ФЛУИДЕН ТРАНСПОРТ, ИНДУЦИРАН ОТ КАРМАНОВИ ВИХРОВИ УЛИЦИ. I.

Бл. Долапчиев и Ив. Чобанов

1. В една предишна наша работа [1] бяха разгледани интегралите на диференциалните уравнения на движението на произволна невихрова частица от идеален (несвиваем, невискозен и хомогенен) флуид, в който протича двустранно безкрайна, шахматна или симетрична, вихрова улица. Диференциалните уравнения на движението бяха построени спрямо три различни координатни системи:

а) Системата OXY или накратко $[O]$, свързана с препятствието, създаващо вихровата конфигурация и предположено в минус безкрайност; за наблюдател, неподвижен спрямо $[O]$, вихровата конфигурация се движи отляво надясно със скорост $V-U$, а несмутеният от вихровата конфигурация флуид (т. е. флуидът в безкрайност) — отляво надясно със скорост V.

б) Системата $\Omega\xi\eta$ или накратко $[\Omega]$, свързана с вихровата конфигурация; за наблюдател, неподвижен спрямо $[\Omega]$, вихровата конфигурация е в покой; препятствието или $[O]$ се движи със скорост $V-U$ отдясно наляво, а несмутеният от вихровата конфигурация флуид — отляво надясно със скорост U.

в) Системата oxy или накратко $[o]$, свързана със несмутения от вихровата конфигурация флуид; за наблюдател, неподвижен спрямо $[o]$, несмутеният флуид е в покой; препятствието или $[O]$ се движи със скорост V отдясно наляво, а вихровата конфигурация или $[\Omega]$ — със скорост U отдясно наляво.

Обстоятелствата, съпътствуващи явлението, бяха подробно изложени в [1]. Ако означим с $\Gamma > 0$ циркулацията на всеки вихър от улицата (вихрите от горната редица на улицата предизвикват ротации по посока на часовниковата стрелка, а тези от долната — в противната посока; при това осите OX, $\Omega\xi$ и ox съвпадат с оста на улицата), с $2h$ — разстоянието между двете вихрови редици и с $2l$ — разстоянието между два съседни вихъра от една и съща редица, компонентите на скоростта на произволна невихрова флуидна частица са съответно:

а) за шахматна улица:

$$
(1)\quad \begin{cases}
\dfrac{dX}{dt} = V \quad \dfrac{\Gamma}{4l}\left\{ \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(Y-h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y-h)-\sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]} - \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(Y+h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y+h)+\sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]} \right\}, \\[2ex]
\dfrac{dY}{dt} = \dfrac{\Gamma}{4l}\cos\dfrac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\left\{ \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y-h)-\sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]} + \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y+h)+\sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]} \right\};
\end{cases}
$$

$$
(2)\quad \begin{cases}
\dfrac{d\xi}{dt} = U + \dfrac{\Gamma}{4l}\left\{ \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta-h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi} - \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta+h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta+h)+\sin\frac{\pi}{l}\xi} \right\}, \\[2ex]
\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\Gamma}{4l}\cos\dfrac{\pi\xi}{l}\left\{ \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin\frac{\pi\xi}{l}} + \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{h}(\eta+h)+\sin\frac{\pi}{l}\xi} \right\};
\end{cases}
$$

$$
(3)\quad \begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\Gamma}{4l}\left\{ \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(y-h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y-h)-\sin\frac{\pi}{l}(x+Ut)} - \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(y+h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y+h)+\sin\frac{\pi}{l}(x+Ut)} \right\}, \\[2ex]
\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\Gamma}{4l}\cos\dfrac{\pi}{l}(x+Ut)\left\{ \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y-h)-\sin\frac{\pi}{l}(x+Ut)} + \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y+h)+\sin\frac{\pi}{l}(x+Ut)} \right\};
\end{cases}
$$

б) за симетрична улица

$$
(4)\quad \begin{cases}
\dfrac{dX}{dt} = V + \dfrac{\Gamma}{4l}\left\{\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(Y-h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y-h)-\cos\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]} - \right.\\
\qquad\left. -\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(Y+h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y+h)-\cos\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]}\right\},\\
\dfrac{dY}{dt} = \dfrac{\Gamma}{4l}\sin\dfrac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\left\{\dfrac{-1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y-h)-\cos\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]} + \right.\\
\qquad\left. +\dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y+h)-\cos\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]}\right\};
\end{cases}
$$

$$
(5)\quad \begin{cases}
\dfrac{d\xi}{dt} = U + \dfrac{\Gamma}{4l}\left\{\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta-h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\cos\frac{\pi}{l}\xi} - \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta+h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta+h)-\cos\frac{\pi}{l}\xi}\right\},\\
\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\Gamma}{4l}\sin\dfrac{\pi}{l}\xi\left\{\dfrac{-1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\cos\frac{\pi}{l}\xi} + \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta+h)-\cos\frac{\pi}{l}\xi}\right\};
\end{cases}
$$

$$
(6)\quad \begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\Gamma}{4l}\left\{\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(y-h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y-h)-\cos\frac{\pi}{l}(x+Ut)} - \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(y+h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y+h)-\cos\frac{\pi}{l}(x+Ut)}\right\},\\
\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\Gamma}{4l}\sin\dfrac{\pi}{l}(x+Ut)\left\{\dfrac{-1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y-h)-\cos\frac{\pi}{l}(x+Ut)} + \right.\\
\qquad\left. +\dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y+h)-\cos\frac{\pi}{l}(x+Ut)}\right\}.
\end{cases}
$$

2. Изложението ще започнем със следните бележки от общ характер. Нека в триизмеримата област G се движи флуид по закона

$$
(7)\qquad v = \overline{v}(r, t).
$$

В (7) v означава скоростта на флуидната частица с радиус-вектор $\bar{r}$, при някакво фиксирано начало, в момента t. Дефиниционната област на функцията v е G, а за t предполагаме например, че $T_1 \leqq t \leqq T_2$. Ако $\bar{v}$ не зависи от t явно, режимът на течение е стационарен; в противен случай той е нестационарен. При разглежданото движение на вихрова улица във флуида стационарен е режимът спрямо координатната система [Ω], а нестационарен — спрямо системите [O] и [o], което ясно личи от уравненията (1) и (4), респ. (2), (3), (5) и (6).

Ако H е подобласт на G, заградена с повърхнината S, и ако $T_1 \leqq t_i \leqq T_2$, $t_1 < t_2$ $(i = 1, 2)$, под количество флуид Q, преминал през S за времето $t_2 - t_1$, се разбира по дефиниция определеният интеграл

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S \rho(r, t)\, v_n(r, t)\, d\sigma, \tag{8}$$

дето v_n $(\bar{r}, t)$ означава компонентата на $\bar{v}(r, t)$ върху външно насочената нормала на S в $\bar{r}$, а $\rho(\bar{r}, t)$ е плътността на флуидната частица, намираща се в момента t в положението $\bar{r}$ върху S. Както личи от (8), величината Q зависи от дефиницията на $v(\bar{r}, t)$ върху S, а не и в другите точки на H. Поради това за дефиницията на Q не е необходима областта H, а само S и тази дефиниция запазва смисъл и в случая, когато S не е затворена повърхнина. Дефиницията на $v(\bar{r}, t)$ в G е необходима за пресмятането на Q през различни повърхнини S в G. Както G, така и S се предполагат неизменни с времето. Приема се освен това, че повърхнината S и функцията $\bar{v}(r, t)$ притежават достатъчни за дефинирането на величината Q свойства, които са специфицирани изрично [2].

В случай че режимът е стационарен, от (8) се получава

$$Q = (t_2 - t_1) \iint_S \rho(\bar{r}) \cdot v_n(\bar{r})\, d\sigma. \tag{9}$$

При $t_2 - t_1 = 1$ от (9) следва

$$Q = \iint_S \rho(\bar{r})\, v_n(\bar{r})\, d\sigma \tag{10}$$

и тази величина представлява количеството флуид, протекло през S за единица време. От (8) чрез диференциране спрямо t_2 получаваме при $t_2 = t$ скоростта на изменението $\frac{dQ}{dt}$ на величината Q в момента t:

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_S \rho(\bar{r}, t)\, v_n(\bar{r}, t)\, d\sigma. \tag{11}$$

Формалното съвпадение на израза за Q, дефиниран с (10), с дясната страна на (11), при фиксирано време t, понякога става причина и в не-стационарния случай величината $\frac{dQ}{dt}$ от (11) да се нарича „количество флуид“, протекло за единица време през S, но несъстоятелността на това приемане е очевидна.

Заслужава да се обърне внимание на следния любопитен факт, който впрочем не е изолиран специално в разглеждания въпрос, а се констатира и в твърде много сродни въпроси при проблеми от „физично“ естество. Обикновено при въвеждането на величината (8) авторите привеждат съображения, които считат за доказателство, че наистина тази величина представлява количеството флуид, преминало през повърхнината S за време t_2-t_1. При това те обикновено застават на базата, че количеството флуид, преминало за време t_2-t_1 през равнинно сечение с дадена площ (при стационарен режим на течение, при който освен това скоростното поле е постоянно от точка в точка и е нормално на равнината на сечението), е равно на произведението от площта на сечението със скоростта на флуида, плътността му (предположена постоянна) и интервала от време t_2-t_1; след това „доказват“, че количеството флуид, преминало за време t_2-t_1 през повърхнината S — при описаните по-горе общи условия, — е именно величината, дефинирана с (8). Тук са налице два момента: първо, определянето на количеството флуид при елементарния режим на стационарно флуидно течение (постоянно от точка в точка и нормално на сечението) и, второ, определянето на количеството флуид при общ режим на течение и през повърхнина с твърде общи свойства. И в двата случая се касае за дефиниции, а не за доказателства, както обикновено авторите считат, съвсем аналогично на случая с дефинирането на лице на равнинна фигура, заградена от затворена крива. Както в последния случай, предварително се дефинира площ на елементарна геометрична фигура (например правоъгълник) и след това независимо от тази дефиниция, но на базата на същата се дефинира площ на (до известна степен) произволна равнинна фигура, заградена със затворена крива — като всички разглеждания, които обикновено се правят в анализа по този повод, са не доказателство или извод на площта на по-общата фигура върху базата на дефиницията на площ на елементарна фигура, а са само привеждане на съображения за целесъобразността на въведената обща дефиниция, — така и в случая на флуидно течение, върху базата на елементарната дефиниция на количеството флуид, преминал през сечение при най-прости условия на флуидното движение, се привеждат съображения за целесъобразността на дефиницията на величината Q с (8), при общ режим на флуидно движение, а не някакво доказателство, че наистина (8) е в сила. Не може да се изведе правило за пресмятането на величината Q, без предварително да е дефинирана тази величина в общия случай, а в общия случай Q се дефинира именно чрез (8), поради което релацията (8) не е никакъв извод.

Тези бележки считаме за неизлишни, тъй като при публикации, имащи физичен характер, както многократно сме се убедили, авторите им твърде често повтарят посочената логическа грешка.

3. По-долу предстои да се изследва флуидният транспорт при протичане във флуида на шахматна и симетрична вихрова конфигурация.

С други думи търси се количеството флуид, пренесено поради индукцията на една шахматна или симетрична вихрова улица в различни зони от течението, т. е. през различни по големина и положение перпендикулярни към равнината на течението стени.

Понеже процесът е равнинен, ако повърхнината S от т. 2 е цилиндрична повърхнина с дадена направляваща крива в равнината на флуидното течение и с образувателни перпендикулярни към тази равнина, за краткост ще говорим не за повърхнина или стена S, а за крива, през която протича флуидът, като при това ще разбираме цилиндричната стена с основа тази крива и височина, равна на единица.

Най-напред ще разглеждаме флуидния транспорт спрямо стени, неизменни спрямо избраната система $[\Omega]$, тъй като този случай на стационарен режим на течение е сравнително прост.

Физическият смисъл на задачата за пресмятането на количествата флуидна маса през дадена крива, неподвижна спрямо $[\Omega]$, е следният: вихровата конфигурация е неизменна спрямо $[\Omega]$ и се движи спрямо несмутения флуид (т. е. спрямо системата $[o]$ или спрямо флуида, в който е предположена прекратена индукцията на вихровите центрове) със скорост U отдясно наляво. Ако флуидът беше действително несмутен (неподвижен), пресмятанията биха показали, че през отсечка с дължина q, перпендикулярна на оста на улицата, за време Δt преминава флуидна маса $\rho q U \Delta t$, дето ρ е плътността на хомогенния флуид. В действителност транспортът $\rho q U \Delta t$ се дължи не на движението на флуида (който е неподвижен спрямо $[o]$), а на преместването на системата $[\Omega]$ спрямо $[o]$ отдясно наляво със скорост U.

