_1\ln(1-\delta)]}=\frac{2K}{\varepsilon(1-q)}x_1^a e^{\varepsilon[\varphi(x_1)-x_1\varphi'(x_1)]}$$

за всяко δ от интервала $0<\delta\leqq\Delta''(\varepsilon)$, гдето q, $0<q<1$ не зависи от δ и ε, а ε е подчинено на допълнителното условие $\varepsilon<1$.

Нека функцията $f(z)$, която е определена от (1), е аналитично продължима вън от единичния кръг. В такъв случай има крива $\Gamma_{\delta_0'}$, $\delta_0'>0$, така че $f(z)$ е аналитична във и върху всяка крива $\Gamma_{\delta'}$, за която $0<\delta'<\delta_0'$. Нека δ е единственият положителен корен на уравнението $(1-\delta)^{\varepsilon}=1-\delta'$, гдето $0<\delta'\leqq\delta_0'$, и специално $(1-\delta_0)^{\varepsilon}=1-\delta_0'$. Обратно, когато δ варира в интервала $0<\delta\leqq\delta_0$, то δ' е в интервала $0<\delta'\leqq\delta_0'$, при това $\delta'\to 0$, когато $\delta\to 0$. Нека изберем $\Delta'''\leqq\Delta''$, така че ако $(1-\Delta''')^{\varepsilon}=1-\nabla$, да имаме $\nabla\leqq\delta_0'$.

Ако n е достатъчно голямо фиксирано естествено число, да означим с $\delta_n=1\quad e^{-\varphi'(n)}\leqq\Delta'''$ единствения корен на (12) при $x=n$. Ако $n\to\infty$, то $\delta_n\to 0$.

Ако приложим неравенство (20) при $\delta = \delta_n$, то в такъв случай $x_1 = n$, така щото върху окръжността $|z| = (1-\delta)^\varepsilon$ получаваме

$$(21) \qquad |f(z)| \leqq \frac{2K}{\varepsilon(1-q)} n^a e^{\varepsilon[\varphi(n) - n\varphi'(n)]} = \frac{2K}{\varepsilon(1-q)} n^a e^{\varepsilon[\varphi(n) + n \ln(1-\delta_n)]}.$$

Тъй като съгласно условие в) дясната страна на (21) при $n \to \infty$ расте неограничено, то при достатъчно големи $n \geqq n'$ неравенство (21) ще бъде изпълнено и върху контура $\Gamma_{\delta'_n}$, гдето $(1-\delta_n)^\varepsilon = 1 - \delta'_n$, $0 < \delta'_n \leqq \nabla \leqq \delta'_0$.

Нека n и m са естествени числа, за които $\tau = [\varphi(m)] < n \leqq m$, $n > n'$. От (1) и (21) получаваме

$$|c_{n-\tau} q_\tau^{(\tau)} + c_{n-\tau+1} q_{\tau-1}^{(\tau)} + \cdots + c_{n-1} q_1^{(\tau)} + c_n| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{\delta'_n}} \frac{f(z)}{z^{n-\tau+1}} \Phi_\tau\left(\frac{1}{z}\right) dz\right|$$

$$(22) \qquad \leqq \frac{Kn^a}{\pi\varepsilon(1-q)} \frac{e^{\varepsilon[\varphi(n) + n\ln(1-\delta_n)]}}{(1-\delta_n)^{\varepsilon(n-\tau+1)}} \cdot \rho^\tau$$

$$\leqq \frac{Km^a}{\pi\varepsilon(1-q)\rho} \cdot e^{\varepsilon\varphi(m)} \cdot \rho^{\varphi(m)} = \frac{K}{\pi\varepsilon(1-q)\rho}\left(e^{\varepsilon + \frac{a \ln m}{\varphi(m)}} \cdot \rho\right)^{\varphi(m)}$$

Ако изберем $\varepsilon > 0$, така че $\rho e^{2\varepsilon} = \rho_r < 1$, поради $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\ln m}{\varphi(m)} = 0$ следва теорема 1.

Доказателство на теорема 2. Ако допуснем, че редът (1) от теорема II е аналитично продължим вън от единичната окръжност, можем да приложим теорема 1 при $m = n_\nu$ и съответно $n = m_\nu, n = n_\nu$. Съгласно (4) получаваме съответно

$$(23) \qquad |c_{m_\nu - \tau} q_\tau^{(\tau)} + c_{m_\nu - \tau+1} q_{\tau-1}^{(\tau)} + \cdots + c_{m_\nu - 1} q_1^{(\tau)} + c_{m_\nu}| < A\,\theta^{\varphi(n_\nu)}$$

и

$$(24) \qquad |c_{n_\nu - \tau} q_\tau^{(\tau)} + c_{n_\nu - \tau+1} q_{\tau-1}^{(\tau)} + \cdots + c_{n_\nu - 1} q_1^{(\tau)} + c_{n_\nu}| < A\,\theta^{\varphi(n_\nu)}.$$

