ВЪРХУ АРИТМЕТИЧНИТЕ СРЕДНИ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ РЕДОВЕ НА ФУРИЕ И НА УЛТРАСФЕРИЧНИЯ РЕД

Н. Обрешков

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $(0,2\pi)$ и интегруема в смисъл на Лебег. Нека съответният й ред на Фурие е

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n - \sin n x). \tag{1}$$

В 1903 г. унгарският математик Фейер доказа, че редът (1) е сумируем $(C, 1)$ със сума $f(x)$ за всяка точка x, за която функцията $f(x)$ е непрекъсната. Ако поставим

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\,[f(x+t) + f(x-t) - 2s],$$

където s е $f(x)$ за точка на непрекъснатост и $f(x)$ е продължена периодически извън интервала $(0, 2\pi)$, то наскоро след това Лебег установи, че редът е сумируем $(C, 1)$ със сума s за всяка точка x, за която

$$\int_0^h |\varphi(t)|\, dt = o(h), \quad h \to 0,$$

който резултат бе разширен от Харди в смисъл, че при това условие редът (1) е сумируем (C, δ) за всяко $\delta > 0$. Тези резултати бяха продължени в изследвания на редица математици относно връзката между реда на сумируемостта (C, k) на реда на Фурие (1) и свойствата на развиваемата функция $f(x)$. В няколко работи (1., 2., 3.) установих прецизни теореми в това направление, като за основа на извежданията ми бе едно ново получено от мене неравенство за средните аритметични на реда-ядро

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots \tag{2}$$

Това неравенство е следното: Ако $s_n^k(x)$ са средните на Чезаро от ред k за реда (2), т. е.

$$s_n^k(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^k \cos \nu x.$$

то за всяко x, $0 < x < \pi$, имаме

$$\left| \frac{d^p}{dx^p} s_n^k(x) \right| < M \frac{n^{p-k}}{x^{k+1}} + N \frac{1}{n x^{k+1}},$$

където M и N са константи, независими от n и x.

Това неравенство бе използувано и от други автори при изследвания върху сумируемостта на реда на Фурие с аритметичните средни. В настоящата работа установявам по-прецизна асимптотична формула. Именно доказвам, че за $0 < x < \pi$ имаме

$$\frac{d^p}{dx^p} s_n^k(x) = \Gamma(k+1) n^{p-k} \frac{\sin\left[x\left(n+\frac{k+1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}(p-k)\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}} + O\left(\frac{n^{p-k-1}}{x^{k+2}}\right) + O\left(\frac{1}{n x^{p+2}}\right).$$

Тази формула ни позволи да получим някои по-прецизни резултати за реда на сумируемостта (C, k) на реда на Фурие (1), като например следната теорема: Нека $\mu_p(t)$ означава функцията

$$\mu_p(t) = p t^{-p} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad \varphi(\tau) = \frac{1}{2}[f(x+\tau) + f(x-\tau)]$$

при $p > 0$ и $\mu_0(t) = \varphi(t)$. Нека за някое p функцията $\mu_p(t)$ да удовлетворява в интервала $(0, \pi)$ условието на Липшиц от ред α, $0 < \alpha < 1$, т. е. да имаме

(2) $$\mu_p(x) - \mu_p - (y) = O(|x-y|^\alpha)$$

за $x - y \to 0$. Тогава редът (1) е сумируем (C, k) за всяко $k > p - \alpha$ със сума $\mu_p(0)$. Ако условието (2) е заместено с условието

$$\mu_p(x) - \mu_p(y) = o(|x-y|^\alpha),$$

то редът (1) е сумируем $(C, p-\alpha)$ със сума $\mu_p(0)$.

За аритметичните средни на реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) P_n^{(\lambda)}(x),$$

където $P_n^{(\lambda)}(x)$ са ултрасферичните полиноми, установявам подобна асимптотична формула, която има значение при изследване на (C, k) сумируемостта на ултрасферичния ред. Ще забележа, че при доказване на поменатите асимптотични формули използувам метода, който въведох в по-раншните ми работи и който стана известен в математическата литература.

1. Асимптотични формули за производните на аритметичните средни на основни тригонометрични редове. Нека $\omega_n^k(t)$ са сумите на Чезаро от ред k за реда

(1) $$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots$$

и $\delta_n^k(t)$ са съответните суми за реда

(2) $$\sin t + \sin 2t + \sin 3t + \cdots$$
т. е.

$$\omega_n^k(t) = \frac{A_n^k}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^k \cos \nu t,$$

$$\delta_n^k(t) = \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^k \sin \nu t.$$

Нека $T_n^k(z)$ означават подобните суми за реда

$$1+z+z^2+z^3+\cdots$$

т. е.

$$T_n^k(z) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^k z^\nu.$$

От формулата

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} z^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^k(z) x^n$$

следва по формулата на Коши, че

(3) $$T_n^k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dx}{(1-x)^{k+1}(1-zx)x^{n+1}},$$

където интегрирането е извършено по една окръжност C, определена с $|x| = r < 1$. Но от релацията

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n$$

ще имаме подобно

$$A_n^k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dx}{(1-x)^{k+1} x^{n+1}}.$$

От тази формула и (3) следва, че

(4) $$T_n^k(z) - \frac{A_n^k}{1-z} = \frac{z}{2\pi i(z-1)} \int_C \frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)}$$

Както лесно се вижда, реалната част на (4) при $z=e^{it}$ е равна на $\omega_n^k(t)$ и имагинерната част на същата функция е равна на $\delta_n^k(t)$ и следователно ще имаме

(5) $$\omega_n^k(t) + i\,\delta_n^k(t) = T_n^k(z) - \frac{A_n^k}{1-z}, \quad z = e^{it}$$

За простота вместо $\omega_n^k(t)$ и $\delta_n^k(t)$ ще пишем съответно $\omega_n(t)$ и $\delta_n(t)$ и дясната част на (5) да означим с $F(z)$. Като диференцираме тогава p пъти равенството

$$\omega_n(t) + i\,\delta_n(t) = F(e^{it}),$$

получаваме

(6)
$$\omega_n^{(p)}(t) + i\,\delta_n^{(p)}(t)$$
$$= i^p\,[F^{(p)}(z)\,z^p + \lambda_p^{(1)}\,F^{(p-1)}(z)\,z^{p-1} + \lambda_p^{(2)}F^{(p-2)}(z)\,z^{p-2} + \cdots + \lambda_p^{(p-1)}\,F'(z)\,z],$$

където $z = e^{it}$; $\lambda_p^{(1)}, \lambda_p^{(2)}, \ldots, \lambda_p^{(p-1)}$ са константи. Да означим с α една окръжност с център точката $x = \frac{1}{z} = e^{-it}$ и достатъчно малък радиус и с β — контур, съставен от малка окръжност β_1: $|x-1| = \varrho$ и безкрайната отсечка $1+\varrho\cdots\infty$, премината два пъти (ласет около точката $x=1$). По теоремата на Коши ще имаме

(7)
$$F(z) = -F_1(z) - F_2(z),$$

където $F_1(z)$ и $F_2(z)$ са интегралите

(8)
$$F_1(z) = \frac{z}{2\pi i(z-1)} \int\limits_\alpha \frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)},$$

(9)
$$F_2(z) = \frac{z}{2\pi i(z-1)} \int\limits_\beta \frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)}.$$

Ще отбележим, че при сумирането на Чезаро се предполага, че $k > -1$ и следователно интегралът (9) при $n > 0$ има смисъл. Ако означим с $U(z)$ и $V(z)$ съответно функциите

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\beta \frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)},$$

то имаме

(10)
$$U^{(s)}(z) = \frac{(-1)^s s!}{(z-1)^{s+1}}, \quad s \geq 1,$$

(11)
$$V^{(s)}(z) = \frac{s!}{2\pi i} \int\limits_\beta \frac{x^s\,dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)^{s+1}}$$

и за $F_2^{(q)}(z)$ ще имаме

(12)
$$F_2^{(q)}(z) = \frac{z}{z-1} V^{(q)}(z) + \sum_{\nu=1}^{q} \binom{q}{\nu} U^{(\nu)}(z)\, V^{(q-\nu)}(z).$$

Нека $\frac{1}{n} \leq t \leq \pi$. Избираме радиусите на окръжностите α и β_1 за равни на $\frac{1}{3n}$. По β_1 имаме

$$|1-zx| > Kt,$$

където K е константа, независима от t и x. Тогава за интеграла

$$j_s = \int\limits_{\beta_1} \frac{x^s\,dx}{x^{n+1}(1-x)^k(1-zx)^{s+1}}$$

ще имаме

$$(13)\qquad j_s = O\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n+1-s}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{3n}\right)^k}\cdot\frac{1}{t^{s+1}}\right] = O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{s+1}}\right).$$