Когато се предположи, че вихровата конфигурация се появи във флуида, изказаното съображение за движението на $[\Omega]$ спрямо $[o]$ остава в сила. Следователно за намирането на собствения флуиден транспорт, дължим само на наличието на вихровата конфигурация, или иначе казано, индуциран от вихровата улица, трябва намерените флуидни маси, преминали през въпросната отсечка, неподвижна спрямо $[\Omega]$, да се намалят с количеството $\rho q U \Delta t$, дължимо на движението на $[\Omega[$ спрямо $[o]$. В същност това не винаги ще правим; по-често ще третираме явлението от аспекта на наблюдател спрямо някоя от координатните системи, който наблюдател се интересува само от това, което той констатира спрямо тази сравнителна система.

4. Нека е дадена отсечка, перпендикулярна на оста $\Omega\xi$, чието продължение пресича $\Omega\xi$ в точка с абсциса $\xi = \text{const}$. Ако η_1 и η_2 са ординатите на краищата на тази отсечка ($\eta_1 < \eta_2$), количеството флуид $Q(\eta_1, \eta_2; \xi)$, преминало през нея за единица време, съгласно първото уравнение на (2) и (10) е

$$Q(\eta_1, \eta_2; \xi) = \rho \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\xi}{dt}\, d\eta = \rho\, U(\eta_2 - \eta_1)$$

$$
(12) \qquad +\frac{\Gamma}{4l}\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta-h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi}-\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta+h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta+h)+\sin\frac{\pi}{l}\xi}\right]d\eta
$$

$$
=\rho U(\eta_2-\eta_1)+\frac{\Gamma\rho}{4\pi}\ln\frac{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta_2-h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta_1+h)+\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]}{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta_1-h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta_2+h)+\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]}.
$$

Тук пресмятането на интеграла в (12) може да се избегне, като се съобрази следната бележка: комплексният потенциал $\varphi(\zeta)$ на флуидното течение спрямо $[\Omega]$ е {[1], формула (27)}

$$
\varphi(\zeta)=U\zeta+\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln\frac{\sin\frac{\pi}{2l}(\zeta-\zeta_0')}{\sin\frac{\pi}{2l}(\zeta-\zeta_0'')}
$$

дето ζ е афиксът на флуидната частица, а вихровите центрове ζ_0' и ζ_0'' се определят с

$$
\zeta_0'=\frac{l}{2}+ih,\ \zeta_0''=-\frac{l}{2}-ih.
$$

Ако

$$
\varphi(\zeta)=\operatorname{Re}\varphi(\zeta)+i\operatorname{Im}\varphi(\zeta),
$$

то

$$
\frac{d\varphi(\zeta)}{dt}=\frac{d\xi}{dt}-i\frac{d\eta}{dt}=\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\varphi(\zeta)+\frac{id}{dt}\operatorname{Im}\varphi(\zeta).
$$

Но

$$
\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial}{\partial\xi}\operatorname{Re}\varphi(\zeta),\ \frac{d\eta}{dt}=\frac{\partial}{\partial\eta}\operatorname{Re}\varphi(\zeta),
$$

или

$$
\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial}{\partial\eta}\operatorname{Im}\varphi(\zeta),\ \frac{d\eta}{dt}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\operatorname{Im}\varphi(\zeta).
$$

Понеже ξ е фиксирано, имаме

$$
(13) \qquad \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{\xi=\mathrm{const}}d\eta=\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{\partial}{\partial\eta}\operatorname{Im}\varphi(\zeta)d=\operatorname{Im}\varphi(\zeta)\Big|_{\eta_1}
$$

В [1] формула (58) намираме

$$
(14) \qquad \operatorname{Im}\varphi(\zeta)=U\eta+\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta+h)+\sin\frac{\pi}{l}\xi}
$$

От (13) и (14) отново намираме (12).

По-нататък ще разглеждаме величините

$$Q(o,\eta;\,\xi)=\rho U\eta+\frac{\Gamma\rho}{4\pi}\ln\frac{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}h+\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]}{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta+h)+\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}h-\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]},$$

$$Q(\eta,\,o;\,\xi)=\rho U\eta+\frac{\Gamma\rho}{4\pi}\ln\frac{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)+\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}h-\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]}{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta+h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}h+\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]};$$

и

$$Q(-\eta,\eta;\xi)=Q(-\eta,0;\xi)+Q(0,\eta;\xi)=2\rho U\eta$$

$$(15)\qquad +\frac{\Gamma\rho}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin^2\frac{\pi}{l}\xi}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{l}(\eta+h)-\sin^2\frac{\pi}{l}\xi}$$

Специално за $\eta=h$ от (15) получаваме

$$Q(-h,h,\xi)=2\rho Uh+\frac{\Gamma\rho}{4\pi}\ln\frac{\cos^2\frac{\pi\xi}{l}}{\operatorname{ch}^2\frac{2\pi h}{l}-\sin^2\frac{\pi\xi}{l}}$$

за флуидния транспорт през отсечка, симетрична спрямо $\Omega\xi$ и с дължина, равна на широчината на вихровата улица.

Представлява интерес количеството флуид, придвижен само поради индукцията на вихровите центрове през безкрайна стена, перпендикулярна на оста на вихровите улици. За това количество намираме от (15)

$$Q=\lim_{\eta\to\infty}[Q(-\eta,\eta;\,\xi)-2\rho U\eta]=\frac{\Gamma\rho}{4\pi}\ln\lim_{\eta\to\infty}\frac{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin\frac{2\pi\xi}{l}}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{l}(\eta+h)-\sin^2\frac{\pi\xi}{l}}$$

$$(16)\qquad =\frac{\Gamma\rho}{2\pi}\ln\lim_{\eta\to\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta+h)}=\frac{\Gamma\rho}{2\pi}\ln\lim_{\eta\to\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{l}(\eta-h)}}{e^{\frac{\pi}{l}(\eta+h)}}=-\frac{\Gamma\rho h}{l}$$

Поради това че при $\frac{d\xi}{dt}<0$ флуидът се движи отдясно наляво, в този случай преминалата флуидна маса е отрицателна; обратно, ако флуидният транспорт е отрицателен, става пренос на флуидни маси с превес отдясно наляво. Прочее наличието във флуида на вихрова индукция поражда за единица време придвижване на флуидна маса през безкрайна стена, перпендикулярна на оста на вихровата улица, равна на $\rho\Gamma\frac{h}{l}$. Този резултат е известен [3], въпреки че е оставен неуточнен въпросът за координатната система (виж [1], стр. 205—206). Авторите на [3] твърдят: „Очевидно е, че при направените от нас предположения, тъй като на големи разстояния пред тялото предполагаме течността в покой, въпросната маса течност трябва да изтича от двете страни, т. е. стигаме до заключението, че през стените AD и BC за единица време ще изтича флуидна маса $\frac{\Gamma\rho h}{l}$."

Това твърдение е несъстоятелно, както личи от горепреведените разглеждания. Стените AD и BC, за които цитираните автори говорят, са успоредни на вихровата конфигурация (срв. т. 12 от настоящата работа).

При стабилна Карманова шахматна конфигурация имаме $\frac{h}{l} = \varkappa \approx 0{,}281$, откъдето съгласно (16) намираме $Q = -0{,}281\,\rho\Gamma$, т. е. количеството флуидна маса, дължимо само на индукцията на една устойчива Карманова вихрова улица, изтичащо за единица време през стената $\xi = \mathrm{const}$ с височина единица в посока отдясно наляво, е равно на произведението от плътността на флуида, приета за постоянна, циркулацията на вихрите, също постоянна, и Кармановия параметър за стабилност на вихровата улица.

Вижда се, че

$$\lim_{\eta\to\infty}[Q(0,\eta;\xi)-\rho U\eta] = -\frac{\Gamma\rho h}{2l}+\frac{\Gamma\rho}{4\pi}L, \tag{17}$$

$$\lim_{\eta\to\infty}[Q(-\eta,0;\xi)-\rho U\eta] = -\frac{\Gamma\rho h}{2l}-\frac{\Gamma\rho}{4\pi}L \tag{18}$$

при

$$L = \ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}+\sin\frac{\pi\xi}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}-\sin\frac{\pi\xi}{l}} \tag{19}$$

т. е. количествата флуидна маса, транспортирани през горната и долната половина на права, перпендикулярна на оста $\Omega\xi$ на улицата, с е о т л и ч а в а т с величината $\frac{\Gamma\rho L}{2\pi}$; въпреки неограничеността на тези стени несиметричността на шахматната улица оказва влиянието си. За равни крайни отсечки с общо начало върху $\Omega\xi$ тази разлика е

$$Q(0,\eta;\xi)-Q(-\eta,0;\xi) = \frac{\Gamma\rho L}{2\pi}$$

$$+\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\ln\frac{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta+h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]}{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta+h)+\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)\quad\sin\frac{\pi}{l}\xi\right]}$$

От (16) се вижда, че транспортираният от вихровата улица флуид през безкрайна стена, перпендикулярна на оста на улицата, не зависи от мястото на стената. Напротив, количествата (17) и (18) поради (19) зависят от това място (поради наличието на ξ в израза за L). Вижда се също от (17) и (18), че сумата на дефинираните с тези равенства количества е точно равна на Q от (16). Понеже в (17) и (18) можем да предполагаме, че $\eta_i \to \infty$ по независим начин в двата случая, величината Q от (16) се определя не като главна стойност на несобствения интеграл

$$\rho\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{dt}\,d\eta,$$

който е определено сходящ.

Необходимо е накрая да добавим следното. Величината $Q(\eta_1, \eta_2; \xi)$, определена с (12), става илюзорна, в случай че ξ има стойност, равна на абсцисата на някой от вихровите центрове. Наистина ако

$$\xi=\left(\frac{1}{2}+k\right)l, \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots), \tag{20}$$

то $\sin\frac{\pi\xi}{l} = \pm 1$. Ако сега $\eta_i^2 = h^2$ при $(i-1)(i-2)=0$, то единият от двата интеграла в (12) губи смисъл; например при $\xi=\frac{l}{2}$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = h$ получаваме

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta-h)\,d\eta}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi}=\int_0^h\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta-h)\,d\eta}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-1}=\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-1\right]_0^h,$$

което няма смисъл. Поради това в (12) съществено следва да се предположи, че не е налице (20), или ако (20) е изпълнено, че η_1 и η_2 са такива, че в интервала $[\eta_1, \eta_2]$ не се съдържа никоя от точките $h, -h$.

Физичният смисъл на изтъкнатото обстоятелство е следният. При (20) отсечката, транспорта през която желаем да пресметнем, съдържа при $\eta_1 < h < \eta_2$ някой вихров център. От (2) се вижда, че в близост до всеки вихров център скоростта на флуидните частици неограничено нараства. Наистина нека

$$\xi=\frac{l}{2}-\frac{\varepsilon l}{\pi}, \quad \eta=h+\frac{\varepsilon l}{\pi}$$

Тогава

$$\sin\frac{\pi\xi}{l}=\cos\varepsilon,\ \cos\frac{\pi\xi}{l}=\sin\varepsilon\,;\ \operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta-h)=\operatorname{sh}\varepsilon,\ \operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)=\operatorname{ch}\varepsilon$$

и от (2) следва

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta-h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi}=\frac{\operatorname{sh}\varepsilon}{\operatorname{ch}\varepsilon-\cos\varepsilon},$$

$$\frac{\cos\frac{\pi\xi}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\pi-h)-\sin\frac{\pi\xi}{l}}=\frac{\sin\varepsilon}{\operatorname{ch}\varepsilon-\cos\varepsilon}$$

Но имаме

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\operatorname{ch}\varepsilon-\cos\varepsilon}{\operatorname{sh}\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\operatorname{sh}\varepsilon+\sin\varepsilon}{\operatorname{ch}\varepsilon}=0\,;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\operatorname{ch}\varepsilon-\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\operatorname{sh}\varepsilon+\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}=0,$$

следователно изразите за $\frac{d\xi}{dt}$ и $\frac{d\eta}{dt}$ от (2) съдържат в този случай величини, които нарастват неограничено с $\varepsilon\to 0$, което доказва изказаното твърдение.

Такава грешка е допусната при пресмятането на флуидния транспорт при $\xi=\mathrm{const}$ между безкрайни граници в цитираната работа [3]. Ако правата, през която се пресмята количеството флуид, съдържа вихров център, резултатите стават илюзорни, тъй като подинтегралната функция в израза (22.13) на стр. 227, а именно $\frac{d\psi_1}{dy}=u$, търпи прекъсване в тази точка, което прави интеграла разходящ, както бе показано.

Следва веднага да се изтъкне обаче едно съображение, което евентуално би могло да послужи за опорна точка при пресмятанията и в този случай. За да бъдем конкретни, ще разгледаме отсечката $[\eta_1, \eta_2]$, перпендикулярна на оста ξ и съдържаща вихровия център $\left(\frac{l}{2},\ h\right)$. Известно е, че ако функцията $f(x)$ има една особена точка a в интервала $[p, q]$, такава, че поне един от двата интеграла

$$\int_p^a f(x)\,dx,\qquad \int_a^q f(x)\,dx$$

е разходящ, то интегралът

(21) $$\int_p^q f(x)\,dx$$

няма смисъл. Ако обаче

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_p^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{q} f(x)\,dx\right] = I$$

съществува, то интегралът (21) е сходящ в смисъл на главна стойност, а I е главната му стойност.

Ще покажем, че главната стойност на интеграла

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta-h)\,d\eta}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-\sin\frac{\pi}{l}\xi} \tag{22}$$

при $\xi=\frac{l}{2}$, $\eta_1<h<\eta_2$ съществува. Имаме

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int_{\eta_k}^{h+(-1)^k\varepsilon}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(\eta-h)\,d\eta}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-1}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta-h)-1\right]_{\eta_k}^{h+(-1)^k\varepsilon}$$

$$=\frac{l}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(-1)^k\varepsilon-1\right]$$

$$-\frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\ln\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta_k-h)-1\right] \tag{23}$$

$$=\frac{l}{\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta_2-h)-1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(\eta_1-h)-1}$$

Следователно релацията (12) остава формално в сила и в случая, когато отсечката $[\eta_1, \eta_2]$ съдържа вихров център, стига интегралите в този случай да се разбират в смисъл на главна стойност.

От тази гледна точка и резултатът в [3] може да се приеме за резонен, въпреки че там не става дума за главната стойност на интеграла.

В този критичен случай от формално-логична гледна точка не би могло да има никакво възражение срещу това под количество флуид по дефиниция да се разбира главната стойност на интеграла. Наистина величината Q е дефинирана с (8) при известни предположения за повърхнината S и за скоростното поле $\bar{v}(\bar{r},t)$ върху S. Ако тези предположения са нарушени по такъв начин, че величината Q престава да може да се дефинира с (8), би могло да се приеме всякаква дефиниция — всички мислими дефиниции са допустими до конкуренция в този случай от — повтаряме — формално-логична гледна точка. Критерият за това, коя дефиниция да се избере, е целесъобразността, т. е., от една страна, некритичните случаи да попадат под тази обобщена дефиниция, а от друга страна, съображения от физическо естество, тъй като тук разглеждаме физичен проблем.

Да приведем известни физични съображения за приемането на дефиницията за Q в смисъл на главна стойност на интеграла (22). В настоящата работа разглеждаме модел на Карманова вихрова улица, протичаща в идеален флуид. Всеки модел има предимства и недостатъци. Моделът отразява известни страни на явлението добре, а други — зле. В разглеждания от нас модел недостатъците се крият в поведението на флуида близо до вихровите центрове, в микроструктурата на околността на вихровия център (в модела). Наистина, както се знае и както показахме, близо до вихровия център и хоризонталните, и вертикалните компоненти на скоростта на флуидните частици растат неограничено. Оказва се, че през отсечка с произволно малка дължина, перпендикулярна на оста на вихровата конфигурация, единият край на която отсечка съвпада с вихров център, за произволно малък интервал от време минава безкрайно количество флуид. Това очевидно противоречи на физическия факт. Физическият факт е, че при фиксирано време, ако дължината на една перпендикулярна към оста на вихровата улица отсечка, чиято среда съвпада с вихровия център, клони към нула, количеството флуид, преминало през отсечката, също би клоняло към нула. Точно това обстоятелство се изразява математически с анулирането на първото събираемо в дясната страна на второто равенство (23), с което за стойност на Q следва да се приеме главното значение на интеграла. Повтаряме обаче, че тук се касае за дефиниция, по чиято целесъобразност би могло да се разисква, а не се касае за някакво доказателство, както обикновено във физиката се счита при подобни случаи.

5. Сега ще разгледаме сравнителните системи $[O]$ и $[o]$. Както посочихме, спрямо тези системи режимът е нестационарен. По този начин отчитаме ония най-често срещани в практиката случаи, при които наблюдателят или е свързан с препятствието, в който случай и флуидът, и вихровата улица са в движение, или е неподвижен спрямо флуидното течение, т. е. той се пренася заедно с течението и наблюдава движението на вихровата улица в обратна посока.

Аналогично на (12) получаваме следния флуиден транспорт през отсечка, перпендикулярна на оста на улицата, с краища $Y_1, Y_2 > Y_1$, респ. $y_1, y_2 > y_1$ за време $t_1 \leqq t \leqq t_2$: за системата $[O]$

$$Q(Y_1, Y_2;\ X) = \rho\, V(Y_2 - Y_1)(t_2 - t_1)$$

$$(24) \qquad + \frac{\rho\Gamma}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \ln \frac{\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_2 - h) - \sin\frac{\pi}{l}[X - (V-U)t]\right\}}{\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_1 - h) - \sin\frac{\pi}{l}[X - (V-U)t]\right\}}$$

$$\times \frac{\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_1 + h) + \sin\frac{\pi}{l}[X - (V-U)t]\right\}}{\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_2 + h) + \sin\frac{\pi}{l}[X - (V-U)t]\right\}} dt,$$

а за системата [0]

$$Q(y_1, y_2;\ x) = \frac{\rho\Gamma}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \ln \frac{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y_2 - h) - \sin\frac{\pi}{l}(x + Ut)\right]}{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y_1 - h) - \sin\frac{\pi}{l}(x + Ut)\right]}$$

$$(25) \qquad \times \frac{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y_1 + h) + \sin\frac{\pi}{l}(x + Ut)\right]}{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y_2 + h) + \sin\frac{\pi}{l}(x + Ut)\right]} dt.$$

Пресмятането на флуидния транспорт през безкрайната права през точка $x = \text{const}$, която права е перпендикулярна на оста на улицата, става от (25) при $y_1 \to -\infty$, $y_2 \to +\infty$. Получава се отново величината

$$Q(-\infty, \infty;\ x) = -\frac{\Gamma\rho h}{l}(t_2 - t_1).$$

В случая (24) трябва да се пресметне

$$\lim_{Y\to\infty} [Q(-Y, Y;\ X) - 2\rho\, V(t_2 - t_1)\, Y] = -\frac{\rho\Gamma h}{l}(t_2 - t_1).$$

За намирането на $Q(Y_1, Y_2;\ X)$, респ. на $Q(y_1, y_2;\ x)$, в общия случай трябва да се пресметнат интеграли от вида

$$(26) \qquad \int_{a_1}^{a_2} \ln(p_i \pm \sin u)\, du,$$

както личи от (24) и (25), дето е положено

$$(27) \qquad p_i = \operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_i + \varepsilon_i h), \quad \varepsilon_i^2 = 1, \quad a_i = \frac{l t_i}{\pi(V - U)}, \quad (i = 1, 2),$$

за (24) и

$$(28) \qquad p_i = \operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(y_i + \varepsilon_i h),\ \varepsilon_i^2 = 1, \quad a_i = \frac{lt_i}{\pi U}, \quad (i = 1, 2)$$

за (25). Поради (27) и (28) имаме $p_i \geqq 1$ $(i = 1, 2)$.

Неопределените интеграли

$$(29) \qquad \int \ln(a + \sin x)\, dx \qquad (a \geqq 1)$$

не се представят с помощта на елементарни функции. Затова за да изследваме по-отблизо величините, дефинирани с (24) и (25), ще направим разглеждания върху интегралите от вида (26).

Тези разглеждания представят математически интерес независимо от поставената хидродинамична проблема, но те са нужни за крайното решение на тази проблема.

6. Нека по дефиниция

$$(30) \qquad f(x) = \int_0^x \ln(a + \sin x)\, dx. \qquad (a > 1)$$

Имаме с последователно полагане $x = \theta + \pi$ и $\theta = \pi - u$:

$$f(2\pi) = \int_0^{2\pi} \ln(a + \sin x)\, dx = \int_0^{\pi} \ln(a + \sin x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \ln(a + \sin x)\, dx$$

$$(31) \qquad = \int_0^{\pi} \ln(a + \sin x)\, dx + \int_0^{\pi} \ln(a - \sin\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} \ln(a^2 - \sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2\theta)\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(a^2 - \sin^2\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2\theta)\, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(a^2 - \sin^2 u)\, du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2\theta)\, d\theta.$$

Но

$$(32) \qquad \int_0^1 \frac{\ln(1 - k^2x^2)\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{2}, \qquad (k^2 < 1)$$

(срв. [4], стр. 219 и 150). При $x = \sin u$ и $k = \frac{1}{a}$ получаваме от (32)

$$\pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2a} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2 u\right) du$$

(33)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2-\sin^2 u)\, du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln a^2 du.$$

От (31) и (33) следва при $a > 1$

$$\int_0^{2\pi} \ln(a+\sin x)\, dx = 2\pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2a} + 2\pi \ln a = 2\pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}. \tag{34}$$

Полагаме за краткост

$$\int_0^{2\pi} \ln(a+\sin x)\, dx = f(2\pi) = s \tag{35}$$

и разглеждаме функцията

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{sx}{2\pi}. \tag{36}$$

Функцията $\varphi(x)$ е периодична с период 2π, понеже при $\theta = u - 2\pi$ получаваме тъждествено по x

$$\varphi(x+2\pi) = f(x+2\pi) - \frac{s(x+2\pi)}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \ln(a+\sin x)\, dx$$

$$+ \int_{2\pi}^{x+2\pi} \ln(a+\sin u)\, du - \frac{s(x+2\pi)}{2\pi}$$

$$= s + \int_0^{x} \ln(a+\sin\theta)\, d\theta - \frac{s(x+2\pi)}{2\pi} = f(x) - \frac{sx}{2\pi} = \varphi(x).$$

Съгласно критерия на DIRICHLET, ако една функция $\varphi(x)$ с период 2π е частично-монотонна в интервала $[0, 2\pi]$ (т. е. интервалът $[0, 2\pi]$ може да се разложи на краен брой подинтервали, във всеки от които функцията е монотонна) и притежава в него само краен брой точки на прекъсване, то нейният фуриеров ред е сходящ към $\varphi(x_0)$ във всяка точка x_0 на непрекъснатост на $\varphi(x)$ и към $\frac{1}{2}[\varphi(x_0+0)-\varphi(x_0-0)]$ във всяка точка x_0 на прекъсване на $\varphi(x)$ [5].

За функцията $\varphi(x)$, дефинирана с (36), условията на критерия на Dirichlet са изпълнени. Наистина уравнението

$$\frac{d\,\varphi(x)}{dx}=\ln(a+\sin x)-\frac{s}{2\pi}=0,$$

т. е. съгласно (35) и (34)

$$\sin x=e^{\frac{s}{2\pi}}-a=\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}-a=\frac{\sqrt{a^2-1}-a}{2}=-\frac{1}{2(\sqrt{a^2-1}+a)}$$

има поради $a>1$ само два корена в интервала $[0,2\pi]$, което показва, че поведението на $\varphi(x)$ в смисъл на нарастване или намаляване може само два пъти да се изменя в интервала $[0,2\pi]$, отдето следва верността на твърдението за $\varphi(x)$.

Следователно функцията $\varphi(x)$ е развиваема в ред на Фурие. Коефициентите на този ред са съответно

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx, \tag{37}$$

$(n=0,1,2,\ldots)$, а самият ред е

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{38}$$

Имаме при $n=1,2,\ldots$

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,d\sin nx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x)-\frac{sx}{2\pi}\right]d\sin nx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,d\sin nx-\frac{sx\sin nx}{2n\pi^2}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{s}{2n\pi^2}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}f(x)\sin nx\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\ln(a+\sin x)\,dx$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(a+\sin x)\,d\cos nx=\frac{1}{n^2\pi}\ln(a+\sin x)\cos nx\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$-\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\cos nx}{a+\sin x}\,dx,$$

т. е.

$$a_n = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\cos nx}{a+\sin x}\,dx. \tag{39}$$

Аналогично при $n = 1, 2, \ldots$ имаме

$$b_n = \frac{-1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,d\cos nx = \frac{-1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x) - \frac{sx}{2\pi}\right]d\cos nx$$

$$= \frac{-1}{n\pi}f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{sx\cos nx}{2n\pi^2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\ln(a+\sin x)\,dx$$

$$-\frac{s}{2n\pi^2}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx = \frac{-f(2\pi)}{n\pi} + \frac{2\pi s}{2n\pi^2}$$

$$+\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(a+\sin x)\,d\sin nx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\ln(a+\sin x)\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\sin nx}{a+\sin x}\,dx,$$

т. е.

$$b_n = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\sin nx}{a+\sin x}\,dx. \tag{40}$$

За пресмятането на a_n и b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ съгласно (39) и (40) трябва да се пресметнат интегралите

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\cos nx}{a+\sin x}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi}\frac{\cos x\sin nx}{a+\sin x}\,dx.$$

За целта разглеждаме функцията

$$f(z) = \frac{z^n}{z^2+2aiz-1}.$$

Поради $z^2+2aiz-1 = (z-z_1)(z-z_2)$ със $z_1 = i(\sqrt{a^2-1}-a)$, $z_2 = i(-\sqrt{a^2-1}-a)$, дето $|z_1| = a-\sqrt{a^2-1} = \frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}} < 1$, $|z_2| = a+\sqrt{a^2-1} > 1$, функцията $f(z)$ е холоморфна в единичния кръг $|z| = 1$ с изключение на точката z_1.

Тогава имаме

$$I=\int\limits_{|z|=1}\frac{z^n dz}{z^2+2aiz-1}=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z). \tag{41}$$

Но

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)=\left[\frac{z^n}{2z+2ai}\right]_{z=z_1}=\frac{i^n(\sqrt{a^2-1}-a)^n}{2i\sqrt{a^2-1}},$$

следователно съгласно (41) получаваме

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{z^n dz}{z^2+2aiz-1}=\frac{\pi i^n(\sqrt{a^2-1}-a)^n}{\sqrt{a^2-1}} \tag{42}$$

При $z=e^{i\theta}$ имаме

$$I=\frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=1}\frac{z^n dz}{z\left(a+\dfrac{z-z^{-1}}{2i}\right)}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\cos n\theta+i\sin n\theta)\,d\theta}{a+\sin\theta}$$

т. е. съгласно (42) получаваме

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta=2\pi i^n\frac{(\sqrt{a^2-1}-a)^n}{\sqrt{a^2-1}}. \tag{43}$$

От (43) получаваме съответно при $n=2k$ и $n=2k+1$

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos 2k\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta=(-1)^k 2\pi\frac{(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k}}{\sqrt{a^2-1}}, \tag{44}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin 2k\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos(2k+1)\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta=0 \tag{45}$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin(2k+1)\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta=(-1)^k 2\pi\frac{(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k+1}}{\sqrt{a^2-1}}. \tag{46}$$

Но поради

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\cos n\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos(n+1)\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos(n-1)\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta, \tag{47}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\sin n\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin(n+1)\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin(n-1)\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta \tag{48}$$

получаваме съгласно (44)—(46) релациите

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\cos n\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta=\begin{cases}0 & (n=2k)\\ \pi(-1)^k\dfrac{(\sqrt{a^2-1}\quad a)^{2k}}{\sqrt{a^2\quad 1}}\left[1-(\sqrt{a^2-1}\quad a)^2\right] & (n=2k+1)\\ =2\pi(-1)^{k+1}(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k+1}, & \end{cases}$$

и

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\sin n\theta}{a+\sin\theta}\,d\theta=\begin{cases}\pi(-1)^{k+1}\dfrac{(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k-1}}{\sqrt{a^2-1}}\left[1-(\sqrt{a^2-1}-a)^2\right] & (n=2k)\\ =2\pi(-1)^k(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k}. & \\ 0 & (n=2k+1)\end{cases}$$

От друга страна, съгласно (39) и (40) имаме

$$\text{(49)}\qquad a_n=\begin{cases}0 & (n=2k)\\ \dfrac{1}{n^2}(-1)^{k+1}\dfrac{(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k}}{\sqrt{a^2-1}}\left[1-(\sqrt{a^2-1}-a)^2\right] & \\ =\dfrac{2}{n^2}(-1)^k(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k+1} & (n=2k+1)\end{cases}$$

и

$$\text{(50)}\qquad b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}(-1)^k\dfrac{(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k-1}}{\sqrt{a^2-1}}\left[1-(\sqrt{a^2-1}-a)^2\right] & (n=2k)\\ =\dfrac{2}{n^2}(-1)^{k+1}(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k} & \\ 0 & (n=2k+1)\end{cases}$$

или обединени

$$\text{(51)}\qquad a_n=\frac{1}{n^2}\left[1+(-1)^{n+1}\right](-1)^{\frac{n-1}{2}}(\sqrt{a^2-1}-a)^n,$$

$$b_n=\frac{1}{n^2}\left[1+(-1)^n\right](-1)^{\frac{n}{2}+1}(\sqrt{a^2-1}-a)^n.$$

От (37) при $n=0$ пък имаме

$$\pi a_0=\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx=\int_0^{2\pi}f(x)\,dx-\frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=xf(x)\Big|_0^{2\pi}$$

$$-\int_0^{2\pi}x\ln(a+\sin x)\,dx-\frac{s}{2\pi}\,\frac{4\pi^2}{2}=\pi s-\int_0^{2\pi}x\ln(a+\sin x)\,dx.$$

Последователно получаваме при $\theta=\pi-x$ и $u=x\quad 2\pi$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} x \ln(a+\sin x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln(a+\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \ln(a+\sin x)\,dx \\
&+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x \ln(a+\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln(a+\sin x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (\pi-\theta) \ln(a+\sin\theta)\,d\theta \\
&+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (2\pi - u) \ln(a+\sin u)\,du = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a+\sin\theta)\,d\theta \\
&+ 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(a+\sin u)\,du.
\end{aligned} \tag{52}
$$

Но при $x = -\theta$ имаме

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a+\sin\theta)\,d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(a+\sin\theta)\,d\theta \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a+\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a-\sin x)\,dx \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a+\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2-\sin^2\theta)\,d\theta = \pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}
\end{aligned} \tag{53}
$$

съгласно (33).

Аналогично при $x = -\theta$ намираме

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(a+\sin\theta)\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a-\sin x)\,dx = x \ln(a-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{a-\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} \ln(a-1) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{a-\sin x}\,dx.
\end{aligned} \tag{54}
$$

Но при $x=\pi-\theta$ имаме

$$\int_0^{\pi}\frac{\theta\cos\theta}{a-\sin\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta\cos\theta}{a-\sin\theta}d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\theta\cos\theta}{a-\sin\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta\cos\theta\,d\theta}{a-\sin\theta}$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-x)\cos x dx}{a-\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta\cos\theta}{a-\sin\theta}d\theta-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{a-\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{a-\sin x}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{a-\sin x}dx+\pi\ln(a-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

т. е.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{a-\sin x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\theta\cos\theta\,d\theta}{a-\sin\theta}-\frac{\pi}{2}\ln\frac{a-1}{a} \tag{55}$$

Вземаме пред вид

$$\int_0^{\pi}\frac{x\cos x dx}{1+p\sin x}=\frac{2\pi}{p}\ln\frac{2}{1+\sqrt{1+2p}} \tag{56}$$

(срв. [4], стр. 186). В (56) полагаме $p=-\frac{1}{a}$ и получаваме ($a\geqq 2$).

$$\int_0^{\pi}\frac{x\cos x}{a-\sin x}dx=-2\pi\ln\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}\,. \tag{57}$$

Както ще стане очевидно от т. 7 и сл., свободният член a_0 се елиминира в крайните резултати с изключение на случая, когато единият от краищата на отсечката-стена лежи върху оста на вихровата улица. Следователно ограничението $a\geqq 2$ е съществено само в този случай*):
Тогава от (57) и (55) намираме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x dx}{a-\sin x}=-\pi\ln\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}$$

$$-\frac{\pi}{2}\ln\frac{a-1}{a}=-\pi\ln\frac{2\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}},$$

* В една следваща работа „Флуиден транспорт, индуциран от Карманови вихрови улици. II", Год. Соф. унив., т. 53, 1958/59, кн. 1, 37—89 даваме стойността на a_0, пресметната по друг начин и за всички стойности на параметъра $a>1$.

а от (54) следва

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(a+\sin\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}\ln(a-1) - \pi\ln\frac{2\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}} = \pi\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}{2},$$

което с (52) и (53) дава

$$\int_{0}^{2\pi} x\ln(a+\sin x)\,dx = \pi^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2} + 2\pi^2\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}{2}.$$

Следователно съгласно израза за πa_0 и (34) получаваме

$$a_0 = s - \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$$

(58)

$$-2\pi\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}{2} = \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$$

$$-2\pi\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}{2} = \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-1+\sqrt{a(a-2)}}.$$

И тъй от (38), (49), (50) и (58) следва тригонометричното развитие на функцията $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-1+\sqrt{a(a-2)}}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}(-1)^{k+1}\frac{(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k}}{\sqrt{a^2-1}}\Big[1$$

(59)

$$-(\sqrt{a^2-1}-a)^2\Big]\cos(2k+1)x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}(-1)^k\frac{(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k-1}}{\sqrt{a^2-1}}\Big[1$$

$$-(\sqrt{a^2-1}-a)^2\Big]\sin 2kx,$$

т. е. съгласно (36) получаваме

$$f(x) = \frac{\pi}{4}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-1+\sqrt{a(a-2)}} + x\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$$

(60) $$+2\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}(-1)^k(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k+1}\cos(2k+1)x$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}(-1)^{k+1}(\sqrt{a^2-1}-a)^{2k}]\sin 2k x$$

за всяко реално x.

В (59) и (60) двете суми трябва да се схващат като единствена, при което последователно се дават нарастващи стойности на $k=0, 1\ldots$ ту в първата, ту във втората сума. Този начин на записване е даден поради структурата на величините a_n и b_n от (49) и (50). Това неудобно записване може да се избегне, като се съобрази следното: от (49) и (50) се вижда, че всички четни a_n и всички нечетни b_n са нули (виж 51), т. е. имаме

$$a_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^{n+1}]a_n,\quad b_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^n]\,b_n$$

($n=1, 2,\ldots$). Тогава редът за $\varphi(x)$ може да се напише така

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\{[1+(-1)^{n+1}]\,a_n\cos n\theta+[1+(-1)^n]\,b_n\sin n\theta\}, \tag{61}$$

при (49) и (50), т. е. получаваме

$$f(x)=\frac{\pi}{4}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-1+\sqrt{a(a-2)}}+x\ln\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{[1+(-1)^{n+1}]\frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}(\sqrt{a^2-1}-a)^n\cos n x$$

$$+[1+(-1)^n]\,\frac{1}{n^2}\,(-1)^{\frac{n}{2}+1}(\sqrt{a^2-1}-a)^n\sin n x\},$$

или окончателно

$$f(x)=\frac{\pi}{4}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-1+\sqrt{a(a-2)}}+x\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{a^2-1}-a)^n}{n^2}\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos n x \tag{62}$$

$$+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin n x.$$

Полученото развитие на функцията $\int_0^x \ln(a+\sin x)\,dx$ при $a>1$ е аналог на функцията на Лобачевски

$$L(x)=-\int_0^x \ln\cos x\,dx, \tag{63}$$

която, както е известно (срв. 4, стр. 328), има тригонометричното развитие

(64) $$L(x) = x\ln 2 \quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin 2kx}{k^2}.$$

Поради

$$\int_0^x \ln\sin x\,dx = L\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - L\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

функцията на Лобачевски има отношение към разглеждания от нас проблем при такива интеграционни граници в (24), при които се получават функции (29) с $a=1$. На този въпрос ще се върнем по-нататък.

Да отбележим, че Лобачевски разглежда развитие в ред на една функция, която в специални случаи съвпада с функцията (30), чието тригонометрично развитие е дадено с (62) при $a>1$. Именно той показва [6], че (срв. [4], стр. (208)

$$\int_0^u \ln(1-\sin^2\alpha\sin^2 x)\,dx = (\pi-2\theta)\ln\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2u\ln\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

(65) $$-\frac{\pi}{2}\ln 2 + L(\theta+u) - L(\theta-u) - L\left(\frac{\pi}{2}-2u\right),$$

дето е положено

(66) $$\operatorname{ctg}\theta = \cos\alpha\operatorname{tg}u,\quad -\pi\leqq\alpha\leqq\pi,\quad -\frac{\pi}{2}\leqq u\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Но при $\alpha\neq\pm\pi$ (впрочем при $\alpha=\pm\pi$ формулата (65) губи смисъл поради наличието на $\ln\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $\ln\sin\alpha$) имаме

$$I = \int_0^u \ln(1-\sin^2\alpha\sin^2 x)\,dx = \int_0^u \ln\left(1-\sin^2\alpha\,\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^u \ln(2-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos 2x)\,dx - u\ln 2$$

$$= \int_0^u \ln\left(\frac{2}{\sin^2\alpha}-1+\cos 2x\right)dx + u\ln\frac{\sin^2\alpha}{2}.$$

Но при $\frac{2}{\sin^2\alpha}-1=a$ имаме $a>1$. Като положим $2x=\frac{\pi}{2}-\theta$, намираме

$$I = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-2u}\ln(a+\sin\theta)\,d\theta + u\ln\frac{1}{2}\sin^2\alpha,$$

т. е.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-2u} \ln(a+\sin\theta)d\theta = 2u\ln\frac{\sin^2\alpha}{2} - 2I.$$

При $\frac{\pi}{2} - 2u = x$ получаваме прочее съгласно (65)

$$\int_0^x \ln(a+\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a+\sin\theta)\,d\theta + \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln\frac{\sin^2\alpha}{2}$$

$$-2(\pi-2\theta)\ln\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln\frac{\sin\alpha}{2} + \pi\ln 2 \quad 2L\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

(67) $$+2L\left(\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2L(x),$$

дето съгласно (66)

(68) $$-\pi<\alpha<\pi, \quad 0\leqq x\leqq 2\pi, \quad \operatorname{ctg}\theta = \cos\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

Като съобразим (64), намираме от (67) релацията

$$\int_0^x \ln(a+\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a+\sin\theta)\,d\theta + \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln\frac{\sin^2\alpha}{2}$$

$$-2(\pi-2\theta)\ln\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln\frac{\sin\alpha}{2} + \pi\ln 2 - 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\ln 2$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin 2k\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{k^2} + 2\left(\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\ln 2$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin 2k\left(\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{k^2} - 2x\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin 2kx}{k^2}.$$

Но имаме

$$\sin k\left(2\theta+\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin k\left(2\theta-\frac{\pi}{2}+x\right) = 2\sin k\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos 2k\theta,$$

следователно

$$\int_0^x \ln(a+\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a+\sin\theta)\,d\theta + \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln 2 - 2(\pi-2\theta)\ln\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$(69)\qquad -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}\left[2\sin k\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos 2k\theta+\sin 2k\,x\right].$$

Редът, фигуриращ в (69), не е тригонометричен поради (68). Използването му при разглеждания хидродинамичен проблем едва ли е целесъобразно, както личи от структурата на този ред.

Да отбележим тук, че фуриерово развитие на функцията (30) досега не ни е известно. От друга страна, чрез развитието (62) се получава твърде просто представяне с помощта на тригонометричен ред на функцията (65), разгледана от Лобачевски. Наистина имаме

$$\int_0^x \ln(a-\sin\theta)\,d\theta=-\int_0^{-x}\ln(a+\sin\theta)\,d\theta=-f(-x)$$

и

$$\int_0^x \ln(a^2-\sin^2\theta)\,d\theta=f(x)-f(-x),$$

т. е. при $\frac{1}{a}=\sin\alpha<1\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ получаваме съгласно (62)

$$\int_0^x \ln(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)\,d\theta=x\ln\sin^2\alpha+2x\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$$

$$+\frac{1-(\sqrt{a^2-1}-a)^2}{\sqrt{a^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{a^2-1}-a)^{n-1}}{n^2}[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}}\sin n\,x$$

$$=x\ln\sin^2\alpha+2x\ln\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}$$

$$[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}}\sin n\,x=2x\ln\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\sin 2k\,x.$$

7. Да се върнем на нашия проблем, за която цел получения израз (24) за количеството флуид, протичащо през отсечка, неподвижна спрямо системата $[O]$ и перпендикулярна към оста на улицата, за време t_2-t_1, представяме във вида

$$Q(Y_1,\ Y_2;\ X)=\rho\,V(t_2-t_1)(Y_2-Y_1)$$

$$(70)\qquad +\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k+1}\int_{t_1}^{t_2}\ln[a_{ik}+(-1)^k\sin\theta]\,dt,$$

дето е положено

$$(71)\qquad \theta=\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]$$

и

$$a_{ik} = \operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[Y_i + (-1)^k h]. \quad (i = 1,\ 2) \tag{72}$$

С цел да отличим параметъра a полагаме

$$\int_0^x \ln(a + \sin x)\, dx = F(x,\ a). \tag{73}$$

Имаме при $a_{ik} > 1$, т. е. при $Y_i^2 \neq h^2 \quad (i = 1,\ 2)$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \ln\{a_{ik} + (-1)^k \sin\frac{\pi}{l}[X - (V-U)\,t]\}\, dt \\ = \frac{-l}{\pi(V-U)}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln[a_{ik} + (-1)^k \sin\theta]\, d\theta,\end{aligned} \tag{74}$$

дето е положено

$$\theta_i = \frac{\pi}{l}[X - (V-U)\,t_i]. \qquad (i = 1,\ 2) \tag{75}$$

Но при $v = -u$ получаваме

$$\int_0^x \ln(a - \sin u)\, du = -\int_0^{-x} \ln(a + \sin v)\, dv = -F(-x,\ a).$$

Следователно имаме

$$\int_{x_1}^{x_2} \ln(a + \sin x)\, dx = F(x_2,\ a) - F(x_1,\ a) \tag{76}$$

и

$$\int_{x_1}^{x_2} \ln(a - \sin x)\, dx = F(-x_1,\ a) - F(-x_2,\ a). \tag{77}$$

Прочее съгласно (76) и (77) намираме за (74)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln[a_{ik} + (-1)^k \sin\theta]\ d\theta = \sum_{\nu=1}^{2} (-1)^{k+\nu} F[(-1)^k \theta_\nu,\ a_{ik}]. \tag{78}$$

Тогава от (70), (71), (72), (74) и (78) следва

$$\begin{aligned} Q(Y_1,\ Y_2;\ x) &= \rho\, V(t_2 - t_1)(Y_2 - Y_1) \\ &- \frac{\rho\Gamma l}{4\pi^2(V-U)} \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} (-1)^{i+k+1} \sum_{\nu=1}^{2} (-1)^{k+\nu} F[(-1)^k\theta_\nu,\ a_{ik}] \end{aligned} \tag{79}$$

$$= \rho\, V(t_2 - t_1)(Y_2 - Y_1) + \frac{\rho\Gamma l}{4\pi^2(V-U)} \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} (-1)^i \sum_{\nu=1}^{2} (-1)^\nu F[(-1)^k\theta_\nu,\ a_{ik}].$$

Но от (62), (30) и (73) имаме

$$\sum_{\nu=1}^{2}(-1)^{\nu}F[(-1)^{k}\theta_{\nu},\ a_{ik}]=\sum_{\nu=1}^{2}(-1)^{\nu}\left[(-1)^{k}\theta_{\nu}\ln\frac{a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^{2}-1}}{2}\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{a_{ik}^{2}-1}-a_{ik})^{n}}{n^{2}}\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos n(-1)^{k}\theta_{\nu}$$

$$+[1+(-1)^{n}](-1)^{\frac{n}{2}+1}\times\sin(-1)^{k}n\,\theta_{\nu}\}=(-1)^{k}\ln\frac{a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^{2}-1}}{2}(\theta_{2}-\theta_{1})$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{a_{ik}^{2}-1}-a_{ik})^{n}}{n^{2}}\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{\nu=1}^{2}(-1)^{\nu}\cos n\theta_{n}$$

$$+[1+(-1)^{n}](-1)^{\frac{n}{2}+k+1}\sum_{\nu=1}^{2}(-1)^{\nu}\sin n\theta_{\nu}\} \tag{80}$$

$$=(-1)^{k}\ln\frac{a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^{2}-1}}{2}(\theta_{2}-\theta_{1})$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{a_{ik}^{2}-1}-a_{ik})^{n}}{n^{2}}\sin\frac{n(\theta_{2}-\theta_{1})}{2}$$

$$\times\left\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\frac{n(\theta_{1}+\theta_{2})}{2}\right.$$

$$\left.+(-1)^{k}[1+(-1)^{n}](-1)^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n(\theta_{1}+\theta_{2})}{2}\right\},$$

дето

$$\frac{\theta_{1}+\theta_{2}}{2}=\frac{\pi}{l}\left[X-\frac{V-U}{2}(t_{1}+t_{2})\right],\quad\frac{\theta_{2}-\theta_{1}}{2}=-\frac{\pi}{2l}(V-U)(t_{2}-t_{1}). \tag{81}$$

От (79) и (80) получаваме

$$Q(Y_{1},\ Y_{2};\ X)=\rho\,V(Y_{2}-Y_{1})(t_{2}-t_{1})$$

$$+\frac{\rho\Gamma l}{4\pi^{2}(V-U)}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k}\ln\frac{a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^{2}-1}}{2}(\theta_{2}-\theta_{1})$$

$$\frac{\rho\Gamma l}{2\pi^{2}(V-U)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}\sin\frac{n(\theta_{2}-\theta_{1})}{2}$$

$$(82)\quad \times\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^i\left(\sqrt{a_{ik}^2-1}-a_{ik}\right)^n\Big\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\frac{n(\theta_1+\theta_2)}{2}$$

$$+(-1)^k[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n(\theta_1+\theta_2)}{2}\Big\}$$

$$=\rho V(Y_2-Y_1)(t_2-t_1)-\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+k}\ln\frac{a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^2-1}}{2}(t_2-t_1)$$

$$-\frac{\rho\Gamma l}{4\pi^2(V-U)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2l}(V-U)(t_2-t_1)$$

$$\times 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^i\left(\sqrt{a_{ik}^2-1}-a_{ik}\right)^n\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\times\sin\frac{n\pi}{l}[X-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)]+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}+k+1}$$

$$\times\cos\frac{n\pi}{l}[X-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)]\}.$$

Вижда се от (82), че чрез тази релация четирите тригонометрични реда, съответствуващи на четирите функции (30) в израза (24) за $Q(Y_1, Y_2; X)$, са групирани в единствен фуриеров ред, с което ефективните пресмятания, следващи в точка 8, чувствително се облекчават и резултатите се обединяват.

8. Трябва да разграничим случаите

$$(83)\qquad Y_i>h,$$

$$(84)\qquad -h<Y_i<h,$$

$$(85)\qquad Y_i<-h,$$

за $i=1$ или $i=2$.

При (83) имаме

$$(86)\qquad \operatorname{sh}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]>0,$$

следователно

$$(87)\quad \sqrt{a_{ik}^2-1}-a_{ik}=\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]-\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]=-e^{-\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]}$$

$$(88)\quad a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^2-1}=\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]+\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]=e^{\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]}$$

При (84) имаме

$$\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h](-1)^k>0, \tag{89}$$

следователно

$$\sqrt{a_{ik}^2-1}-a_{ik}=(-1)^k\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h] \tag{90}$$

$$-\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]=-e^{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]},$$

$$a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^2-1}=\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]+(-1)^k\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h] \tag{91}$$

$$=(-1)^{k\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]}.$$

При (85) имаме

$$\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]<0, \tag{92}$$

следователно

$$\sqrt{a_{ik}^2-1}-a_{ik}=-\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]-\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h] \tag{93}$$

$$=e^{-\frac{n}{l}[Y_i+(-1)^k h]},$$

$$a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^2-1}=\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h] \tag{94}$$

$$-\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]-\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h].$$

Възможни са деветте случая

(95) $h<Y_2$ с $h<Y_1$, $-h<Y_1<h$, $Y_1<-h$,

(96) $-h<Y_2<h$ с $h<Y_1$, $-h<Y_1<h$, $Y_1<-h$,

(97) $Y_2<-h$ с $h<Y_1$, $-h<Y_1<h$, $Y_1<-h$,

на които съответствуват различни по конструкция величини $Q(Y_1, Y_2; X)$ в зависимост от положенията на краищата на перпендикулярната към оста на улицата отсечка в трите зони между и извън двете вихрови редици. Причината е, че величините, определени с (86), (87), (88), (89), (90), (91) и (92), (93), (94) са различни, според случаите (83), (84) и (85). Не всички случаи (95), (96) и (97) обаче са съществено различни. Наистина от (24) се вижда, че

$$Q(Y_2, Y_1; X)=-Q(Y_1, Y_2; X).$$

Следователно ако сме разгледали например случая $Y_2>h$, $Y_1<-h$, няма смисъл да разглеждаме отделно случая $Y_1 > h$, $Y_2 < -h$. Ръководени от тази забележка, елиминираме аналогичните в посочения смисъл случаи в (95), (86) и (97) и получаваме възможностите

$$Y_2 > h, \quad Y_1 > h, \tag{99}$$

$$Y_2 > h, \quad -h < Y_1 < h, \tag{100}$$

$$Y_2 > h, \quad Y_1 < -h, \tag{101}$$

$$-h < Y_2 < h, \quad -h < Y_1 < h, \tag{102}$$

$$-h < Y_2 < h, \quad Y_1 < -h, \tag{103}$$

$$Y_2 < -h, \quad Y_1 < -h. \tag{104}$$

Следната забележка също ще ни спести известни пресмятания. Нека сме пресметнали $Q(Y_1, Y_2; X)$ например при (99). Ако положим

$$Y_i' = -Y_i, \tag{105}$$

тогава имаме $Y_i' < -h$, т. е. случая (104). Но от (24) се вижда, че

$$Q(Y_1, Y_2; X) = Q(-Y_1', -Y_2'; X) = -\rho V(Y_2' - Y_1')(t_2 - t_1)$$

$$+\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2} \ln\frac{\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_2'+h) - \sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\}}{\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_1'+h) - \sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\}}$$

$$\times\frac{\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_1'-h) + \sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\}}{\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_2'-h) + \sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\}}dt = \rho V(Y_1' - Y_2')(t_2 - t_1)$$

$$-\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2} \ln\frac{\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_2'+h) - \sin\frac{\pi}{l}[X+l-(V-U)t]\}}{\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_1'+h) - \sin\frac{\pi}{l}[X+l-(V-U)t]\}}$$

$$\times\frac{\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_1'-h) - \sin\frac{\pi}{l}[X+l-(V-U)t]\}}{\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_2'-h) - \sin\frac{\pi}{l}[X+l-(V-U)t]\}}dt$$

$$= 2\rho V(Y_1' - Y_2')(t_2 - t_1) - Q(Y_1', Y_2'; X+l) = 2\rho V(Y_2 - Y_1)(t_2 - t_1)$$

$$- Q(-Y_1, -Y_2; X+l),$$

т. е. можем да пресметнем $Q(Y_1, Y_2; X+l)$ и в случая (104). Също така, ако познаваме $Q(Y_1, Y_2; X)$ в случая (100), можем да пресметнем същата величина и в случая (103), полагайки (105), тъй като тогава имаме $Y_2' < -h$, $-h < Y_1' < h$. Прочее от (99) до (104) остават като съществено различни само първите четири случая, с които предстои да се занимаем.

При това следва да се обърне внимание на още една подробност. Целта на разглежданията, които извършваме, е да се пресметне интегралът (24) или (70) със (71) и (72). Но интегралите в (70) са получени след предварително интегриране спрямо Y на изрази от вида, фигуриращи в десните страни на първото уравнение на (1). Тези интеграли са лишени от смисъл, ако знаменателите на някои от дробите в това уравнение се анулират, т. е. ако

$$\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y - h) - \sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\}\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y+h)$$

$$+\sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\} = 0,$$

което съответствува на

$$(Y^2-h^2)^2 + [X-(V-U)t-\left(\frac{1}{2}+k\right)l]^2 = 0$$

при $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$, т. е. на

$$Y_1 = h \text{ или } Y_2 = -h \text{ и } t = \frac{X-\left(\frac{1}{2}+k\right)l}{V-U} = \tau$$

при фиксирано X, съответствуващо на абсцисата на пресечната точка на правата, през която разглеждаме флуидния транспорт. Следователно разглежданията губят смисъл, ако интеграционната област $Y_1 \leqq Y \leqq Y_2$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ на $Q(Y_1, Y_2; X)$ съдържа някоя от точките $(-h, \tau)$ или (h, τ), съответствуващи на вихрови центрове, и имат смисъл във всички други случаи.

Тук обаче също следва да се има пред вид забележката в точка 4 относно главната стойност на интеграла в тези критични случаи.

9. Предстои ефективното пресмятане на флуидния транспорт $Q(Y_1, Y_2; X)$ в окончателна форма за четирите съществено различни случая (99) — (102).

Полагаме за краткост

$$A_1 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k}\ln\frac{a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^2-1}}{2} \tag{106}$$

$$A_2 = 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+1}\left(\sqrt{a_{ik}^2-1}-a_{ik}\right)^n,$$

$$A_3 = 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k}\left(\sqrt{a_{ik}^2-1}-a_{ik}\right)^n. \tag{107}$$

Очевидно имаме

$$A_1 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{i+k} \ln\left(a_{ik} + \sqrt{a_{ik}^2 - 1}\right).$$

В случая (99) са изпълнени релациите (86), (87) и (88) за $= 1, 2$. Имаме прочее в този случай

$$A_1 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k}\frac{\pi}{l}\left[Y_i + (-1)^k h\right]$$

$$(108) \qquad = \frac{\pi}{l}\sum_{i=1}^{2}(-1)^2\left[-Y_i + h + Y_i + h\right] = 0,$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^{2}(-1)^i \sum_{k=1}^{2} 2e^{-\frac{\pi}{l}[Y_i + (-1)^k h]}(-1)^{n-1} e^{-\frac{(n-1)\pi}{l}[Y_i + (-1)^k h]}$$

$$= 2(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i \sum_{k=1}^{2} e^{-\frac{\pi n}{l}[Y_i + (-1)^k h]}$$

$$= 2(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i e^{-\frac{n\pi}{l}Y_i}\sum_{k=1}^{2} e^{-\frac{n\pi}{l}(-1)^k h}$$

$$(109) \qquad = 4(-1)^{n-1}\operatorname{ch}\frac{n\pi h}{l}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i e^{-\frac{n\pi}{l}Y_i}$$

$$A_3 = 2(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i e^{-\frac{n\pi}{l}Y_i}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k e^{-\frac{n\pi}{l}(-1)^k h}$$

$$(110) \qquad = -4(-1)^{n-1}\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i e^{-\frac{n\pi}{l}Y_i}$$

Следователно в случая $Y_i > h \ (i = 1, 2)$ получаваме окончателно от (82), (108), (109) и (110)

$$Q(Y_1, Y_2; X) = \rho V (Y_2 - Y_1)(t_2 - t_1)$$

$$+ \frac{\rho \Gamma l}{\pi^2 (V \quad U)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2l}(V \quad U)(t_2 - t_1)\sum_{i=1}^{2}(-1)^i e^{-\frac{n\pi}{l}Y_i}$$

$$(111) \qquad \times \Big\{[1 \quad (-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{ch}\frac{n\pi h}{l}\sin\frac{n\pi}{l}\left[X - \frac{V-U}{2}(t_1 + t_2)\right]$$

$$+[1+(-1)^n](-1)^2\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\cos\frac{n\pi}{l}\left[X-\frac{V-U}{2}(t_1 \quad t_2)\right]\Bigg\}$$

В случая (100) са изпълнени релациите (86), (87) и (88) за $i=2$ и релациите (89), (90) и (91) за $i=1$. Имаме прочее в този случай

$$(112)\qquad A_1=\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\left\{-(-1)^k\frac{\pi}{l}[Y_1+(-1)^? h]+\frac{\pi}{l}[Y_2+(-1)^k h]\right\}$$

$$=\frac{2\pi}{l}(h-Y_1),$$

$$A_2=\sum_{k=1}^{2}\Big\{-2e^{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}[Y_1+(-1)^k h]}(-1)^{n-1}e^{(-1)^{k+1}\frac{(n-1)\pi}{l}[Y_1+(-1)^k h]}$$

$$2e^{-\frac{\pi}{l}[Y_2+(-1)^k h]}(-1)^{n-1}e^{-\frac{(n-1)\pi}{l}[Y_2+(-1)^k h]}\Big\}$$

$$(113)\qquad =2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{2}\left\{-e^{(-1)^{k+1}\frac{n\pi}{l}[Y_1+(-1)^k h]}+e^{-\frac{\pi n}{l}[Y_2+(-1)^k h]}\right\}$$

$$=2(-1)^{n-1}\left\{-e^{\frac{n\pi}{l}[Y_1-h]}-e^{-\frac{n\pi}{l}(Y_1+h)}+e^{-\frac{n\pi}{l}(Y_2-h)}+e^{-\frac{n\pi}{l}(Y_2+h)}\right\}$$

$$=4(-1)^{n-1}\left\{-e^{-\frac{n\pi h}{l}}\operatorname{ch}\frac{n\pi Y_1}{l}+e^{-\frac{n\pi Y_2}{l}}\operatorname{ch}\frac{n\pi h}{l}\right\}$$

$$A_3=2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\left\{-e^{(-1)^{k+1}\frac{n\pi}{l}[Y_1+(-1)^k h]}+e^{-\frac{n\pi}{l}[Y_2+(-1)^k h}\right\}$$

$$(114)\qquad =2(-1)^{n-1}\left\{e^{\frac{n\pi}{l}(Y_1-h)}-e^{-\frac{n\pi}{l}(Y_1+h)} \quad e^{-\frac{n\pi}{l}(Y_2-h)} \quad e^{-\frac{n\pi}{l}(Y_2+h)}\right\}$$

$$=4(-1)^{n-1}\left\{e^{-\frac{n\pi h}{l}}\operatorname{sh}\frac{n\pi Y_1}{l}-e^{-\frac{n\pi Y_2}{l}}\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\right\}.$$

Следователно в случая $Y_2>h$, $h<Y_1<h$ получаваме окончателно от (82), (112), (113) и (114)

$$Q(Y_1,Y_2;X)=\rho V(Y_2-Y_1)(t_2 \quad t_1) \quad \frac{\rho\Gamma}{2l}(h-Y_1)(t_2-t_1)$$

$$+\frac{\rho\Gamma l}{\pi^2(V-U)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2l}(V-U)(t_2 \quad t_1)\Big\{\Big[-e^{-\frac{n\pi h}{l}}\operatorname{ch}\frac{n\pi Y_1}{l}$$

$$+e^{\frac{-n\pi Y_2}{l}}\operatorname{ch}\frac{n\pi h}{l}\Big]\,[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi}{l}\Big[X-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\Big]$$

(115)

$$+\Big[e^{\frac{-n\pi h}{l}}\operatorname{sh}\frac{n\pi Y_1}{l}-e^{\frac{-n\pi Y_2}{l}}\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\Big]$$

$$\times[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{l}\Big[X-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\Big]\Big]\Big\}$$

В случая (101) са изпълнени релациите (86), (87) и (88) за $i=2$ и релациите (92), (93) и (94) за $i=1$. Имаме прочее в този случай

$$A_1=\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\Big\{\frac{\pi}{l}[Y_1+(-1)^k h]+\frac{\pi}{l}[Y_2+(-1)^k h]\Big\}=\frac{4\pi h}{l}. \tag{116}$$

$$A_2=\sum_{k=1}^{2}\Big\{-2\,e^{\frac{\pi}{l}[Y_1+(-1)^k h]}(-1)^{n-1}e^{\frac{(n-1)\pi}{l}[Y_1+(-1)^k h]}$$

$$+e^{-\frac{\pi}{l}[Y_2+(-1)^k h]}(-1)^{n-1}e^{-\frac{(n-1)\pi}{l}[Y_2+(-1)^k h]}\Big\} \tag{117}$$

$$=2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{2}\Big\{-e^{\frac{n\pi}{l}[Y_1+(-1)^k h]}+e^{-\frac{n\pi}{l}[Y_2+(-1)^k h]}\Big\}$$

$$=4(-1)^{n-1}\Big\{-e^{\frac{n\pi Y_1}{l}}\operatorname{ch}\frac{n\pi h}{l}+e^{-\frac{n\pi Y_2}{l}}\operatorname{ch}\frac{n\pi h}{l}\Big\}$$

$$=4(-1)^{n-1}\operatorname{ch}\frac{n\pi h}{l}\Big[e^{\frac{-n\pi Y_2}{l}}-e^{\frac{n\pi Y_1}{l}}\Big].$$

$$A_3=2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{2}\Big\{-e^{\frac{n\pi}{l}[Y_1+(-1)^k h]}+e^{-\frac{n\pi}{l}[Y_2+(-1)^k h]}$$

$$=4(-1)^{n-1}\Big[-e^{\frac{n\pi Y_1}{l}}\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}-e^{\frac{-n\pi Y_2}{l}}\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\Big] \tag{118}$$

$$=-4(-1)^{n-1}\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\Big[e^{\frac{n\pi Y_1}{l}}+e^{\frac{-n\pi Y_2}{l}}\Big\}\Big].$$

Следователно в случая $Y_2>h$, $Y_1<-h$ получаваме окончателно от (82), (116), (117) и (118)

$$Q(Y_1,\ Y_2;\ X)=\rho\,V(Y_2-Y_1)(t_2-t_1)-\rho\frac{\Gamma h}{l}(t_2-t_1)$$

$$+\frac{\rho\Gamma l}{\pi^2(V-U)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2l}(V-U)(t_2-t_1)\{\operatorname{ch}\frac{n\pi h}{l}[e^{\frac{-n\pi Y_2}{l}}$$

$$(119)\qquad -e^{\frac{n\pi Y_1}{l}}\Big][1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi}{l}[X-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)]$$

$$-\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\left[e^{\frac{n\pi Y_1}{l}}+e^{-\frac{n\pi Y_2}{l}}\right][1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{l}[X-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)]\}.$$

В случая (102) са изпълнени релациите (89), (90) и (91) за $i=1, 2$. Имаме прочее в този случай:

$$A_1=\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k}(-1)^k\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]$$

$$(120)\qquad =\frac{\pi}{l}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[Y_i-h+Y_i+h]=\frac{2\pi}{l}(Y_2-Y_1).$$

$$A_2=\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^i 2e^{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]}(-1)^{n-1}e^{(-1)^{k+1}\frac{(n-1)\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]}$$

$$(121)\qquad =2(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\sum_{k=1}^{2}e^{(-1)^{k+1}\frac{n\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]}$$

$$=4(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i e^{-\frac{n\pi h}{l}}\operatorname{ch}\frac{n\pi Y_i}{l}=4(-1)^{n-1}e^{-\frac{n\pi h}{l}}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\operatorname{ch}\frac{n\pi Y_i}{l}.$$

$$A_3=2(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i e^{-\frac{n\pi h}{l}}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k e^{(-1)^{k+1}\frac{n\pi Y_i}{l}}$$

$$(122)\qquad =-4(-1)^{n-1}e^{-\frac{n\pi h}{l}}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\operatorname{sh}\frac{n\pi Y_i}{l}.$$

Следователно в случая $-h<Y_i<h$ $(i=1, 2)$ получаваме окончателно от (82), (120), (121) и (122)

$$Q(Y_1, Y_2;\, X)=\rho V(Y_2-Y_1)(t_2-t_1)-\frac{\rho\Gamma}{2l}(Y_2-V_1)(t_2-t_1)$$

$$+\frac{\rho\Gamma l}{\pi^2(V-U)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2l}(V-U)(t_2-t_1)e^{\frac{-n\pi h}{l}}$$

$$\text{(123)}\qquad \times\Big\{\sum_{i=1}^{2}(-1)^i \operatorname{ch}\frac{n\pi Y_i}{l}\,[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi}{l}\Big[X$$

$$-\frac{V-U}{l}(t_1+t_2)\Big]-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i \operatorname{sh}\frac{n\pi Y_i}{l}\,[1+(-1)^{n}](-1)^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{l}\Big[X$$

$$-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\Big]\Big\}$$

В случая на стабилна вихрова улица в съответните формули трябва да се съобрази Кармановото условие за устойчивост

$$\operatorname{sh}\varkappa\pi=1 \quad \text{или} \quad \operatorname{ch}\varkappa\pi=\sqrt{2}$$

при $\varkappa=\frac{h}{l}=0{,}281$, което в ред случаи води до съответни опростявания.

10. Дотук бяха игнорирани случаите $Y_i^2=h^2$ за $(i-1)(i-2)=0$, съответствуващи на отсечки, перпендикулярни на оста на улицата, единият или двата края на които лежат върху едната вихрова редица.

В случай например, че $Y_2=h$, $Y_1^2 \neq h$, получаваме от (24)

$$Q(Y_1, Y_2; X)=\rho V(t_2-t_1)$$

$$+\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_1+h)+\sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_1-h)-\sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]}\,dt$$

$$-\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2}\ln\Big\{\operatorname{ch}\frac{2\pi h}{l}-\sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\Big\}\,dt$$

$$+\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2}\ln\Big\{1-\sin\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\Big\}\,dt.$$

От изложеното дотук личи, че пресмятането на флуидния транспорт се свежда в крайна сметка до намирането на последния интеграл, който има вида

$$\text{(124)}\qquad \int_{x_1}^{x_2}\ln(1+\sin x)\,dx.$$

В интервали, съдържащи корени на уравнението $1+\sin x$, подинтегралната функция расте неограничено по абсолютна стойност. Интегралите (124) обаче съществуват.

Наистина поради периодичността на подинтегралната функция достатъчно е да докажам твърдението например за интеграла

$$I=\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-\cos x)\,dx.$$

Известно е, че ако $f(x)$ е ограничена и интегруема в $(a+\xi,b)$ с $0<\xi<$ $<b-a$, то:

а) ако съществува число μ $(0<\mu<1)$ такова, че

$$\lim_{x\to a+0}(x-a)^{\mu}f(x) \tag{125}$$

съществуват, то

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx \tag{126}$$

е абсолютно сходящ;

б) ако съществува число $\mu\geqq 1$ такова, че границата (125) съществува и е отлична от нула, то интегралът (126) е разходящ; същото е вярно и ако границата (125) е равна на $\pm\infty$.

За разглеждания интеграл I имаме с $f(x)=\ln(1-\cos x)$ и $a=0$

$$\lim_{x\to+0}x^{\mu}\ln(1-\cos x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{1-\cos x\,(-\mu\,x^{-\mu-1})}$$
$$=-\frac{1}{\mu}\lim_{x\to+0}\frac{x^{\mu+2}}{1-\cos x}=-\frac{\mu+2}{\mu}\lim\frac{x^{\mu+1}}{\sin x}=0,$$

за произволно $0<\mu<1$, което доказва твърдението.

За ефективни пресмятания при разглеждания проблем с помощта на функцията

$$g(x)=\int_{0}^{x}\ln(1+\sin\theta)\,d\theta \tag{127}$$

могат да се изберат два пътя. Единият се състои в това, тази функция да се сведе към функцията $L(x)$ на Лобачевски, дефинирана с (63). Наистина при $\theta=\frac{\pi}{2}-u$ от (127) получаваме

$$g(x)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\ln(1+\cos u)\,du=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\ln 2\cos^2\frac{u}{2}\,du=x\ln 2$$

$$-4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}}\ln\cos\theta\,d\theta=x\ln 2-4L\left(\frac{\pi}{4}\right)+4L\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right),$$

т. е. като съобразим (64), имаме

$$\int_0^x \ln(1+\sin x)\,dx = \frac{x}{2}\ln 2 - 4L\left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi\ln 2 \tag{128}$$

$$+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{k^2}.$$

В справочните ръководства могат да се намерят частни стойности на $g(x)$. Например (срв. [4], стр. 216) от

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2G,$$

дето G е константата на Каталан:

$$G = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}, \tag{129}$$

се получава с $x=\sin\theta$:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2G. \tag{130}$$

Вторият път се състои в развитието на $g(x)$ в ред по степените на x или $x-a$, дето a е някоя подходяща константа. Ефективното пресмятане на A_ν в

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu x^\nu$$

чрез предварителното разглеждане на развитието

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu x^\nu = \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

и последващо интегриране е затруднително, понеже пресмятането на детерминантите ([4], стр. 28)

$$C_n = \frac{(-1)^n}{a_0^n}\begin{vmatrix} a_1b_0-b_1a_0 & a_0 & 0 & & 0 \\ a_2b_0-b_2a_0 & a_1 & a_0 & & 0 \\ a_3b_0-b_3a_0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ & & & & \\ a_{n-1}b_0-b_{n-1}a_0 & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdot & a_0 \\ a_nb_0-b_na_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot & a_1 \end{vmatrix},$$

дето a_ν и b_ν са коефициентите в развитията на функциите $1+\sin x$ и $\cos x$, е свързано с редица трудности. Поради това за предпочитане е следният път: от

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

и развитието

$$\operatorname{tg} u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}\,|B_{2k}|\,u^{2k-1},$$

валидно за $u^2<\frac{\pi}{4}$, дето B_{2k} са бернулиевите числа, получаваме след двукратно интегриране, както следва:

$$\ln(1+\sin x)=\ln 2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}\,|B_{2k}|\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)^{2k-1}dx$$

$$=\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(2^{2k}-1)}{2k\,(2k)!}\,|B_{2k}|\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

и

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\ln(1+\sin x)\,dx=\ln 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

(131)

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k+2}(2^{2k}-1)}{2k\,(2k+1)\,(2k)!}\,|B_{2k}|\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

От (131) и (130) със (129) получаваме за $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)^2<\frac{\pi^2}{4}$, т. е. за $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$, окончателно

(132) $$\int_{0}^{x}\ln(1+\sin x)\,dx=\ln 2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k+2}(2^{2k}-1)}{2k\,(2k+1)\,(2k)!}\,|B_{2k}|\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

От (24) се вижда, че при $Y_i^2=h^2$, $(i-1)(i+2)=0$ се стига до интеграли от вида

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln[1+(-1)^k \sin\theta]\,d\theta$$

със (75). Свеждането им до (128) или (132) не представлява никаква трудност.

Да отбележим накрая, че флуидният транспорт през отсечки, перпендикулярни на оста ox, за наблюдател, свързан със системата $[O]$, се дава със съвършено аналогични на (111), (115), (119) и (123) изрази, в които обаче вместо X и Y фигурират буквите x и y, вместо $X-(V-U)t$ се поставя $x+Ut$, а членът $\rho V(Y_2-Y_1)(t_2-t_1)$ липсва.

11. В случая на симетрична улица получаваме от (4) аналогично на (24)

$$Q(Y_1, Y_2, X) = \rho V(Y_2-Y_1)(t_2-t_1)$$

$$+\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\int_{t_1}^{t_2} \ln \frac{\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_2-h)-\cos\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\right\}}{\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_1-h)-\cos\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\right\}}\cdot$$

(133)

$$\cdot\frac{\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_1+h)-\cos\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\right\}}{\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(Y_2+h)-\cos\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\right\}}\,dt.$$

Сравнението между (133) и (24) показва разликата в двата случая. От (133) получаваме

$$Q(Y_1, Y_2;\, X) = \rho V(Y_2-Y_1)(t_2-t_1)$$

$$+\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k+1}\int_{t_1}^{t_2}\ln\left\{a_{ik}-\cos\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\right\}dt$$

с

$$a_{ik}=\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[Y_i+(-1)^k h]. \qquad (i,k=1,2)$$

Но

$$\int_{t_1}^{t_2}\ln\left\{a_{ik}-\cos\frac{\pi}{l}[X-(V-U)t]\right\}dt=$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \ln \left\{ a_{ik} + \sin \frac{\pi}{l} \left[X - \frac{l}{2} - (V-U)\,t \right] \right\} dt = \frac{-l}{\pi (V-U)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln (a_{ik} + \sin \theta)\, d\theta$$

с

$$\theta_i = \frac{\pi}{l} \left[X - \frac{l}{2} - (V-U)\,t \right], \qquad (i = 1, 2)$$

отдето

$$Q(Y_1,\ Y_2;\ X) = \rho V (Y_2 - Y_1)(t_2 - t_1)$$

$$(134) \qquad + \frac{\rho \Gamma l}{4\pi^2 (V-U)} \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{i+k} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln (a_{ik} + \sin \theta)\, d\theta$$

$$= \rho V (Y_2 - Y_1)(t_2 - t_1) + \frac{\rho \Gamma l}{4\pi^2 (V-U)} \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} (-1)^{i+k} \sum_{\nu=1}^{2} (-1)^{\nu} F(\theta_\nu, a_{ik})$$

при (73).

И тук следва да се разгледат случаите (99) — (102). Поради

$$\sum_{\nu=1}^{2} (-1)^{\nu} F(\theta_\nu,\ a_{ik}) = \ln \frac{a_{ik} + \sqrt{a_{ik}^2 - 1}}{2} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{a_{ik}^2 - 1} - a_{ik})^n}{n^2} \left\{ [1 + (-1)^{n+1}] (-1)^{\frac{n-1}{2}} (\cos n\theta_2 - \cos n\theta_1) \right.$$

$$\left. + \left[1 + (-1)^n \right] (-1)^{\frac{n}{2}+1} (\sin n\theta_2 - \sin n\theta_1) \right] \Big\}$$

$$= \ln \frac{a_{ik} + \sqrt{a_{ik}^2 - 1}}{2} (\theta_2 - \theta_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{a_{ik}^2 - 1} - a_{ik})^n}{n^2} \sin \frac{n(\theta_1 - \theta_2)}{2}$$

$$\left\{ [1 + (-1)^{n+1}] \times (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin \frac{n(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right.$$

$$\left. + [1 + (-1)^n] (-1)^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\}$$

и

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = -\frac{\pi}{2l} (V-U)(t_2 - t_1), \quad \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \left[X - \frac{l}{2} - \frac{V-U}{2} (t_1 + t_2) \right].$$

получаваме от (134) релацията

$$Q(Y_1,\ Y_2;\ X) = \rho V (Y_2 - Y_1)(t_2 - t_1)$$

$$+\frac{\rho\Gamma l}{4\pi^2(V-U)}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k}\ln\frac{a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^2-1}}{2}(\theta_2-\theta_1)$$

$$-\frac{\rho\Gamma l}{2\pi^2(V-U)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2l}(V-U)(t_2-t_1)\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k}\left(\sqrt{a_{ik}^2-1}-a_{ik}\right)$$

$$\times\left\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi}{l}\left[X-\frac{l}{2}-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\right]\right.$$

$$\left.+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin\frac{n\pi}{l}\left[X-\frac{l}{2}-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\right]\right\}.$$

Полагаме

$$B_1=\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k}\ln\frac{a_{ik}+\sqrt{a_{ik}^2-1}}{2},$$

$$B_2=2\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{i+k+1}\left(\sqrt{a_{ik}^2-1}-a_{ik}\right)^n.$$

Поради (106) и (107) имаме $B_1=A_1$, $B_2=A_3$. Тъй като тези величини са пресметнати, получаваме съгласно (108) и (110); (112) и (114); (116) и (118); (120) и (122), както и поради (135), резултатите:

В случая $Y_i>h\,(i=1,\ 2)$ е в сила

$$Q(Y_1,\ Y_2;\ X)=\rho V(Y_2-Y_1)(t_2-t_1)$$

$$+\frac{\rho\Gamma l}{\pi^2(V-U)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2l}(V-U)(t_2-t_1)\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i e^{-\frac{n\pi Y_i}{l}}$$

$$\times\left\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi}{l}\left[X-\frac{l}{2}-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\right]\right.$$

$$\left.+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{l}\times\left[X-\frac{l}{2}-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\right]\right\}.$$

В случая $Y_2>h$, $-h<Y_1<h$ е в сила

$$Q(Y_1,\ Y_2;\ X)=\rho(Y_2-Y_1)V(t_2-t_1)-\frac{\rho\Gamma}{2l}(h-Y_1)(t_2-t_1)+\frac{\rho\Gamma l}{\pi^2(V-U)}$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2l}(V-U)(t_2-t_1)\left\{e^{-\frac{n\pi h}{l}}\operatorname{sh}\frac{n\pi Y_1}{l}-e^{-\frac{n\pi Y_2}{l}}\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\right\}$$

$$\times\left\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi}{l}\left[X-\frac{l}{2}-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\right]\right.$$

$$\left.+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{l}\left[X-\frac{l}{2}-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\right]\right\}.$$

В случая $Y_2>h$, $Y_1<-h$ е в сила

$$Q(Y_1,\ Y_2;\ X)=\rho V(Y_2-Y_1)(t_2-t_1)-\frac{\rho\Gamma h}{l}(t_1-t_2)$$

$$+\frac{\rho\Gamma l}{\pi^2(V-U)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2l}(V-U)(t_2-t_1)\operatorname{sh}\frac{n\pi h}{l}\left(e^{\frac{n\pi Y_1}{l}}+e^{\frac{-n\pi Y_2}{l}}\right)$$

$$\times\left\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi}{l}\left[X-\frac{l}{2}-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\right]\right.$$

$$\left.+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{l}\left[X-\frac{l}{2}-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\right]\right\}.$$

Най-после в случая $-h<Y_i<h$ $(i=1,2)$ е в сила

$$Q(Y_1,\ Y_2;\ X)=\rho V(Y_2-Y_1)(t_2-t_1)-\frac{\rho\Gamma}{2l}(Y_2-Y_1)(t_2-t_1)$$

$$+\frac{\rho\Gamma l}{\pi^2(V-U)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2l}(V-U)(t_2-t_1)e^{\frac{-n\pi h}{l}}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\operatorname{sh}\frac{n\pi Y_i}{l}$$

$$\times\left\{[1+(-1)^{n+1}](-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi}{l}\left[X-\frac{l}{2}-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\right]\right.$$

$$\left.+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{l}\left[X-\frac{l}{2}-\frac{V-U}{2}(t_1+t_2)\right]\right\}.$$

12. За пресмятането на флуидния транспорт през отсечки, успоредни на оста на улицата, получаваме в стационарния случай (2) величината

$$Q(\xi_1,\ \xi_2;\ \eta)=\frac{\Gamma\rho}{4l}\sum_{k=1}^{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\cos\frac{\pi}{l}\xi\,d\xi}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[\eta+(-1)^k h]+(-1)^k\sin\frac{\pi\xi}{l}}$$

$$(136)\qquad =\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\ln\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[\eta+(-1)^k h]+(-1)^k\sin\frac{\pi\xi}{l}\right\}\Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2}$$

$$=\frac{\rho\Gamma}{4\pi}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+k}\ln\left\{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}[\eta+(-1)^k h]+(-1)^k\sin\frac{\pi\xi_i}{l}\right\}.$$

В нестационарните случаи се получава например от (3) аналогично на (70)

$$(137)\qquad Q(x_1,\ x_2;\ y) = \frac{\Gamma\rho}{4l} \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+k} \int_{t_1}^{t_2} \ln \left\{ \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} [y + (-1)^k h] + (-1)^k \sin \frac{\pi}{l} (x_i - Ut) \right\} dt.$$

Интегралите, фигуриращи в (137), са от вида

$$\int_{x_1}^{x_2} \ln(a + \sin x)\, dx. \quad (a \geqq 1)$$

Пресмятането на величината (137) се извършва напълно по посочения начин, поради което на повече подробности тук няма да се спираме.

Заключение: Получените дотук резултати решават напълно проблемата за флуидния транспорт вследствие на индукцията на шахматни и симетрични вихрови конфигурации през стени, нормални към равнината на флуидното течение, съответно с перпендикулярно или успоредно на оста на улицата направление. Тези резултати могат да намерят приложение при всички процеси, свързани с образуването на видими или невидими вихрови улици при обикновени (средни) скорости на обтичане, когато се касае за някои по-тънки проверки относно транспорта на флуида в зони, най-вече извън зоната на вихровата конфигурация. Предстои по-подробно изследване на получените функции за Q в различните случаи досежно разпределението на количеството флуид по продължение на отсечките, както и по продължение на оста на улицата и във вертикалното ѝ направление.

Не е безинтересен и проблемът за флуидния транспорт и през наклонени към оста на вихровата конфигурация стени, на който въпрос ще се върнем на друго място.

Постъпила на 11. VI. 1959 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долапчиев Бл. и Ив. Чобанов. Върху интегралите на движение на идеален флуид при наличие на Карманови вихрови улици Известия на Математическия институт на БАН, том II, книга 2, 1957, 181 221.
2. Lichtenstein L. Grundlagen der Hydromechanik. Berlin, 1929.
3. Кочин Н. Е., А. И. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика. Т. I, Ленинград - Москва, 1948.
4. Рыжик И. М., И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва — Ленинград, 1951.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III, Москва Ленинград, 1949.
6. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений. Гостехиздат, Москва Ленинград. Т. III, 1951.

ТРАНСПОРТ ЖИДКОСТИ, ИНДУЦИРОВАННЫЙ КАРМАНОВЫМИ ВИХРЕВЫМИ ДОРОЖКАМИ. I

Бл. Долапчиев и Ив. Чобанов

РЕЗЮМЕ

Приняв модель одной двусторонне бесконечной шахматной или симметричной вихревой дорожки в идеальном флюиде, при постоянных по своей величине циркуляций отдельных вихрей, находим транспорт жидкости, при индукции вихревых центров над флюидными частицами, находящимися в различных зонах течения, т. е. через различные по своей величине и положению отрезкам (перпендикулярные или параллельные оси вихревой конфигурации), где под „отрезком", в данном случае, будем понимать вертикальную стену, высота которой равна единице.

Вышеуказанное относится как к стационарным, так и к нестационарным случаям, при которых наблюдатель связан соответственно с вихревой дорожкой, с препятствием, которое ее порождает, предположенным в минус-бесконечности, или с флюидом, находящимся в покое.

Сравнителные системы обозначены соответственно с $[\Omega]$, $[O]$ и $[o]$, а компоненты скорости произвольной невихревой частицы представлены соответственно формулами (2), (1), (3) для шахматной дорожки и формулами (5), (4), (6) для симметричной вихревой дорожки.

Мы исходим из известной формулы (8), определяющей количество флюида, протекшего за интервал времени t_2-t_1 через поверхность S, где $\rho(\bar{r},t)$ является плотностью в точке $\bar{r}$, а $v_n(\bar{r},t)$ — нормальная компонента скорости в этой точке относительно поверхности S.

В то время как вычисление количества флюида Q в стационарном случае происходит непосредственно при помощи формулы (12), применяемой к шахматной дорожке, где стена, через которую протекает флюид находится над прямой $\xi=\text{const}$, совсем по-другому обстоит вопрос при нестационарных случаях. При этих случаях применяются выражения (24) и (25), ведущие к вычислению интегралов вида (26), которые исследованы более подробно. Интегралы (30) не могут быть выражены элементарными функциями. Исследование их представляет собой самостоятельный математический интерес, но это решение необходимо и для окончательного решения рассматриваемой гидродинамической проблемы. Для этой цели прибегаем к развитию функции (36) в ряде Фурье. которое дано в формуле (61), а развитие интеграла (30) определяется формулой (62). Подчеркивается аналогия между функцией (30) и функцией (63) Лобачевского, выведение которой необходимо, когда конец отрезка-стены лежит над некоторой вихревой цепочкой.

Искомые флюидные количества, перенесенные для рассматриваемого интервала времени, представлены для шахматной улицы и для системы $[O]$ объединенной формулой (82). Сделан анализ различных случаев относительно положения концов отрезка-стены, через которую не должен проходить вихревой центр, т. к. иначе определение (8) при рассматриваемой проблеме теряет свой смысл. Однако оно может иметь определенный

смысл при прохождении вихревого центра через отрезок-стену, если принять главное значение интеграла; это обстоятельство соответствует гидродинамической реальности.

Упомянутые существенно различные случаи являются (99)—(102), у которых транспорт жидкости имеет различные значения, выраженные при помощи формул (111), (115), (119), (123).

Эти рассмотренные случаи, касающиеся шахматной вихревой дорожки и отнесенные к сравнительной системе [O], непосредственно могут быть применены к симметричной вихревой дорожке, а также и к нестационарному случаю системы [o].

Аналогичные результаты получаются и в случае горизонтального отрезка-стены.

FLÜSSIGKEITSTRANSPORT, INDUZIERT VON WIRBELSTRASSEN. I

Bl. Dolaptschiew, Iw. Tschobanow

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird das Modell einer zweiseitig unendlichen (schachbrettartigen oder symmetrischen) Wirbelstraße mit konstanter Größe der Zirkulation der einzelnen Wirbel in einer idealen Flüssigkeit angenommen und der Flüssigkeitstransport durch nach Lage und Größe verschiedene Strecken (senkrecht oder parallel zur Achse der Wirbelkonfiguration) gesucht, den die Induktion der Wirbelzentren auf die Flüssigkeitsteilchen verursacht. Unter „Strecke" wird eine vertikale Wand verstanden, deren Höhe gleich eins ist.

Die Betrachtungen beziehen sich sowohl auf das stationäre, als auch auf die nichtstationären Regime, bei welchen der Beobachter erstens mit der Wirbelstraße, zweitens mit dem Hindernis, hinter dem die Wirbelkonfiguration entsteht, drittens mit der Flüssigkeit verbunden ist. Dementsprechend sind die Bezugsysteme mit [Ω], [O] und [o] bezeichnet. Die Geschwindigkeitskomponenten sind dann durch (2), (1) und (3) für die schachbrettartige und durch (5), (4) und (6) für die symmetrische Wirbelstraße gegeben.

Von der bekannten Formel (8) ausgehend, die definitionsgemäß die Flüssigkeitsmenge angibt, welche durch die Fläche S im Zeitintervall $t_2 - t_1$ fließt, wobei $\rho(r, t)$ die Dichte und $\bar{v}_n(r, t)$ die Normalkomponente der Geschwindigkeit im Punkt $\bar{r}$ in bezug auf die Fläche S bedeuten, erhält man folgendes: während die Flüssigkeitsmenge Q, die durch die Wand $\xi = \text{const}$ fließt, für eine schachbrettartige Wirbelstraße im stationären Fall durch (12) unmittelbar gegeben ist, steht die Frage anders bei nichtstationären Regimen. Im lezten Fall findet man die Ausdrücke (24) und (25), die zu der Auswertung der Integrale von der Form (26) führen. Diese Aufgabe wird näher untersucht. Die Integrale (30) lassen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken. Ihre Untersuchnug stellt ein selbständiges mathematisches Interesse dar un-

geachtet des betrachteten hydrodynamischen Problems. Sie ist aber für die endgültige Lösung des Problems notwendig.

Zu diesem Zweck läßt sich die Funktion (36) in die Fouriersche Reihe (61) entwickeln; die Entwicklung des Integrals (30) ist (62).

Es besteht Analogie zwischen der Funktion (30) und der Funktion (63) von Lobatschewsky, deren Einführung in dem Fall nötig wird, wenn das Ende der Wandstrecke auf eine Wirbelreihe fällt.

Die für ein beliebiges Zeitintervall transportierten Flüssigkeitsmengen werden für eine schachbrettartige Wirbelstraße und bei einem Bezugssystem [O] durch die vereinigte Formel (82) dargestellt.

Es werden die verschiedenen Fälle analysiert hinsichtlich der Lagen der Wandstreckenenden, wobei die Wandstrecken ein Wirbelzentrum nicht treffen dürfen, da sonst die Definition (8) ihren Sinn in dem betrachteten Problem verliert. Dieser kann jedoch beibehalten werden, auch wenn ein Wirbel die Wandstrecke trifft, wenn man den Hauptwert des Integrals annimmt, ein Umstand, der der physikalischen Realität entspricht.

Die erwähnten wesentlich verschiedenen Fälle sind (99)—(102), in denen der Flüssigkeitstransport die Darstellungen (111), (115), (119) und (123) hat.

Diese Betrachtungen, welche für eine schachbrettartige Wirbelstraße in bezug auf das Koordinatensystem [O] gelten, lassen sich auch auf eine symmetrische Wirbelstraße und auf den nichtstationären Fall des Systems [o] übertragen.

Bei einer horizontalen Wandstrecke sind die Ergebnisse ähnlich.