Като вземем пред вид (6), от (23) и (24) получаваме

$$(25) \qquad |c_{m_\nu} - c_{n_\nu}| < 2A\,\theta^{\varphi(n_\nu)}.$$

Нека $\theta = 1 - \eta$, $\eta > 0$. За $0 < \eta_1 < \eta$ и достатъчно голямо n_ν от (5) следва неравенството $|c_{n_\nu}| > (1-\eta_1)^{\varphi(n_\nu)}$, така щото от (25) следва

$$(26) \qquad \left|1 - \frac{c_{m_\nu}}{c_{n_\nu}}\right| < 2A\left(\frac{1-\eta}{1-\eta_1}\right)^{\varphi(n_\nu)} = 2A\,\theta_1^{\varphi(n_\nu)}, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

което противоречи на условието, че редицата $\frac{c_{m_\nu}}{c_{n_\nu}}$ $\nu = 1, 2 \ldots$ не клони към единица.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Lösch F. Über nichtfortsetzbare Potenzreihen mit Lücken, Math. Zeitschrift, **32**, 1930, 415--421.
2. Claus H. Neue Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen. Math. Zeitschrift, **49**, 1944 S. 161—191.
3. Илиев Л. За аналитичната непродължимост на степенните редове. Годишник на Соф. университет, книга първа, математика, т. 52, 1958, стр. 1.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИ НЕПРОДОЛЖИМЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Любомир Илиев

РЕЗЮМЕ

Пусть $\varphi(x)$ является положительной монотонно растущей функцией определенной для $x \leqq 0$, которая удовлетворяет условиям:

а) $$\varphi(x) \leqq x, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0;$$

б) при $x \to \infty$ $\varphi'(x)$ стремится монотонно к нулю и для каждого $\varepsilon > 0$ при $x \geqq x_0(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенство

$$\varepsilon[\varphi(x) - x\varphi'(x)] + \ln \varphi'(x) \geqq 0;$$

в) существуют постоянные $\alpha > 0$ и q, $0 < q < 1$ такие, что для каждого λ в интервале $0 < \lambda < \lambda_0$, если с x_1 и x_2 обозначают соответственно единственные положительные корни уравнения $\varphi'(x) = \lambda$ и $\varphi(x) = q\lambda x$, то будет в силе неравенство $x_2 < x_1^{\alpha}$;

г) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\ln x} = \infty.$$

Теорема II. Пусть ряд (I) удовлетворяет условиям (2) и (3). Если существуют две последовательности индексов $\{n_\nu\}$ и $\{m_\nu\}$ таких, что

$$\lim_{\nu\to\infty} |c_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1$$

$$c_{m_\nu - k} = c_{n_\nu - k}, \quad k = 1, 2 \ldots, [\varphi(n_\nu)]$$

и числа $c_{m_\nu} | c_{n_\nu}$ не стремятся при $\nu \to \infty$ к 1, то ряд (I) является аналитически непродолжимым вне единичной окружности.

EINE KLASSE VON ANALYTISCH NICHTFORTSETZBAREN POTENZREIHEN

Ljubomir Ilieff

ZUSAMMENFASSUNG

Es sei $\varphi(x)$ eine nichtnegative, monoton wachsende, für $x \geqq 0$ definierte Funktion, die folgenden Bedingungen genügt:

a) $$\varphi(x) \leqq x, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0;$$

b) bei $x \to \infty$ strebt $\varphi'(x)$ monoton gegen Null und für jedes $\varepsilon > 0$ bei $x \geqq x_0(\varepsilon)$, gilt $\varepsilon[\varphi(x) - x\varphi'(x)] + \ln \varphi'(x) \geqq 0$;

c) es existieren Konstanten $\alpha > 0$ und q, $0 < q < 1$, so daß für jedes λ aus einem Intervall $0 < \lambda < \lambda_0$ die Ungleichung $x_2 < x_1^{\alpha}$ gilt, worin x_1 bzw. x_2 die einzige positive Nullstelle von $\varphi'(x) = \lambda$ bzw. $\varphi(x) = q\lambda x$ bedeuten;

d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\ln x} = \infty.$$

Satz II. Die Potenzreihe (1) genüge den Bedingungen (2) und (3). Es existieren zwei unendliche Folgen von Indizen $\{m_\nu\}$ und $\{n_\nu\}$, $m_\nu < n_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\lim_{\nu\to\infty} |c_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1;$$

$$c_{m_\nu - k} = c_{n_\nu - k}, \quad k = 1, 2, \ldots, [\varphi(n_\nu)];$$

die Zahlen

$$c_{m_\nu}/c_{n_\nu}$$

streben nicht gegen 1, wenn $\nu \to \infty$.

Dann ist Reihe (1) über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar.