ГЕОМЕТРИЯ НА ВЕКТОРНО ПОЛЕ В ТРИИЗМЕРИМОТО ПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

А. Матеев

§ 1. Векторно поле с реален единичен вектор

Разглеждаме триизмеримото псевдоевклидово пространство R_3, подпространство на четириизмеримото псевдоевклидово пространство с индекс 1, което представлява интерес от гледна точка на теорията на относителността (специалната релативна теория). Една особеност на триизмеримото псевдоевклидово пространство е, че геометрични образи, които обикновено в евклидовото триизмеримо пространство са имагинерни, тук са реални.

Ние ще казваме, че в пространството R_3 (или в някаква негова област) е дефинирано векторно поле (I_3), ако на произволна точка е съпоставен единичен или мнимоединичен вектор I_3, т. е. $I_3^2=1$ или $I_3^2=-1$. Следователно в R_3 ще има два вида векторни полета според характера на вектора I_3 на полето.

Нека предположим, че за векторното поле $I_3^2=1$. Да изберем I_3 за координатен вектор на правоъгълна координатна система с координатни вектори I_1, I_2, I_3, от които например $I_1^2=-1$, $I_2^2=1$. Освен това за тези вектори ще имаме още

$$I_1 I_2 = I_1 I_3 = I_2 I_3 = 0. \tag{1}$$

Ако M е произволна точка от R_3, компонентите на едно безкрайно малко преместване на M се получават от равенството

$$dM = \omega_0^1 I_1 + \omega_0^2 I_2 + \omega_0^3 I_3. \tag{2}$$

За координатните вектори са в сила още равенствата

$$\begin{aligned} dI_1 &= \omega_1^1 I_1 + \omega_1 I_3, \\ dI_2 &= \omega_2^1 I_1 + \omega_2^3 I_3, \\ dI_3 &= \omega_3^1 I_1 + \omega_3^2 I_2. \end{aligned} \tag{3}$$

От равенствата (1) и поради това, че $I_1^2=-1$, $I_2^2=I_3^2=1$, можем да пишем

$$\omega_2^1 = \omega_1^2 = r,\ \ \omega_3^2 = -\omega_2^3 = p,\ \ \omega_3^1 = \omega_1^3 = -q.$$

Предполагаме още, че

$$[\omega_0^1 \omega_0^2 \omega_0^3] \neq 0,$$

поради което можем да пишем

$$p = p_\alpha \omega_0^\alpha, \quad q = q_\alpha \omega_0^\alpha, \quad r = r_\alpha \omega_0^\alpha.$$

За уравненията на структурата получаваме

$$\begin{aligned} D\omega_0^1 &= [\omega_0^3 r] + [q\,\omega_0^3] \qquad Dp = [rq], \\ D\omega_0^2 &= [\omega_0^1 r] + [\omega_0^3 p] \qquad Dq = [rp], \\ D\omega_0^3 &= [q_0\,\omega_0^1] + [p\,\omega_0^2] \qquad Dr = [pq]. \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 1. Необходимото и достатъчно условие векторното поле (l_3) да допуска семейство ортогонални повърхнини се дава с равенството

$$p_1 - q_2 = 0. \tag{5}$$

Доказателството на теоремата се извършва по същия начин, както в евклидовото пространство [1].

§ 2. Линии на кривината

Линия на кривината на полето ще наричаме крива, ортогонална във всяка своя точка на вектора на полето и освен това за която векторите dM, l_3, dl_3 са компланарни. Очевидно необходимото и достатъчно условие за компланарност на тези вектори се изразява чрез равенството

$$p\omega_0^1 + q\omega_0^2 = 0. \tag{6}$$

Следователно диференциалните уравнения на линиите на кривината са

$$\omega_0^3 = 0, \quad p_1 (\omega_0^1)^2 + (p_2 + q_1)\,\omega_0^1 \omega_0^2 + q_2 (\omega_0^2)^2 = 0. \tag{7}$$

Линиите на кривината са реални, ако

$$(p_2 - q_1)^2 - 4\,(p_1 q_2 - p_2 q_1) \geqq 0,$$

и изотропни, ако

$$p_1 + q_2 = 0, \quad p_2 + q_1 = 0.$$

Те са ортогонални, в случай че

$$p_1 - q_2 = 0.$$

§ 3. Асимптотични линии

Асимптотична линия на полето ще наричаме крива, ортогонална във всяка своя точка на вектора на полето и освен това, за която направлението във всяка точка анулира квадратичната форма $dM.dl_3$. Очевидно последното условие е еквивалентно с

$$p\omega_0^2+q\omega_0^1=0.$$

Следователно диференциалните уравнения на асимптотичните линии са

(8) $$\omega_0^3=0, \quad q_1(\omega_0^1)^2+(p_1+q_2)\,\omega_0^1\omega_0^2+p_2(\omega_0^2)^2=0.$$

Необходимото и достатъчно условие, за да бъдат асимптотичните линии ортогонални, се дава с

(9) $$p_2-q_1=0.$$

§ 4. Нормална кривина на полето по дадено направление

Нека в R_3 е дадена кривата

$$M=M(t) \quad (t_0<t<t_1).$$

Ние ще разглеждаме криви, ортогонални във всяка своя точка на вектора на полето, за които векторите $\frac{dM}{dt}$, $\frac{d^2M}{dt^2}$ са линейно независими и равнината, определена от тях, т. е. оскулачната равнина в точката M, е неизотропна. С t, n, b ще означаваме, както обикновено, единичните вектори по тангентата, главната нормала и бинормалата. Понеже $l_3^2=1$, то равнината, съдържаща векторите l_1, l_2, носи псевдоевклидова метрика. Съществуват следните възможности:

а) Векторът t е мнимоединичен ($t^2=-1$), а векторите n, b са единични. Тогава можем да пишем

$$ds^2=-d\sigma^2, \quad \frac{dM}{d\sigma}=t, \quad \frac{dt}{d\sigma}=\varkappa n, \quad \frac{d^2M}{ds^2}\,l_3=-\frac{dM}{ds}\cdot\frac{dl_3}{ds}.$$

Оттук получаваме

(10) $$\varkappa(n\,l_3)=\frac{p\omega_0^2+q\omega_0^1}{-(\omega_0^1)^2+(\omega_0^2)^2}.$$

Понеже равнината, съдържаща векторите n и l_3, носи евклидова метрика, можем да положим $\varkappa=\frac{1}{\rho}$, $nl_3=\cos\theta$ и получаваме

(11) $$\frac{\cos\theta}{\rho}=\frac{p\omega_0^2+q\omega_0^1}{-(\omega_0^1)^2+(\omega_0^2)^2}.$$

Следователно при $\theta=0$, $\rho=R$ имаме

(12) $$\frac{1}{R}=\frac{p\omega_0^2+q\omega_0^1}{-(\omega_0^1)^2+(\omega_0^2)^2}.$$

б) Векторите t и b са единични, а n — мнимоединичен. Поради $n^2=-1$, $l_3^2=1$ няма смисъл да се говори за ъгъл между тях. Тук естествено

$$\frac{dM}{ds} = t, \quad \frac{dt}{ds} = \varkappa n.$$

в) Векторите t и n са единични, а b — мнимоединичен вектор. Ако $nl_3 > 0$, за псевдоевклидовия ъгъл между n и l_3 получаваме $nl_3 = \operatorname{ch}\theta$ и равенството (12) приема вида

$$\frac{\operatorname{ch}\theta}{\rho} = \frac{p\omega_0^2 + q\omega_0^1}{(\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2}. \tag{13}$$

За едно неизотропно и неасимптотично направление на векторното поле изразът (12) ще наричаме нормална кривина в точката M. Екстремалните стойности на нормалната кривина се получават от квадратното уравнение

$$\frac{1}{R^2} + \frac{q_1 - p_2}{R} - p_2 q_1 + \frac{(p_1 + q_2)^2}{4} = 0. \tag{14}$$

Изразите

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = p_2 - q_1,$$

$$K_g = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{(p_1 - q_2)^2}{4} + p_1 q_2 - p_2 q_1$$

ще наричаме съответно средна и Гаусова кривина в точката M. За направленията, отговарящи на екстремалните стойности на $\frac{1}{R}$, получаваме диференциалното уравнение

$$\frac{p_1 + q_2}{2}(\omega_0^1)^2 + (p_2 + q_1)\,\omega_0^1\omega_0^2 + \frac{p_1 + q_2}{2}(\omega_0^2)^2 = 0, \tag{14'}$$

откъдето следва, че те са винаги реални и ортогонални.

§ 5. Геодезични линии

От дефиницията на геодезична линия, както в евклидовото пространство [1], § 7, получаваме, че направлението dM е геодезично точно тогава, когато

$$dM \,.\, d^2s - d^2M \,.\, ds = \lambda l_3 \quad (\lambda \text{ — скалар}).$$

Окончателно за геодезичните линии намираме

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_0^2 d\omega_0^1 - \omega_0^1 d\omega_0^2 + r\left[-(\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2\right] = 0.$$

§ 6. Инварианти на векторно поле в R_3

Ако за избрания триедър $\{l_1, l_2, l_3\}$ в точката M разглеждаме истинските въртения [2], § 46 с ос правата $\{M; l_3\}$, то за векторното поле са съществени инвариантите относно тези въртения. С $\{\tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \tilde{l}_3\}$ означаваме завъртяното положение на триедъра $\{I_1 I_2 I_3\}$ на ъгъл θ. Тогава можем да пишем [2], § 46

$$\begin{aligned}
&\widetilde{I}_1 = \widetilde{I}_1 \operatorname{ch}\theta + I_2 \operatorname{sh}\theta, && \widetilde{I}_2 = I_1 \operatorname{sh}\theta + I_2 \operatorname{ch}\theta, \quad \widetilde{I}_3 = I_3,\\
&\widetilde{p} = p \operatorname{ch}\theta + q \operatorname{sh}\theta, && \widetilde{\omega}_0^1 = \omega_0^1 \operatorname{ch}\theta - \omega_0^2 \operatorname{sh}\theta,\\
&\widetilde{q} = p \operatorname{sh}\theta \quad q \operatorname{ch}\theta, && \widetilde{\omega}_0^2 = -\omega_0^1 \operatorname{sh}\theta + \omega_0^2 \operatorname{ch}\theta,\\
&\widetilde{r} = r + d\theta, && \widetilde{\omega}_0^3 = \omega_0^3.
\end{aligned}$$

Както в евклидовото пространство, така и тук коефициентите на пфафовите форми p и q имат пет алгебрични инварианти. Тези инварианти могат да се получат от общите инварианти на квадратичните форми:

$$(dM)^2 = -(\omega_0^1)^2 + (\omega_1^2)^2 + (\omega_0^3)^2,$$

$$p\omega_0^1 + q\omega_0^2 = p_1(\omega_0^1)^2 + (p_2 + q_1)\,\omega_0^1\omega_0^2 + p_3\,\omega_0^1\omega_0^3 + q_2(\omega_0^2)^2 + q_3\,\omega_0^2\omega_0^3,$$

$$p\omega_0^2 + q\omega_0^1 = q_1(\omega_0^1)^2 + (p_1 + q_2)\omega_0^1\omega_0^2 + q_3\,\omega_0^1\omega_0^3 + p_2(\omega_0^2)^2 + p_3\,\omega_0^2\omega_0^3.$$

Общите им инварианти ще бъдат коефициентите в уравнението от вида

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Коефициентите на това уравнение са

$$L_1 = a_{11} - a_{22} - a_{33}, \quad L_2 = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} + a_{13}^2 - a_{11}a_{33} - a_{23}^2 + a_{22}a_{33}, \quad L_3 = \Delta(0).$$

От втората квадратична форма при

$$a_{11} = p_1, \quad 2a_{12} = p_2 + q_1, \quad 2a_{13} = p_3, \quad a_{22} = q_2, \quad 2a_{23} = q_3, \quad a_{33} = 0$$

получаваме

$$L_1 = p_1 - q_2, \quad L_2 = \frac{(p_2 - q_1)^2}{4} - (p_1q_2 - p_2q_1) + \frac{p_3^2 - q_3^2}{4},$$

$$L_3 = -\frac{1}{4}\left[p_1q_3^2 + p_3q_3(p_2 + q_1) + q_2p_3^2\right].$$

Аналогично за третата квадратична форма заместваме

$$a_{11} = q_1, \quad 2a_{12} = p_1 + q_2, \quad 2a_{13} = q_3, \quad 2a_{23} = p_3, \quad a_{22} = p_2, \quad a_{33} = 0$$

и получаваме

$$L_1^* = q_1 - p_2, \quad L_2^* = \frac{(p_1 - q_2)^2}{4} + p_1q_2 - p_2q_1 + \frac{q_3^2 - p_3^2}{4},$$

$$L_3^* = -\frac{1}{4}\left[q_1 p_3^2 + p_3 q_3 (p_1 + q_2) + p_2 q_3^2\right].$$

Окончателно за инварианти могат да се вземат изразите

$$\begin{aligned} i_1 &= p_1 - q_2, & i_4 &= p_3^2 - q_3^2, \\ i_2 &= p_2 - q_1, & i_5 &= p_1 q_3^2 + p_3 q_3 (p_2 + q_1) + q_2 p_3^2, \\ i_3 &= p_1 q_2 - p_2 q_1, & i_6 &= q_1 p_3^2 + p_3 q_3 (p_1 + q_2) + p_2 q_3^2. \end{aligned}$$

За да намерим връзката, която съществува между тези шест инварианти, ще предположим, че координатните вектори I_1, I_2 имат направления, съответствуващи на екстремалните стойности на нормалната кривина. За целта от (14′) получаваме $p_1 + q_2 = 0$. Тогава можем да положим

$$-q_1 = \frac{1}{R_1}, \quad p_2 = \frac{1}{R_2}.$$

Следователно получаваме

$$\left(i_5 + \frac{i_1 i_4}{2}\right)^2 = \left(i_6 + \frac{i_4}{R_1}\right)\left(i_6 + \frac{i_4}{R_2}\right).$$

Окончателно за търсената зависимост намираме

$$i_3 \,.\, i_4^2 = i_1 i_4 i_5 - i_2 i_4 i_6 + i_5^2 - i_6^2.$$

§ 8. Векторно поле с мнимоединичен вектор

Нека $I_3^2 = -1$. В този случай формулите (3) приемат вида

$$\begin{aligned} dI_1 &= rI_2 - qI_3, \\ dI_2 &= -rI_1 + pI_3, \\ dI_3 &= -qI_1 + pI_2, \end{aligned}$$

където е положено

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = r, \quad \omega_1^3 = \omega_3^1 = q, \quad \omega_2^3 = \omega_3^2 = p.$$

Диференциалните уравнения на линиите на кривината, асимптотичните линии и геодезичните линии са същите, както в евклидовото пространство. Инвариантите на векторното поле по вид са, както в последното пространство, и удовлетворяват съответната връзка.

Понеже $I_3^2 = -1$, за крива, ортогонална във всяка своя точка на вектора на полето, съществуват следните възможности:

а) Векторите t и b са единични, а n — мнимоединичен вектор. Ако $nI_3 < 0$, можем да пишем

$$\frac{\operatorname{ch}\theta}{\rho} = \frac{p\omega_0^2 - q\omega_0^1}{(\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2}.$$

б) Векторите t и n са единични, а b е мнимоединичен вектор. Тук няма смисъл да се говори за ъгъл между n и l_3 поради различния им характер.

Изразът

$$\frac{1}{R}=\frac{p\omega_0^2-q\omega_0^1}{(\omega_0^1)^2+(\omega_0^2)^2}$$

ще наричаме нормална кривина на кривата в точката M. Естремалните стойности на R и съответните линии се получават, както в евклидовото пространство.

§ 9. Приложения

Да разгледаме в триизмеримото псевдоевклидово пространство сферата с реален радиус

$$-x^2+y^2+z^2=a^2\,(a>0),$$

която се изобразява в обикновеното евклидово пространство в прост ротационен хиперболоид. Параметрично тя може да се представи, както следва:

$$x=a\,\mathrm{sh}\,u,\quad y=a\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\quad z=a\,\mathrm{ch}\,u\sin v.$$

За елемента на дъгата получаваме

$$ds^2=a^2\,(-du^2+\mathrm{ch}^2\,u dv^2).$$

Изотропните линии, т. е. линиите, за които $ds^2=0$, се дават чрез диференциалното уравнение

$$du^2-\mathrm{ch}^2\,u\,dv^2=0.$$

Чрез интегриране на това уравнение получаваме

$$t\,\mathrm{tg}\frac{v-v_0}{2}=e^u\quad (v_0=\mathrm{const}).$$

Единичният вектор l_3 по нормалата образува двуизмеримо векторно поле. За координатни вектори l_1, l_2 избираме колинеарните вектори съответно с векторите $(x_u,\ y_u,\ z_u)$, $(x_v,\ y_v,\ z_v)$. Така получаваме

$$l_1(\mathrm{ch}\,u,\ \mathrm{sh}\,u\cos v,\ \mathrm{sh}\,u\sin v),\ l_2(0,-\sin v,\cos\ v),\ l_3(\mathrm{sh}\,u,\ \mathrm{ch}\,u\cos v,\ \mathrm{ch}\,u\ \sin v).$$

Очевидно имаме

$$l_1^2=-1,\quad l_2^2=l_3^2=1\,;\quad l_1\,l_2=l_1\,l_3=l_2\,l_3=0.$$

По-нататък намираме

$$p=\mathrm{ch}\,u\,dv,\quad q=du,\quad r=\mathrm{sh}\,u\,dv.$$

За пфафовите форми ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 получаваме

$$\omega_0^1=adu,\ \omega_1^2=a\,\mathrm{ch}\,udv,\ \omega_0^3=0.$$

Следователно
$$p_1=0,\quad p_2=\frac{1}{a},\quad q_1=-\frac{1}{a},\quad q_2=0.$$

За средната и Гаусовата кривина намираме
$$2H\quad p_2-q_1=\frac{2}{a},\qquad K_g=p_1q_2-p_2q_1=\frac{1}{a^2}.$$

Линиите на кривината са неопределени. Асимптотичните линии се определят от уравнението
$$du^2-\mathrm{ch}^2u\,dv^2=0,$$
т. е. те съвпадат с изотропните линии върху сферата.

За геодезичните линии считаме, че $v=v(u)$ и получаваме диференциалното уравнение
$$\frac{d^2v}{du^2}\quad \mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u\left(\frac{dv}{du}\right)^3\quad 2\,\mathrm{th}\,u\frac{dv}{du}\quad 0.$$

Очевидно $\frac{dv}{du}=0$, т. е. $v_0=\mathrm{const}$ е един частен интеграл на това диференциално уравнение. За $\frac{dv}{du}\neq 0$ полагаме $\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\frac{1}{z}$ и получаваме
$$\frac{dz}{du}=4\,\mathrm{th}\,u\,.\,z-\mathrm{sh}\,2u.$$

Интегрирането на това линейно уравнение води до
$$\mathrm{th}\,u=C\sin\,(v\quad v_0),$$
където C и v_0 са произволни константи.

Нека разгледаме в същото пространство сферата с имагинерен радиус, която може да се представи с уравнението
$$x^2-y^2-z^2=a^2\qquad (a>0)$$
и която се изобразява в обикновеното евклидово пространство в двоен ротационен хиперболоид. Параметрично тя може да се представи така:
$$x=a\,\mathrm{ch}\,u,\quad y=a\,\mathrm{sh}\,u\cos v,\quad z=a\,\mathrm{sh}\,u\sin v.$$

Тук получаваме последователно
$$l_1\,(\mathrm{sh}\,u,\quad \mathrm{ch}\,u\cos v,\quad \mathrm{ch}\,u\sin v),\quad l_2\,(0,-\sin v,\cos v),$$
$$l_3\,(\mathrm{ch}\,u,\ \mathrm{sh}\,u\cos v,\ \mathrm{sh}\,u\sin v),$$
$$l_1^2=l_2^2=1,\quad l_3^2=-1,\quad l_1l_2=l_1l_3=l_2l_3=0.$$

По-нататък имаме
$$p=\mathrm{sh}\,u\,dv,\quad q=-du,\quad r=\mathrm{ch}\,u\,dv.$$

Освен това
$$\omega_0'=a\,du,\quad \omega_0^2=a\,\mathrm{sh}\,u\,dv,\quad \omega_0^3=0,$$

$$p_1=0, \quad p_2=\frac{1}{a}, \quad q_1=-\frac{1}{a}, \quad q_2=0.$$

За средната и Гаусовата кривина намираме

$$2H=\frac{2}{a}, \quad K_g=\frac{1}{a^2}.$$

Линиите на кривината са неопределени. Асимптотичните линии се дават с уравнението

$$du^2+\mathrm{sh}^2 u\,dv^2=0$$

и следователно са нереални.

Геодезичните линии се определят от диференциалното уравнение

$$\frac{d^2v}{du^2} \quad \mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u\left(\frac{dv}{du}\right)^3+2\,\mathrm{cth}\,u\,\frac{dv}{du}=0.$$

Като изключим частното решение $v=\mathrm{const}$ и положим $\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\frac{1}{z}$, получаваме линейното диференциално уравнение

$$\frac{dz}{du}=4\,\mathrm{cth}\,u\,.\,z+\mathrm{sh}\,2u.$$

Окончателното му интегриране води до

$$\mathrm{cth}\,u=C\cos(v-v_0),$$

където C и v_0 са произволни константи.

Постъпила на 17. VII. 1959.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ, Москва, 1953.
2. Бюшгенс. Геометрия векторного поля. Известия АН СССР, т. 10, № 1, 1946, стр. 73—96.

ГЕОМЕТРИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В ТРЁХМЕРНОМ ПСЕВДОЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Матеев

РЕЗЮМЕ

Геометрия векторного поля в трёхмерном псевдоэвклидовом пространстве R_3 исследуется при помощи метода подвижного триедра Картана.

В R_3 рассматривается векторное поле (I_3), где I_3 есть единичный пространственный или единичный временный вектор. Координатные век-

торы l_1, l_2, l_3 образуют подвижный прямоугольный триедър, причем $l_1^2 = -1$, $l_2^2 = l_3^2 = 1$ в первом случае и $l_1^2 = l_2^2 = 1$, $l_3^2 = -1$ во втором.

Пусть M произвольная точка пространства R_3, тогда компоненты бесконечно малого перемещения точки M получаются из равенства (2). В силе остаются и уравнения (3), где положено

$$\omega_2^1 = \omega_1^2 = r, \quad \omega_3^2 = -\omega_2^3 = p, \quad \omega_3^1 = \omega_1^3 = -q$$

$$p = p_a \omega_0^a, \quad q = q_a \omega_0^a, \quad r = r_a \omega_0^a.$$

Линия кривизны векторного поля есть линия, в каждой своей точке ортогональная вектору поля и в каждой точке которой векторы dM, l_3, dl_3 компланарны. Линии кривизны даются уравнениями (7).

Чтобы векторное поле допускало семейство ортогональных поверхностей, необходимым и достаточным условием является ортогональность линии кривизны.

Асимптотическая линия векторного поля есть линия, ортогональная вектору поля и в каждой точке которой квадратичная форма $dM \,.\, dl_3$ аннулируется. Асимптотические линии даются уравнениями (8).

Пусть в R_3 дана кривая

$$M = M(t) \qquad (t_1 < t < t).$$

Предполагаем, что векторы $\frac{dM}{dt}$, $\frac{d^2M}{dt^2}$ линейно независимы и ими определенная оскулачная плоскость неизотропная. Обозначаем через t, n, b соответственно единичные векторы по касательной, главной нормали и бинормали кривой. Так как $l_3^2 = 1$, существуют три случая:

а) $t^2 = -1$, $n^2 = b^2 = 1$. В этом случае плоскость, проходящая через векторы n, l_3 несет эвклидовую метрику. Тогда $nl_3 = \cos\theta$ и получаем (11).

б) $t^2 = b^2 = 1$, $n^2 = -1$. Так как $n^2 = -1$, угол между n и l_3 не имеет смысла.

в) $t^2 = n^2 = 1$, $b^2 = -1$. Если $nl_3 > 0$, получаем $nl_3 = \operatorname{ch}\theta$ и находим (13). Для всякого неизотропного и неасимптотического направления выражение (12) называется нормальной кривизной в точке M. Через экстремальные значения нормальной кривизны вводятся понятия о „средней кривизне“ и „гауссовой кривизне“ векторного поля. Соответствующие направления этих экстремальных значений нормальной кривизны даются дифференциальным уравнением (14′).

Определение геодезической кривизны то же, что и в эвклидовом пространстве [2]. Дифференциальные уравиения геодезических линий—(14″).

Если при выбранном триедре $\{l_1 l_2 l_3\}$ рассматриваются чистые вращения около оси $\{M;\, l_3\}$, то инвариантами по отношению к этим вращениям выбраны выражения (15), связанные с равенством (16).

В случае $l_3^2 = -1$ дифференциальные уравнения линий кривизны, асимптотические линии, геодезические линии и инварианты поля будут те же, что и в эвклидовом пространстве [2].

В конце дано применение для двух видов сфер в псевдоэвклидовом пространстве: $-x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (a > 0)$, $\quad x^2 - y^2 - z^2 = a^2 \quad (a > 0)$.

GÉOMETRIE DU CHAMP DE VECTEURS DANS L'ESPACE PSEUDO-EUCLIDIEN À TROIS DIMENSIONS

A. Matéev

RÉSUMÉ

On traite le problème du champ de vecteurs dans l'espace pseudo-euclidien à trois dimensions R_3 par la méthode de Cartan de repère mobile. On considère dans R_3 un champ de vecteurs (I_3), où I_3 est un vecteur d'espace unitaire ou un vecteur de temps unitaire. Les vecteurs de base I_1, I_2, I_3 constituent un repère rectangulaire où $I_1^2=-1$, $I_2^2=I_3^2=1$ dans le premier cas et $I_1^2=I_2^2=1$, $I_3^2=-1$ dans le deuxième cas.

Soit M un point quelconque de R_3, alors les composantes d'un déplacement infiniment petit de M s'obtient de l'égalité (2).

On a les équations (3) où on pose

$$\omega_2^1=\omega_1^2=r, \quad \omega_3^2=-\omega_2^3=p, \quad \omega_3^1=\omega_1^3=-q$$

$$p=p_a\,\omega_0^a, \qquad q=q_a\,\omega_0^a, \qquad r=r_a\,\omega_0^a.$$

Une ligne de courbure du champ de vecteurs est une ligne orthogonale du vecteur du champ et telle qu'en chaque de ses points les vecteurs dM, I_3, dI_3 sont coplanaires. Les lignes de courbures sont données par les équations (7).

Pour que le champ de vecteurs admette une famille de surfaces orthogonales, il est nécessaire et suffisant que les lignes de courbures du champ soient orthogonales.

Une ligne asymptotique du champ de vecteures est une ligne orthogonale du vecteur du champ et telle qu'en chaque de ses points la forme quadratique $dM \cdot dI_3$ s'annule. Les lignes asymptotiques du champ de vecteurs sont données par les équations (8).

Soit dans R_3 la courbe

$$M=M(t) \qquad (t_0<t<t_1).$$

On suppose que les vecteurs $\frac{dM}{dt}$, $\frac{d^2M}{dt^2}$ sont linéairement indépendants et le plan passant par eux (le plan osculateur en M) est non isotrope. On désigne par t, n, b respectivement les vecteurs unitaires sur la tangente, la normale principale et la binormale de la courbe. Puisque $I_3^2=1$ il existe trois cas à considérer.

a) $t^2=-1$, $n^2=b^2=1$. Dans ce cas, le plan passant par les vecteurs n, I_3 porte une métrique euclidienne, on pose $nI_3=\cos\theta$ et l'on obtient (11).

b) $t^2=b^2=1$, $n^2=-1$. A cause de $n^2=-1$, $I_3^2=1$ l'angle de n et I_3 n'a pas de sens.

c) $t^2 = n^2 = 1$, $b^2 = -1$. Dans le cas de $nl_3 > 0$ on obtient $nl_3 = \operatorname{ch} \theta$ et on a (13).

Pour une direction non isotrope et non asymptotique l'expression (12) est nommée la courbure normale en M. Par les valeurs extrémales de la courbure normale on introduit „la courbure moyenne" et „la courbure gaussienne" du champ de vecteurs. Les directions correspondantes à ces valeurs extrémales de la courbure normale se donnent par l'équation différentielle (14').

La définition d'une ligne géodésique est la même que dans l'espace euclidien [2]. Ses équations différentielles sont (14").

Si pour le trièdre choisi $\{l_1 l_2 l_3\}$ on considère les rotations propres autour de l'axe $\{M; l_3\}$, on choisit comme invariants par rapport à ces rotations, les expressions (15), liéls par la relation (16).

Dans le cas où $T_3^2 = -1$ les équations différentielles des lignes de courbures, des lignes asymptotiques des lignes géodésiques et les invariants du champ de vecteurs sont les mêmes comme dans l'espace euclidien [2].

Enfin, on applique la théorie sur deux exemples, notamment les deux espèces de sphères dans l'espace pseudo-euclidien: $-x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a>0)$, $x^2 - y^2 - z^2 = a^2$ $(a > 0)$.