Ако j'_s означава съответния интеграл по отсечката $1+\frac{1}{3n}\cdots\infty$, то

$$(14)\qquad j'_s = O\left(\frac{1}{t^{s+1}}\int\limits_{1+\frac{1}{3n}}^{\infty}\frac{dx}{x^{n+1-s}(x-1)^k}\right) = O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{s+1}}\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\infty}\frac{du}{u^k\left(1+\frac{u}{n}\right)^{n+1-s}}\right)$$

$$= O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{s+1}}\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\infty}u^{-k}e^{-u}\,du\right) = O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{s+1}}\right).$$

От тези неравенства и (13) следва, че при $n\to\infty$ имаме

$$V^{(s)}(z) = O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{s+1}}\right).$$

От друга страна, очевидно, че

$$U^{(s)}(z) = O\left(\frac{1}{t^{s+1}}\right).$$

Тогава на основание на формула (12) ще имаме

$$(15)\qquad F_2^{(p)}(z) = O\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{n^{k-1}}{t^{p+1}}\right) + \sum_{\nu=1}^{p} O\left(\frac{1}{t^{\nu+1}}\cdot\frac{n^{k-1}}{t^{p+1-\nu}}\right)$$

$$= O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{p+2}}\right)$$

По формулата на Коши получаваме за функцията $F_1(z)$

$$-F_1(z) = \frac{1}{2\pi i(z-1)}\int\limits_{\alpha}\frac{dx}{x^{n+1}(1-x)^k\left(x-\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^{n+k+1}}{(z-1)^{k+1}}.$$

Да въведем за простота означенията

$$u = z^{n+k+1},\quad v = (z-1)^{-k-1}.$$

За производната $-F_1^{(p)}(z)$ получаваме

$$(16)\qquad -F_1^{(p)}(z) = (n+k+1)(n+k)\cdots(n+k-p+2)z^{n+k+1-p}(z-1)^{-k-1}$$
$$+\,p(n+k+1)(n+k)\cdots(n+k-p+3)\,z^{n+k-p}(z-1)^{-k-2}(-k-1)$$
$$+\sum_{\nu=0}^{p-2}\binom{p}{\nu}u^{(\nu)}v^{(p-\nu)}.$$

По-нататък получаваме

(17) $u^{(\nu)}v^{(p-\nu)} = (n+k+1)(n+k)\cdots(n+k+2-\nu)z^{n+k+1-\nu}(-k-1)(-k-2)$

$$\cdots(-k-p+\nu)(z-1)^{-k-1-p+\nu} = O(n^{\nu}t^{-k-1-p+\nu}).$$

Нека $k \geq p-1$. Тогава за $\nu \leq p-2$ ще имаме

$$n^{\nu}t^{-k-1-p+\nu} \leq \frac{n^{k-1}}{t^{p+2}}.$$

Действително предното неравенство се свежда до неравенството

$$(nt)^{k-1-\nu} \geq 1,$$

което е вярно, понеже $\nu \leq p-2 \leq k-1$. За втория член в (16) се вижда лесно, че той е $O\left(\frac{n^{p-1}}{t^{k+2}}\right)$ и следователно от (16) и (17) ще имаме

(18) $$-F_1^{(p)}(t) = p!\binom{n+k+1}{p}z^{n+k+1-p}(z-1)^{-k-1} + O\left(\frac{n^{p-1}}{t^{k+2}}\right) + O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{p+2}}\right).$$

От предното неравенство следва специално, че

(19) $$F_1^{(p)}(t) = O\left(\frac{n^p}{t^{k+1}}\right) + O\left(\frac{n^{p-1}}{t^{k+2}}\right) + O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{p+2}}\right).$$

За производната от ред p на функцията $-F_2(e^{it})$ имаме

$$\frac{d^p}{dt^p}F_2(z) = i^p[F_2^{(p)}(z)e^{ipt} + \lambda_p^{(1)}F_2^{(p-1)}(z)e^{i(p-1)t} + \cdots + \lambda_p^{(p-1)}F_2'(z)e^{it}]$$

и от (15) получаваме

(20) $$\frac{d^p}{dt^p}F_2(z) = \sum_{\nu=1}^{p} O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{\nu+2}}\right) = O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{p+2}}\right).$$

За производната $\frac{d^p}{dt^p}F_1(z)$ получаваме

(21) $$\frac{d^p}{dt^p}F_1(z) = i^pF_1^{(p)}(z)e^{ipt} + \Phi(z),$$

като

$$\Phi(z) = i^p[\lambda_p^{(1)}F_1^{(p-1)}(z)e^{i(p-1)t} + \cdots + \lambda_p^{(p-1)}F_1'(z)e^{it}].$$

От (19) следва, че

(22) $$\Phi(z) = O\left(\frac{n^{p-1}}{t^{k+1}}\right) + O\left(\frac{n^{p-2}}{t^{k+2}}\right) + O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{p+1}}\right).$$

Като се основаваме на неравенствата (15), (16), (18), (20), (22), получаваме

$$\omega_n^{(p)}(t) + i\delta_n^{(p)}(t)$$
$$= i^p e^{ipt}p!\binom{n+k+1}{p}z^{n+k+1-p}(z-1)^{-k-1} + O\left(\frac{n^{p-1}}{t^{k+2}}\right) + O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{p+2}}\right).$$

Оттук с отделяне на реалната и имагинерната част ще имаме

$$(23)\ \omega_n^{(p)}(t) = p!\binom{n+k+1}{p}\frac{\sin\left[t\left(n+\frac{k+1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}(p-k)\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}} + O\left(\frac{n^{p-1}}{t^{k+2}}\right) + O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{p+2}}\right),$$

$$(24)\ \delta_n^{(p)}(t) = -p!\binom{n+k-1}{p}\frac{\cos\left[t\left(n+\frac{k+1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}(p-k)\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}} + O\left(\frac{n^{p-1}}{t^{k+2}}\right) + O\left(\frac{n^{k-1}}{t^{p+2}}\right).$$

Нека

$$\sigma_n(t) = \frac{\omega_n(t)}{A_n^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A_n^k}\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^k \cos\nu t$$

са средните на Чезаро от ред k за реда (1). От (23) получаваме формулата

$$(25)\ \sigma_n^{(p)}(t) = \frac{p!}{A_n^k}\binom{n+k+1}{p}\frac{\sin\left[t\left(n+\frac{k+1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}(p-k)\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}} + O\left(\frac{n^{p-k-1}}{t^{k+2}}\right) + O\left(\frac{1}{nt^{p+2}}\right).$$

Можем тази формула да опростим. Действително за $n \to \infty$ имаме

$$A_n^k = \frac{n^k}{\Gamma(k+1)} + O(n^{k-1}),$$

$$\binom{n+k+1}{p} = \frac{n^p}{p!} + O(n^{k-1})$$

и оттук получаваме

$$\frac{p!\binom{n+k+1}{p}}{A_n^k} = \Gamma(k+1)\,n^{p-k} + O(n^{p-k-1}).$$

На основание на предното формулата (23) ще приеме вида

$$(26)\ \sigma_n^{(p)}(t) = \Gamma(k+1)\,n^{p-k}\frac{\sin\left[t\left(n+\frac{k+1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}(p-k)\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}} + O\left(\frac{n^{p-k-1}}{t^{k+2}}\right) + O\left(\frac{1}{nt^{p+2}}\right).$$

Подобно се преработва формулата (24). Асимптотичните формули (23), (24), респ. (25) и (26), бяха установени при $t \geqq \frac{1}{n}$. Ще докажем сега, че те са верни и за $0 < t < \frac{1}{n}$, т. е. за $0 < t \leq \pi$. Действително в цитираната работа установихме, че

$$\sigma_n^{(p)}(t) = O(n^{p+1}), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Но за $0 < t < \dfrac{1}{n}$ имаме

$$n^{p+1} < \frac{1}{nt^{p+2}},$$

понеже това неравенство се свежда до вярното неравенство

$$(nt)^{p+2} < 1.$$

Първият член в (26) е очевидно $O\left(\dfrac{n^{p-k}}{t^{k+1}}\right)$ и подобно се вижда, че

$$\frac{n^{p-k}}{t^{k+1}} < \frac{n^{p-k-1}}{t^{k+2}}.$$

Аналогично се установява верността на (24) за $t < \dfrac{1}{n}$. Така установихме следната теорема:

1. *За средните аритметични $\sigma_n(t)$ и $g_n(t)$ от ред k на редовете* (1) *и* (2) *имаме*

$$\text{(A)} \quad \sigma_n^{(p)}(t) = \Gamma(k+1) n^{p-k} \frac{\sin\left[t\left(n + \frac{k+1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(p-k)\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}} + O\left(\frac{n^{p-k-1}}{t^{k+2}}\right) + O\left(\frac{1}{nt^{p+2}}\right)$$

$$\text{(B)} \quad g_n^{(p)}(t) = -\Gamma(k+1) n^{p-k} \frac{\cos\left[t\left(n + \frac{k+1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(p-k)\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}} + O\left(\frac{n^{p-k-1}}{t^{k+2}}\right) + O\left(\frac{1}{nt^{p+2}}\right),$$

за $0 < t < \pi$ *и* $k \geqq p-1$.

2. Сумируемост на реда на Фурие с аритметичните средни. Нека $f(x)$ е интегруема функция в интервала $(0, 2\pi)$, периодична с период 2π и съответният й ред на Фурие е

$$(1) \qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Да означим с $\varphi(t)$ функцията

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)]$$

и да въведем за $p > 0$ функциите

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} \varphi(t)\, dt,$$

$$(2) \qquad \mu_p(x) = \Gamma(p+1)\, x^{-p} \varphi_p(x) = p x^{-p} \int_0^x (x-t)^{p-1} \varphi(t)\, dt,$$

$$\mu_0(x) = \varphi(x).$$

Ще докажем следната теорема:

2. *Нека функцията* $\mu_p(x)$ *удовлетворява за някое* $p \geq 0$ *условието на Липшиц в интервала* $(0, \pi)$ *от ред* α, $0 < \alpha < 1$, т. е.

$$\mu_p(x) - \mu_p(y) = O(|x-y|^\alpha) \tag{3}$$

за $x - y \to 0$. *Тогава редът на Фурие* (1) *е сумируем* (C, k) *за всяко* $k > p - \alpha$ *със сума* $\mu_p(+0)$. *Ако условието* (3) *е заместено с условието*

$$\mu_p(x) - \mu_p(y) = o(|x-y|^\alpha), \tag{4}$$

то редът (1) *е сумируем* $(C, p-\alpha)$.

Ако

$$S_n^k(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{A_n^k} \sum_{\mu=1}^{n} A_{n-\mu}^k (a_\mu \cos \mu x + b_\mu \sin \mu x)$$

са средните аритметични от ред k за реда (1), то имаме

$$S_n^k(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(t)\, \sigma_n(t)\, dt,$$

където

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{A_n^k} \sum_{\mu=1}^{n} A_{n-\mu}^k \cos \mu t$$

са средните аритметични от ред k за реда (1, § 1). С интегриране по части получаваме (за простота индексът n на σ се изпуска),

$$S_n^k(x) = A_n + (-1)^p \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_p(t)\, \sigma^{(p)}(t)\, dt, \tag{5}$$

където A_n означава израза

$$A_n = \frac{2}{\pi}[\varphi_1(\pi)\sigma(\pi) - \varphi_2(\pi)\sigma'(\pi) + \cdots + (-1)^{p-1}\varphi_p(\pi)\sigma^{(p-1)}(\pi)].$$

По условие имаме

$$k = p - \alpha + \delta,$$

където $\delta > 0$. От (A) за $s \leq p-1$ следва, че

$$\sigma^{(s)}(\pi) = o(n^{s-k}) + O(n^{s-k-1}) + O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha+\delta}}\right) = o(1)$$

и следователно $A_n = o(1)$ при $n \to \infty$. Тогава от (5) получаваме

$$S_n^k(x) = o(1) + (-1)^p \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_p(t)\, \sigma^{(p)}(t)\, dt$$

или

$$S_n^k(x) = o(1) + (-1)^p \frac{2}{\pi p!} \int_0^\pi t^p \mu_p(t)\, \sigma^{(p)}(t)\, dt. \tag{6}$$

При $f(x)=1$ имаме $S_n^k(x)=1$ и следователно от предното равенство следва, че

$$1=o(1)+(-1)^p\frac{2}{\pi p!}\int_0^\pi t^p\sigma^{(p)}(t)\,dt. \tag{7}$$

От (6) и (7) получаваме

$$S_n^k(x)-\mu_p(+0)=o(1)+(-1)^p\frac{2}{\pi p!}\int_0^\pi t^p\eta(t)\sigma^{(p)}(t)\,dt, \tag{8}$$

където $\eta(t)=\mu_p(t)-\mu_p(+0)$. Ще установим, че интегралът

$$B_n=\int_0^\pi t^p\eta(t)\sigma^{(p)}(t)\,dt$$

клони към нула при $n\to\infty$. Представяме интеграла като сума от три интеграла

$$B_n=\int_0^h t^p\eta(t)\sigma^{(p)}(t)\,dt+\int_h^{\pi-h}t^p\eta(t)\sigma^{(p)}(t)\,dt+\int_{\pi-h}^{\pi}t^p\eta(t)\sigma^{(p)}(t)\,dt=j_1+j_2+j_3,$$

като $h=\dfrac{\pi}{n}$ Понеже за $0<t<\pi$, $|\sigma^{(p)}(t)|<Mn^{p+1}$, като M е константа, за j_1 имаме

$$j_1<Mn^{p+1}\varepsilon_n\int_0^h t^p\,dt=M\frac{\varepsilon_n}{p+1},$$

където $\varepsilon_n=\max|\eta(t)|$ за $0<t\le h$. От предното неравенство следва тогава, че

$$\lim_{n\to\infty}j_1=0.$$

За j_3 на основание на неравенство (A) ще имаме

$$j_3=O(hn^{p-k})+O(hn^{p-k-1})+O(hn^{-1})=O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha+\delta}}\right)=o(1).$$

На основание на същото неравенство за j_2 получаваме

$$j_2=\Gamma(k+1)n^{p-k}\int_h^{\pi-h}t^p\frac{\sin\left[t\left(n+\frac{k+1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}(p-k)\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}\eta(t)\,dt+C_n+D_n,$$

където

$$C_n=O\left(n^{p-k-1}\int_h^{\pi-h}t^{p+\alpha-k-2}\,dt\right)=O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha+\delta}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha+\delta}}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha-1-\delta}}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha+\delta}}\right)+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=o(1),$$

$$D_n = O\left(\frac{1}{n}\int_h^{\pi-h} t^{\alpha-2}\,dt\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = o(1).$$

Ще трябва да се изследват интегралите

(9)
$$g_1 = n^{p-k}\int_h^{\pi-h} t^p \frac{\sin nt}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}\psi_1(t)\,dt$$

и

$$g_2 = n^{p-k}\int_h^{\pi-h} t^p \frac{\cos nt}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}\psi_2(t)\,dt,$$

като $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ означават функциите

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2^{k+1}}\cos\left[t\frac{k+1}{2} + \frac{\pi}{2}(p-k)\right]\eta(t),$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2^{k+1}}\sin\left[t\frac{k+1}{2} + \frac{\pi}{2}(p-k)\right]\eta(t)\,dt.$$

От равенството

$$\psi_1(t+h)-\psi_1(t) = [\eta(t+h)-\eta(t)]G(t+h) + \eta(t)[G(t+h)-G(t)],$$

$$G(t) = \frac{1}{2^{k+1}}\cos\left[t\frac{k+1}{2} + \frac{\pi}{2}(p-k)\right]$$

веднага се вижда, че $\psi_1(t)$ удовлетворява условието на Липшиц в теоремата. Същото е вярно и за функцията $\psi_2(t)$, както се вижда от подобното равенство за нея. Ако в интеграла g_1 направим смяната $t = \tau + h$, то ще получим, че

$$g_1 = -n^{p-k}\int_0^{\pi-2h}(\tau+h)^p\frac{\sin n\tau}{\left(\sin\frac{\tau+h}{2}\right)^{k+1}}\psi_1(\tau+h)\,d\tau.$$

Но имаме

$$n^{p-k}\int_0^{h}(\tau+h)^p\frac{\sin n\tau}{\left(\sin\frac{\tau+h}{2}\right)^{k+1}}\psi_1(\tau+h)\,d\tau = O\left(n^{p-k}\int_0^{h}(\tau+h)^{p-k-1+\alpha}\,d\tau\right)$$

$$= O(n^{p-k}h^{p-k+\alpha}) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) = o(1),$$

$$n^{p-k}\int_{\pi-2h}^{\pi-h}(\tau+h)^p\frac{\sin n\tau}{\left(\sin\frac{\tau+h}{2}\right)^{k+1}}\psi_1(\tau+h)\,d\tau = O\left(n^{p-k}\int_{\pi-2h}^{\pi-h}d\tau\right) = O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha+\delta}}\right) = o(1)$$

и следователно

$$g_1 = -n^{p-k}\int_h^{\pi-h}(\tau+h)^p\frac{\sin n\tau}{\left(\sin\frac{\tau+h}{2}\right)^{k+1}}\psi_1(\tau+h)\,d\tau+o(1).$$

От (9) и тази релация получаваме*

$$2g_1 = n^{p-k}\int_h^{\pi-h}\sin nt\left[\frac{t^p\psi_1(t)}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}-\frac{(t+h)^p\psi_1(t+h)}{\left(\sin\frac{t+h}{2}\right)^{k+1}}\right]dt+o(1).$$

Представяме интеграла в предната релация във вида

$$n^{p-k}\int_h^{\pi-h}\sin nt\frac{t^p\psi_1(t)-(t+h)^p\psi_1(t+h)}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}dt$$

$$+\,n^{p-k}\int_h^{\pi-h}\sin nt\,(t+h)^p\psi_1(t+h)\left[\frac{1}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}-\frac{1}{\left(\sin\frac{t+h}{2}\right)^{k+1}}\right]dt=T_1+T_2.$$

Ако $w(x)$ означава функцията $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-k-1}$, то от формулата

$$w(x+h)-w(x)=hw'(x+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

получаваме, че

$$|w(x+h)-w(x)|<hM'\frac{1}{t^{k+2}},$$

където M' е константа, независеща от t и h. Тогава за T_2 ще имаме

$$T_2=O(n^{p-k}\int_h^{\pi-h}(t+h)^p t^{-k-2}h(t+h)^{\alpha}dt)$$

$$=O\left(n^{p-k}\int_h^{\pi-h}ht^{p+\alpha-k-2}dt\right)=O(n^{p-k}h)+O(n^{p-k}h^{1+p+\alpha-k-1})=O(h^{1-\alpha+\delta})$$

$$+\,O(h^{\alpha})=o(1).$$

Представяме интеграла T_1 като сума от два интеграла:

$$T_1=n^{p-k}\int_h^{\pi-h}\sin nt\frac{t^p-(t+h)^p}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}\psi_1(t)+n^{p-k}\int_h^{\pi-h}\sin nt\frac{(t+h)^p[\psi_1(t)-\psi_1(t+h)]}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k+1}}dt$$

$$=T_1'+T_1''.$$

За T_1'' ще имаме

$$T_1''=O\left(n^{p-k}h^{\alpha}\int_h^{\pi-h}t^{p-k-1}dt\right)=O(n^{p-k}h^{\alpha})+O(n^{p-k}h^{\alpha}.h^{p-k})$$

$$=O(h^{\delta})+O(h^{\alpha})=o(1)$$

* Тук следваме начин, даден в цитираната работа на Харди и Литлевуд.

при $\delta > 0$. Ако условието (4) е изпълнено, то за T_1'' получаваме

$$T_1'' = o(1) + o(h^{\alpha}) = o(1).$$

За интеграла T_1' имаме

$$T_1' = -\sum_{\nu=1}^{p} \binom{p}{\nu} \delta_\nu, \qquad \delta_\nu = n^{p-k} h^{\nu} \int_h^{\pi-h} \sin nt \frac{\psi_1(t)\, t^{p-\nu}}{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^{k+1}} dt.$$

Ще установим, че

$$\lim_{n\to\infty} \delta_\nu = 0$$

при $1 \leqq \nu \leqq p$. Действително

$$\delta_\nu = O\left(n^{p-k} h^{\nu} \int_h^{\pi-h} t^{p+\alpha-\nu-k-1}\, dt\right) = O(h^{k-p+\nu})$$

$$+ O(h^{k-p+\nu} h^{p+\alpha-\nu-k}) = O(h^{\nu-\alpha+\delta}) + O(h^{\alpha}) = o(1).$$

Следователно ще имаме

$$\lim_{n\to\infty} T_1' = 0.$$

Така доказателството на теоремата се привършва.

При доказването на теорема 2. предполагаме, че условието (3) или (4) е изпълнено в затворения интервал $0 \leqq t \leqq \pi$. Лесно се вижда, че можем да се ограничим на отворения интервал $o < t < \pi$, като вземем пред вид, че граничните стойности $\mu_p(+0)$ и $\mu_p(\pi-0)$ трябва тогава да съществуват. Действително нека $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и $y_1, y_2, y_3, \ldots$ са две редици от положителни числа, клонящи към нула, за които

$$\lim_{n\to\infty} \mu_p(x_n) = a, \quad \lim_{n\to\infty} \mu_p(y_n) = b.$$

От неравенството

$$|\mu_p(x_n) - \mu_p(y_n)| < M\,|x_n - y_n|^{\alpha}$$

при $n \to \infty$ получаваме $|a-b| = 0$, т. е. $a=b$. Аналогично е доказателството за съществуването на $\mu_p(\pi-0)$. Естествено условието (3) в теорема 2 се предполага равномерно изпълнено, т. е. съществува константа M такава, че за кои да е x и y от интервала $(0, \pi)$ да имаме

$$(10) \qquad |\mu_p(x) - \mu_p(y)| < M\,|x-y|^{\alpha}.$$

Подобно се предполага и за условието (4). Непосредствено от (10) следва, че това условие ще бъде изпълнено за $0 \leqq x,\ y \leqq \pi$, стига за стойности на $\mu_p(t)$ за $t=0$ и $t=\pi$ да разбираме $\mu_p(+0)$ и $\mu_p(\pi-0)$ респ. При доказателството употребените интеграли ще се разбират за точките $t=0$ и $t=\pi$ в смисъл на Коши.

Ако $k=p$, то формулата (A) добива вида

$$\sigma_n^{(p)}(t) = Z_n(t) + T_n(t),$$

където

$$Z_n(t) = \Gamma(p+1)\frac{\sin t\left(n+\frac{p+1}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{p+1}},$$

(11) $$|T_n(t)| < M'\frac{1}{nt^{p+2}},$$

като M' означава константа, независима от n и t. Да предположим, че функцията $\mu_p(t)$ е непрекъсната за точката $t = 0$. Понеже

$$|\sigma_n^{(p)}(t)| < M'' n^{p+1},$$

като M'' е константа, независима от n и t, то ще имаме

(12) $$\int_0^{\frac{1}{n}} t^p \eta(t)\sigma_n^{(p)}(t)\,dt < M'' n^{p+1}\varepsilon_n \int_0^{\frac{1}{n}} t^p\,dt = M''\varepsilon_n \frac{1}{p+1},$$

където означава максимума на $|\eta(t)|$ в интервала $\left(0, \frac{1}{n}\right)$. От (12) следва, че

(13) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} t^n \eta(t)\sigma_n^{(p)}(t)\,dt = 0.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно малко число и $b > 0$ е такова, че $|\eta(t)| < \varepsilon$ за $0 < t < b$. На основание на (11) ще имаме

(14) $$\left|\int_{\frac{1}{n}}^{b} t^p \eta(t) T_n(t)\,dt\right| < M'\varepsilon\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{b}\frac{dt}{t^2} < M'\varepsilon.$$

От друга страна, ако a е произволно число, $0 < a < \pi$, то

$$\int_a^{\pi} t^p \eta(t)\sigma_n^{(p)}(t)\,dt = \int_a^{\pi} t^p \eta(t) Z_n(t)\,dt + \int_a^{\pi} t^p \eta(t) T_n(t)\,dt = \alpha_n + \beta_n.$$

По теоремата на Риман-Лебег α_n ще клони към нула при $n \to \infty$ и за β_n получаваме

(15) $$\beta_n = O\left(\frac{1}{n}\int_a^{\pi} |\eta(t)|\frac{dt}{t^2}\right) = o(1).$$

Като вземем пред вид (13), (14), (15), виждаме, че за $n \to \infty$ ще имаме

$$\int_0^{\pi} t^p \eta(t)\sigma_n^{(p)}(t)\,dt = \int_{\frac{1}{n}}^{a} t^p \eta(t) Z_n(t)\,dt + o(1).$$

Като вземем пред вид, че

$$\sin t\left(n+\frac{p+1}{2}\right)-\sin t\left(n+\frac{1}{2}\right)=2\sin\frac{p}{4}t\cos\left(n+\frac{p}{4}+\frac{1}{2}\right),$$

то

$$\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi} t^p Z_n(t)\,\eta(t)\,dt = p!\int\limits_{\frac{1}{n}}^{a} t^p\eta(t)\frac{\sin t\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{p+1}}dt+2p!\int\limits_{\frac{1}{n}}^{a}\eta(t)\,t^p\frac{\sin\frac{p}{4}t}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\cos\left(n+\frac{p}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^p}dt$$

и вторият интеграл по същата теорема на Риман-Лебег клони към нула при $n\to\infty$. Понеже $\eta(t)$ е непрекъсната за $t=0$ и $\eta(0)=0$, то като преди виждаме, че

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{a} t^p\eta(t)\frac{\sin t\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{p+1}}dt=0,$$

и следователно ще имаме при $(n\to\infty)$

$$\int\limits_0^{\pi} t^p\eta(t)\,\sigma_n^{(p)}(t)\,dt = p!\int\limits_0^{a} t^p\eta(t)\frac{\sin t\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{p+1}}dt+o(1).$$

Полученият резултат може да се изкаже със следната теорема:

3. *Нека за едно p функцията $\mu_p(t)$ е непрекъсната за точката $t=0$. Тогава редът на Фурие* (1) *за точката x е тогава и само тогава (C, p) сумируем, когато интегралът*

$$i_n=\int\limits_0^{a} g(t)\,\frac{\sin t\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}dt,\quad g(t)=\eta(t)\left(\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^p$$

клони към нула при $n\to\infty$.

Но интегралът i_n до константен множител е n-тата парциална сума на реда на Фурие на функцията $g(t)$. Следователно редът (1) е (C,p)-сумируем за x само тогава, когато редът на Фурие на функцията $g(t)$ е сходящ за $t=0$. Така познатите критерии за сходимост непосредствено се пренасят за сумируемост (C, p).

3. Асимптотични формули за ултрасферичния ред. При изследване на сумируемостта на ултрасферичния ред основно значение има сумируемостта на реда-ядка

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) P_n^{(\lambda)}(x), \quad x = \cos\gamma.$$

Да означим с $s_n^k(\gamma)$ аритметичните средни на този ред

$$s_n^k(\gamma) = \frac{S_n^k(\gamma)}{A_n^k}, \quad S_n^k(\gamma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{n-\nu}^k (\nu+\lambda) P_\nu^{(\lambda)}(\cos\gamma).$$

От формулата

$$(2) \qquad \frac{1}{(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\lambda+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^n P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)$$

се получава

$$(3) \quad \frac{\lambda}{\Delta^\lambda} + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\Delta^\lambda}\right) = \frac{\lambda(1-z^2)}{\Delta^{\lambda+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) z^n P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma), \quad \Delta = 1-2z\cos\gamma+z^2,$$

от което равенство следва, че

$$\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^k(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\lambda+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) z^n P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^k z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n S_n^k(\gamma).$$

Оттук по формулата на Коши получаваме

$$S_n^k(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

където $\varphi(z)$ означава функцията

$$\varphi(z) = \frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^k(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\lambda+1}}$$

и C е окръжност $|z| = r < 1$. Да означим с L_1, L_0 и L_2 три ласета, съставени съответно от малки окръжности c_1, c_0 и c_2 с центрове точките $e^{i\gamma}$, 1 и $e^{-i\gamma}$ от полуправи l_1, l_0, l_1, съответно сключващи ъгли γ, 0 и $-\gamma$ с реалната положителна полуос и съединяващи въпросните малки окръжности с безкрайната точка. Ще имаме

$$(4) \qquad S_n^k(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}}$$
$$= j_1 + j_0 + j_2,$$

като интеграционните контури се обикалят в обратна посока. Нека γ е подчинен на условието

$$\frac{1}{n} < \gamma \leq a < \pi,$$

където a е фиксирано число. Да означим с $U(\gamma)$ и $V(\gamma)$ функциите

$$U(\gamma) = (e^{i\gamma} - z)^{-\lambda-1}, \quad V(\gamma) = (e^{-i\gamma} - z)^{-\lambda-1}.$$

Функцията $\varphi(z)$ ще се представи така:

$$\varphi(z) = \lambda(1+z)(1-z)^{-k}\, U(\gamma)\, V(\gamma).$$

За производните на $U(\gamma)$ и $V(\gamma)$ намираме

$$\begin{aligned} U^{(p)}(\gamma) &= i^p\,[g_p(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-1-p}e^{ip\gamma}+g_{p-1}(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-p}e^{i(p-1)\gamma}+\cdots \\ &\quad +g_1(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-2}e^{i\gamma}], \\ V^{(p)}(\gamma) &= (-i)^p\,[g_p(e^{-i\gamma}-z)^{-\lambda-1-p}e^{-ip\gamma}+g_{p-1}(e^{-i\gamma}-z)^{-\lambda-p}e^{-i(p-1)\gamma}+\cdots \\ &\quad +g_1(e^{-i\gamma}-z)^{-\lambda-2}e^{-i\gamma}], \\ g_p &= (-1)^p(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+p), \end{aligned} \tag{5}$$

където $g_{p-1}, g_{p-2}, \ldots, g_1$ са константи, независими от γ.

По окръжността C_0 имаме $\left(|z-1| = \dfrac{1}{3n}\right)$,

$$|z-e^{i\gamma}| > K\gamma, \quad |z-e^{-i\gamma}| > K\gamma,$$

като K е константа, независима от γ. За p-тата производна на функцията $\psi(\gamma) = U(\gamma)\,V(\gamma)$ по тази окръжност ще имаме

$$\psi^{(p)}(\gamma) = \sum_{\nu=0}^{p}\binom{p}{\nu}U^{(\nu)}(\gamma)\,V^{(p-\nu)}(\gamma) = \sum_{\nu=0}^{p}O(\gamma^{-\lambda-1-\nu}\,\gamma^{-\lambda-1-p+\nu}) = O(\gamma^{-2\lambda-2-p}).$$

Тогава за производната на интеграла по c_0

$$j_{01} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

ще имаме

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}j_{01} = O\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^k}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n+1}}\cdot\frac{1}{\gamma^{2\lambda+2+p}}\right) = O\left(\frac{n^{k-1}}{\gamma^{2\lambda+2+p}}\right). \tag{5'}$$

Подобно за интеграла j_{02} по отсечката l_0 на ласета L_0 ще имаме

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}j_{02} = O\left(\frac{1}{\gamma^{2\lambda+2+p}}\int_{1+\frac{1}{3n}}^{\infty}\frac{(1+x)\,dx}{x^{n+1}(x-1)^k}\right) = O\left(\frac{n^{k-1}}{\gamma^{2\lambda+2+p}}\int_{\frac{1}{3}}^{\infty}\frac{du}{u^k\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}\right) = O\left(\frac{n^{k-1}}{\gamma^{2\lambda+2+p}}\right). \tag{5''}$$

Да означим с j_{11} интеграла по окръжността c_1:

$$j_{11} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}}.$$

Нека изберем радиуса на окръжността c_1 за равен на $\dfrac{1}{n}$. По c_1 ще имаме

$$|z-e^{i\gamma}| = \frac{1}{3n}, \quad |z-1| > K\gamma, \quad |z-e^{-i\gamma}| > K\gamma,$$

като K е константа, независима от γ. От (5) се вижда, че по c_1 ще имаме

$$U^{(\nu)}(\gamma) = O(n^{\lambda+1+\nu}), \quad V^{(p-\nu)}(\gamma) = O(\gamma^{-\lambda-1-p+\nu})$$

и следователно за $\psi^{(p)}(\gamma)$

$$(6)\qquad \psi^{(p)}(\gamma) = U^{(p)}(\gamma)\,V(\gamma) + \sum_{\nu=0}^{p-1} U^{(\nu)}(\gamma)\,V^{(p-\nu)}(\gamma)$$

$$= U^{(p)}(\gamma)\,V(\gamma) + \sum_{\nu=0}^{p-1} O(n^{\lambda+1+\nu}\,\gamma^{-\lambda-1-p+\nu}).$$

Но за $0 < \nu \leq p-1$ имаме

$$n^{\lambda+1+\nu}\,\gamma^{-\lambda-1-p+\nu} \leq n^{\lambda+p}\,\gamma^{-\lambda-2},$$

понеже това неравенство е еквивалентно на очевидното неравенство

$$(n\gamma)^{p-1-\nu} \geqq 1.$$

От (5) следва, че по c_1 имаме

$$(7)\qquad U^{(p)}(\gamma) = a_p(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-1-p}\,e^{ip\gamma} + O(n^{\lambda+p}),$$

където a_p означава числото

$$a_p = (-i)^p(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+p).$$

От (6) и (7) следва, че

$$(8)\qquad \psi^{(p)}(\gamma) = a_p(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-1-p}\,e^{ip\gamma}\,(e^{-i\gamma}-z)^{-\lambda-1} + O(n^{\lambda+p}\,\gamma^{-\lambda-2}).$$

Да означим с A интеграла

$$A = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^k z^{n+1}}\,\psi^{(p)}(\gamma)\,dz.$$

На основание на (8) можем да пишем

$$A = A_1 + A_2,$$

$$A_1 = \frac{a_p e^{ip\gamma}}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^k z^{n+1}(e^{i\gamma}-z)^{\lambda+1+p}(e^{-i\gamma}-z)^{\lambda+1}}\,dz,\quad A_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\lambda(1+z)\,T(\gamma)}{(1-z)^k z^{n+1}}\,dz,$$

като

$$(9)\qquad T(\gamma) = O(n^{\lambda+p}\,\gamma^{-\lambda-2}).$$

За интеграла A_2 получаваме на основание на (9)

$$A_2 = O\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\gamma^k}\cdot\frac{n^{\lambda+p}}{\gamma^{\lambda+2}}\right) = O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{\lambda+k+2}}\right)$$

и следователно ще имаме

$$(10)\qquad A_1 = \frac{a_p e^{ip\gamma}}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^k z^{n+1}(e^{i\gamma}-z)^{\lambda+1+p}(e^{-i\gamma}-z)^{\lambda+1}}\,dz + O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{\lambda+k+2}}\right).$$

Ще трябва сега да изучим интеграла

$$B = \frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^k z^{n+1}}\,\psi^{(p)}(\gamma)\,dz,$$

взет по праволинейната част l_1 на ласета L_1 По (5) имаме ($z = xe^{i\gamma}$)

$$U^{(p)}(\gamma) = O\left[(x-1)^{-\lambda-1-p}\,x^{p-1}\right], \quad V^{(p)}(\gamma) = O(\gamma^{-\lambda-1-p}),$$

(11)
$$\psi^{(p)}(\gamma) = U^{(p)}(\gamma)\,V(\gamma) + \sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{p}{\nu}U^{(\nu)}(\gamma)\,V^{(p-\nu)}(\gamma)$$
$$= U^{(p)}(\gamma)\,V(\gamma) + \sum_{\nu=0}^{p-1} O\left[x^{\nu-1}(x-1)^{-\lambda-1-\nu}\,\gamma^{-\lambda-1-p+\nu}\right].$$

Понеже по l_1

$$U^{(p)}(\gamma) = a_p\,e^{ip\gamma}(e^{i\gamma} - z)^{-\lambda-1-p} + O\left[x^{p-2}(x-1)^{-\lambda-p}\right],$$

то от (11) получаваме

(12)
$$\psi^{(p)}(\gamma) = a_p\,e^{ip\gamma}(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-1-p}(e^{-i\gamma}-z)^{-\lambda-1} + T_0 + \sum_{\nu=0}^{p-1} t_\nu,$$

като

$$T_0 = O\left[x^{p-2}(x-1)^{-\lambda-p}\,\gamma^{-\lambda-1}\right],$$
$$t_\nu = O\left[x^{\gamma-1}(x-1)^{-\lambda-1-\nu}\,\gamma^{-\lambda-1-p+\nu}\right].$$

Интегралът B приема формата

(13)
$$B = E + I + \sum_{\nu=0}^{p-1}\beta_\nu,$$

където E, I, B_ν означават интегралите

$$E = \frac{a_p e^{ip\gamma}}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^k z^{n+1}(e^{i\gamma}-z)^{\lambda+1+p}(e^{-i\gamma}-z)^{\lambda+1}}\,dz,$$

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{\lambda(1+z)\,T_0}{(1-z)^k z^{n+1}}\,dz, \quad B_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{\lambda(1+z)\,t_\nu}{(1-z)^k z^{n+1}}\,dz,$$

за които ще имаме

$$I = O\left(\int_{1+\frac{1}{3n}}^{\infty}\frac{x^p\,dx}{(x-1)^{\lambda+p}\,x^{n+1}\,\gamma^{k+\lambda+1}}\right) = O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+1}}\int_{\frac{1}{3}}^{\infty}\frac{du}{u^{\lambda+p}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{n-p}}\right)$$
$$= O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+1}}\right),$$

(14)
$$B_\nu = O\left(\int_{1+\frac{1}{3n}}^{\infty}\frac{x^p\,dx}{(x-1)^{\lambda+1+\nu}\,\gamma^{k+\lambda+p-\nu}\,x^{n+1}}dx\right) =$$
$$O\left(\frac{n^{\lambda+\nu}}{\gamma^{k+\lambda+p-\nu}}\int_{\frac{1}{3}}^{\infty}\frac{du}{u^{\lambda+1+\nu}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{n-p}}\right) = O\left(\frac{n^{\lambda+\nu}}{\gamma^{k+\lambda+p-\nu+1}}\right)$$

Понеже

$$\frac{n^{\lambda+\nu}}{\gamma^{k+\lambda+1+p-\nu}} \leq \frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+2}}, \quad \nu \leq p-1,$$

то от (13), (14) ще имаме

$$B = \frac{a_p e^{ip\gamma}}{2\pi i} \int\limits_{l_1} \frac{\lambda(1+z)\,dz}{(1-z)^k z^{n+1} (e^{i\gamma}-z)^{\lambda+1+p} (e^{-i\gamma}-z)^{\lambda+1}} + O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+2}}\right).$$

Оттук и от (10) получаваме

$$\frac{d^p}{d\gamma^p} j_1 = \frac{1}{2\pi i} \frac{d^p}{d\gamma^p} \int\limits_{L_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}} = G + O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+2}}\right),$$

където G означава интеграла

$$G = \frac{a_p e^{-i(\lambda+1)\gamma}}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{\lambda(1+z)\,dz}{(1-z)^k z^{n+1} (1-z e^{-i\gamma})^{\lambda+1+p} (e^{-i\gamma}-z)^{\lambda+1}}.$$

Да означим с $h(z)$ функцията

$$h(z) = \frac{\lambda(1+z)}{(1-z)^k (e^{-i\gamma}-z)^{\lambda+1}}.$$

Интеграла G представяме като сума на два интеграла:

$$G = G_1 + G_2,$$

като

$$G_1 = \frac{a_p e^{-i(\lambda+1)\gamma}}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{h(z) - h(e^{i\gamma})}{z^{n+1}(1-z e^{-i\gamma})^{\lambda+1+p}} dz,$$

$$G_2 = \frac{a_p e^{-i(\lambda+1)\gamma}}{2\pi i} h(e^{i\gamma}) \int\limits_{L_1} \frac{dz}{z^{n+1}(1-z e^{-i\gamma})^{\lambda+1+p}}.$$

От развитието

$$\frac{1}{(1-z e^{-i\gamma})^{\lambda+1+p}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\lambda+p} e^{-in\gamma} z^n$$

следва, че интегралът G_2 е равен на

(15) $$G_2 = a_p h(e^{i\gamma}) e^{-i\gamma(n+\lambda+1)} A_n^{\lambda+p}.$$

Да означим сега с T_1 и T_2 интегралите

$$T_1 = \frac{e^{-i\gamma(\lambda+1)}}{2\pi i} \int\limits_{c_1} \frac{h(z) - h(e^{i\gamma})}{z^{n+1}(1 - z e^{-i\gamma})^{\lambda+1+p}} dz,$$

$$T_2 = \frac{e^{-i\gamma(\lambda+1)}}{2\pi i} \int\limits_{l_1} \frac{h(z) - h(e^{i\gamma})}{z^{n+1}(1 - z e^{-i\gamma})^{\lambda+1+p}} dz.$$

Интегралът T_2 е сума от два интеграла, като в първия променливото x, определено със $z = e^{i\gamma}x$, се мени от ∞ до $1 + \frac{1}{3n}$ и във втория x се мени от $1+\frac{1}{3n}$ до ∞, като подинтегралната функция е умножена с фактора $e^{2l\pi(\lambda+1+p)}$, дължим на особената точка $z=e^{i\gamma}$.

Нека z е точка от ласета L_1. От формулата

$$h(z)-h(e^{i\gamma})=\int_{e^{i\gamma}}^{z} h'(\tau)\,d\tau,$$

където интегрирането е извършено по отсечката, съединяваща z с $e^{i\gamma}$, получаваме

$$|h(z)-h(e^{i\gamma})|\leq m\,|z-e^{i\gamma}|,$$

където m е максимумът на $|h'(\tau)|$ по въпросната праволинейна отсечка. Убеждаваме се лесно, че

$$m=O\left(\frac{1}{\gamma^{k+\lambda+2}}\right). \tag{16}$$

Понеже по окръжността c_1 имаме $|z-e^{i\gamma}|=\frac{1}{3n}$, то за интеграла T_1 на основание на (16) получаваме

$$T_1=O\left[\frac{\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda+p+1}}\cdot\frac{1}{\gamma^{k+\lambda+2}}\right]=O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+2}}\right). \tag{17}$$

Подобно за T_2, като положим $z=x\,e^{i\gamma}$, получаваме

$$T_2=O\left[\int_{1+\frac{1}{3n}}^{\infty}\frac{dx}{x^n(x-1)^{\lambda+p}\,\gamma^{k+\lambda+2}}\right]=O\left[\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+2}}\int_{\frac{1}{3}}^{\infty}\frac{du}{u^{\lambda+p}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}\right]= O(n^{\lambda+p-1}\,\gamma^{-k-\lambda-2}). \tag{18}$$

Следователно за интеграла G на основание на (17), (18) ще имаме

$$G=a_p h(e^{i\gamma})\,e^{-i\gamma(n+\lambda+1)}\,A_n^{\lambda+p}+O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+2}}\right).$$

Така ще получим

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}j_1=a_p h(e^{i\gamma})\,e^{-i\gamma(n+\lambda+1)}A_n^{\lambda+p}+O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+2}}\right). \tag{19}$$

За интеграла j_2 по аналогичен път (или със смяната на $e^{i\gamma}$ с $e^{-i\gamma}$) получаваме

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}j_2=\bar{a}_p h(e^{-i\gamma})\,e^{i\gamma(n+\lambda+1)}\,A_n^{\lambda+p}+O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+2}}\right). \tag{20}$$

От (5′), (5″), (19) и (20) получаваме окончателно, че

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}S_n^k(\gamma)=2m(\gamma)+O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+2}}\right)+O\left(\frac{n^{k-1}}{\gamma^{2\lambda+p+2}}\right),$$

където $m(\gamma)$ означава реалната част на функцията на γ:

$$a_p h(e^{i\gamma}) e^{-i\gamma(n+\lambda+1)} A_n^{\lambda+p}.$$

Следователно ще имаме асимптотичната формула

$$(21)\ \frac{d^p}{d\gamma^p} S_n^k(\gamma) = (\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+p) A_n^{\lambda+p} \frac{\sin\left[\gamma\left(n+\lambda+\frac{k+1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}(k+\lambda-p)\right]\cos}{2^{k+\lambda-1}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^k (\sin\gamma)^{\lambda+1}}$$

$$+ O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{\gamma^{k+\lambda+2}}\right) + O\left(\frac{n^{k-1}}{\gamma^{2\lambda+p+2}}\right),$$

която установихме за $\frac{1}{n} \leq \gamma < a < \pi$. Като вземем под внимание, че за $0 \leq \gamma \leq \pi$ имаме равномерно

$$\frac{d^p}{d\gamma^p} S_n^k(\gamma) = O(n^{2\lambda+k+p+1}),$$

то, както преди, се вижда лесно, че формулата (21) е вярна и за $0 < \gamma \leq \frac{1}{n}$.

Да разгледаме сега случая, когато

$$0 < a \leq \gamma < \pi - \frac{b}{n},$$

като $b > 0$ е фиксирано число. Да означим с $\eta(z)$ функцията

$$\eta(z) = \lambda(1+z)\Delta^{-\lambda-1} = \lambda(1+z)(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-1}(e^{-i\gamma}-z)^{-\lambda-1}.$$

За p-тата производна на интеграла

$$j_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

получаваме

$$\frac{d^p}{d\gamma^p} j_0 = \frac{1}{2\pi i}\frac{d^p}{d\gamma^p}\eta(1)\int_{L_0}\frac{dz}{z^{n+1}(1-z)^k} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{d^p}{d\gamma^p}\eta(z) - \frac{d^p}{d\gamma^p}\eta(1)\right]\frac{dz}{z^{n+1}(1-z)^k}.$$

Първият интеграл вдясно е равен на $A_n^{k-1}\frac{d^p}{d\gamma^p}\eta(1)$ и по следвания вече път лесно намираме, че вторият интеграл е $O(n^{k-2})$. Следователно ще имаме

$$(22)\ \frac{d^p}{d\gamma^p} j_0 = A_n^{k-1}\frac{d^p}{d\gamma^p}\eta(1) + O(n^{k-2}) = 2^{-2\lambda-1}\frac{d^p}{d\gamma^p}\left[\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)^{-\lambda-1}\right] A_n^{k-1} + O(n^{k-2}).$$

Да изберем радиуса на окръжността c_1 за равен на $\frac{b}{3n}$. За интеграла по ласета L_1

$$j_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

като използуваме формулата

$$\frac{\lambda(1-z^2)}{\Delta^{\lambda+1}}=\frac{\lambda}{\Delta^{\lambda}}+\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\Delta^{\lambda}}\right),$$

получаваме израза

$$(23)\qquad j_1=\frac{\lambda}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{dz}{z^{n+1}(1-z)^{k+1}\Delta^{\lambda}}+\frac{n+1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{dz}{z^{n+2}(1-z)^{k+1}\Delta^{\lambda}}$$

$$-\frac{k+1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{dz}{z^{n+1}(1-z)^{k+2}\Delta^{\lambda}}.$$

Трябва очевидно да изследваме интеграла

$$j_{12}=\frac{n+1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{dz}{z^{n+2}(1-z)^{k+1}\Delta^{\lambda}}.$$

Да въведем означенията

$$U_1(\gamma)=(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda},\quad V_1(\gamma)=(e^{-i\gamma}-z)^{-\lambda},\quad \psi_1(\gamma)=U_1(\gamma)\,V_1(\gamma).$$

По c_1 очевидно ще имаме

$$|z-e^{i\gamma}|=\frac{b}{3n},\quad |z-1|>K,\quad |z-e^{-i\gamma}|>M(\pi-\gamma),\quad |z|>1-\frac{b}{3n},$$

където K и M са крайни константи. Следователно по c_1 ще имаме

$$U_1^{(\nu)}(\gamma)=O(n^{\lambda+\nu}),\quad V_1^{(\nu)}(\gamma)=O[(\pi-\gamma)^{-\lambda-\nu}],$$

откъдето получаваме

$$\sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{p}{\nu}U_1^{(\nu)}(\gamma)\,V_1^{(p-\nu)}(\gamma)=\sum_{\nu=0}^{p-1}O[n^{\lambda+\nu}(\pi-\gamma)^{-\lambda-p+\nu}].$$

Но при $0\leqq\nu\leq p-1$ имаме

$$n^{\lambda+\nu}(\pi-\gamma)^{-\lambda-p+\nu}\leq\frac{1}{b^{p-1-\nu}}n^{\lambda+p-1}(\pi-\gamma)^{-\lambda-2},$$

понеже това неравенство е равносилно с вярното неравенство

$$\frac{1}{b^{p-1-\nu}}n^{p-1-\nu}(\pi-\gamma)^{p-1-\nu}\geqq 1.$$

Следователно за $\psi_1^{(p)}(\gamma)$ ще имаме

$$(24)\qquad \psi_1^{(p)}(\gamma)=U_1^{(p)}(\gamma)\,V_1(\gamma)+\sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{p}{\nu}U_1^{(\nu)}(\gamma)V_1^{(p-\nu)}(\gamma)$$

$$=U_1^{(p)}(\gamma)\,(e^{-i\gamma}-z)^{-\lambda}+O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right).$$

Като вземем под внимание, че

$$U_1^{(p)}(\gamma)=a_p'(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-p}+a_p'(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-p+1}+\cdots+a_p^{(p-1)}(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-1},$$

$$a_p'=(-i)^p e^{ip\gamma}\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+p-1),$$

то от (24) получаваме

$$\psi_1^{(p)}(\gamma)=a_p'(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda-p}(e^{i\gamma}-z)^{-\lambda}+\eta_1(z),$$

където

$$\eta_1(z)=O\left[\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right].$$

Тогава за p-тата производна на интеграла

$$j_{12}^{(1)}=\frac{n+1}{2\pi i}\int\limits_{c_1}\frac{dz}{z^{n+2}(1-z)^{k+1}\Delta^\lambda}$$

получаваме

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}j_{12}^{(1)}=\frac{n+1}{2\pi i}a_p'\int\limits_{c_1}\frac{dz}{z^{n+2}(1-z)^{k+1}(e^{i\gamma}-z)^{\lambda+p}(e^{-i\gamma}-z)^\lambda}+I,$$

където

$$I=O\left[\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right].$$

Подобно за интеграла $j_{12}^{(2)}$ по праволинейната част l_1 на ласета L_1

$$j_{12}^{(2)}=\frac{n+1}{2\pi i}\int\limits_{l_1}\frac{dz}{z^{n+2}(1-z)^{k+1}\Delta^\lambda}$$

получаваме

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}j_{12}^{(2)}=\frac{n+1}{2\pi i}a_p'\int\limits_{l_1}\frac{dz}{z^{n+2}(1-z)^{k+1}(e^{i\gamma}-z)^{\lambda+p}(e^{-i\gamma}-z)^\lambda}+\frac{n+1}{2\pi i}\int\limits_{l_1}\frac{h(\gamma)\,dz}{z^{n+2}(1-z)^{k+1}},$$

$$h(\gamma)=\sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{p}{\nu}U_1^{(\nu)}(\gamma)V_1^{(p-\nu)}(\gamma)+h_1(\gamma),\ h_1(\gamma)=O\left[|z-e^{i\gamma}|^{-\lambda-p+1}(\pi-\gamma)^{-\lambda}\right].$$

Понеже по l_1 $U_1^{(\nu)}(\gamma)=O(|e^{i\gamma}-z|^{-\lambda-\nu})$, $V_1^{(\nu)}(\gamma)=O[(\pi-\gamma)^{-\lambda-\nu}]$,

$$\frac{n+1}{2\pi i}\int\limits_{l_1}\frac{h(\nu)\,dz}{z^{n+2}(1-z)^{k+1}}=O\left[n\int\limits_{1+\frac{b}{3n}}^{\infty}\frac{dx}{x^{n+2}(x-1)^{\lambda+p-1}(\pi-\gamma)^\lambda}\right]$$

$$+\sum_{\nu=0}^{p-1}O\left[\int\limits_{1+\frac{b}{3n}}^{\infty}\frac{dx}{x^{n+2}(x-1)^{\lambda+\nu}(\pi-\gamma)^{\lambda+p-\nu}}\right]=O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right).$$

Следователно за p-тата производна на интеграла j_{12} ще бъде в сила формулата

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}j_{12}=\frac{n+1}{2\pi i}a_p'\int\limits_{L_1}\frac{dz}{z^{n+2}(1-z)^{k+1}(e^{i\gamma}-z)^{\lambda+p}(e^{-i\gamma}-z)^\lambda}+O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right). \tag{25}$$

Да въведем функцията

$$g(z) = (n+1)\, a'_p\, e^{-i\gamma(\lambda+p)} \frac{1}{z(1-z)^{k+1}(e^{-i\gamma}-z)^{\lambda}}.$$

Интегралът вдясно на (25) може да се представи така:

$$\frac{g(e^{i\gamma})}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{dz}{z^{n+1}(1-z\,e^{-i\gamma})^{\lambda+p}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(z)-g(e^{i\gamma})}{z^{n+1}(1-z\,e^{-i\gamma})^{\lambda+p}}.$$

Първият интеграл е равен на

$$g(e^{i\gamma})\, A_n^{\lambda+p-1}\, e^{-in\gamma}.$$

Аналогично на по-рано установяваме, че вторият интеграл е $O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right)$. Следователно ще имаме

$$\text{(26)} \qquad \frac{d^p}{d\gamma^p} j_{12} = g(e^{i\gamma})\, A_n^{\lambda+p-1}\, e^{-in\gamma} + O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right).$$

Подобно (или със смяна на $e^{i\gamma}$ с $e^{-i\gamma}$) за интеграла j_{21} по L_2

$$j_{21} = \frac{n+1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{dz}{z^{n+2}(1-z)^{k+1}\Delta^{\lambda}}$$

получаваме аналогичната формула

$$\text{(27)} \qquad \frac{d^p}{d\gamma^p} j_{21} = g(e^{-i\gamma})\, A_n^{\lambda+p-1}\, e^{in\gamma} + O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right).$$

От (25) и (26) следва формулата

$$\text{(28)} \qquad \frac{d^p}{d\gamma^p} j_1 = g(e^{i\gamma})\, A_n^{\lambda+p-1}\, e^{-in\gamma} + O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right),$$

като вземем пред вид, че останалите два интеграла в (23) не съдържат множителя $n+1$. За интеграла j_2 по ласета L_2 ще имаме подобната формула

$$\text{(29)} \qquad \frac{d^p}{d\gamma^p} j_2 = g(e^{-i\gamma})\, A_n^{\lambda+p-1}\, e^{in\gamma} + O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right).$$

От (22), (27), (29) получаваме окончателната асимптотична формула

$$\text{(30)} \quad \frac{d^p}{d\gamma^p} S_n^k(\gamma) = \frac{(n+1)A_n^{\lambda+p-1}\sin\Phi_n}{2^{k+\lambda}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{k+1}\sin^{\lambda}\gamma} + 2^{-2\lambda-1}\frac{d^p}{d\gamma^p}\left[\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)^{-\lambda-1}\right]A_n^{k-1}$$

$$+\, O\left(\frac{n^{\lambda+p-1}}{(\pi-\gamma)^{\lambda+1}}\right) + O(n^{k-2}), \quad \Phi_n = \gamma\left(n+\lambda+1+\frac{k+1}{2}\right) - \frac{\pi}{2}(k+\lambda-p).$$

Нека сега $\pi - \frac{b}{n} \leq \gamma \leq \pi$. Заместваме ласетите L_1 и L_2 с един ласет

L', съставен от окръжността $c'\left(|z+1|=\frac{3b}{n}\right)$ и сегмента l', $-\infty\cdots-1-\frac{3b}{n}$, преминат два пъти. Ще имаме

$$S_n^k(\gamma)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{(1+z)\,dz}{z^{n+1}(1-z)^k\Delta^{\lambda+1}}+\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{L'}\frac{(1+z)\,dz}{z^{n+1}(1-z)^k\Delta^{\lambda+1}}=\alpha+\beta.$$

За p-тата производна на интеграла α е валидна очевидно формулата (22). Представяме интеграла β като сума на два интеграла:

$$\beta=\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{c'}\frac{(1+z)\,dz}{z^{n+1}(1-z)^k\Delta^{\lambda+1}}+\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{l'}\frac{(1+z)\,dz}{z^{n+1}(1-z)^k\Delta^{\lambda+1}}=\beta_1+\beta_2.$$

По окръжността c' имаме

$$|z+1|=\frac{3b}{n},\qquad |z-1|>k,\qquad |z-e^{i\gamma}|>\frac{b}{2n},\qquad |z-e^{-i\gamma}|>\frac{b}{2n}$$

За $U_1^{(\nu)}(\gamma)$, $V_1^{(\nu)}(\gamma)$ и $\psi_1^{(p)}(\gamma)$ по c_1 ще имаме

$$U_1^{(\nu)}(\gamma)=O(n^{\lambda+\nu+1}),\qquad V_1^{(\nu)}(\gamma)=O(n^{\lambda+\nu+1}),$$

$$\psi_1^{(p)}(\gamma)=\sum_{\nu=0}^{p}O(n^{\lambda+\nu+1}\,.\,n^{p-\nu+\lambda+1})=O(n^{2\lambda+p+2}).$$

Тогава за p-тата производна на β_1 по c_1 получаваме

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}\beta_1=O\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot n^{2\lambda+p+2}\right)=O(n^{2\lambda+p}).$$

По употребен вече начин получаваме

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}\beta_2=O\left(\int\limits_{1+\frac{3b}{n}}^{\infty}\frac{(x-1)\,dx}{(x-1)^{2\lambda+p+2}x^{n+1}}\right)$$

$$=O\left(n^{2\lambda+p}\int\limits_{3b}^{\infty}\frac{du}{u^{2\lambda+p+1}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{n+1}}\right)=O(n^{2\lambda+p}).$$

Следователно за $\pi-\frac{b}{n}<\gamma\leq\pi$ имаме равномерно

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}S_n^k(\gamma)=O(n^{2\lambda+p})+O(n^{k-1}).\tag{31}$$

Тази формула е вярна и за $0<a<\gamma<\pi-\frac{b}{n}$, понеже от (30) имаме

$$\frac{d^p}{d\gamma^p}S_n^k(\gamma)=O\left(\frac{n^{\lambda+p}}{(\pi-\gamma)^{\lambda}}\right)+O(n^{k-1})=O(n^{2\lambda+p})+O(n^{k-1}).$$

Следователно формулата (31) е валидна за $0<a\leq\gamma\leq\pi$.

Постъпила на 1. XI. 1960 г.

ЛИТЕРАТУРА

Obrechkoff N. 1. Sur la sommation des séries trigonométriques de Fourier par les moyennes arithmétiques, Bulletin de la Société mathématique de France, 1934, p. 84—109, 167—184.

2. Sur la sommation de la série ultrasphérique par la méthode des moyennes arithmétiques, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. LIX, 1935, p. 1—22.

3. Върху аритметичните средни на тригонометричните редове, Годишник на Соф. университет, том XXXVIII, 1941/1942, стр. 103—190.

Kogbetliantz E. 1. Les séries trigonométriques et les séries sphériques, Annales sc. de l'Ecole Normale (3), % 40, 1923, p. 259—323.

2. Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques, Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. III, p. 107—187.

Hardy G. H. and Littlewood J. E. A convergence criterion for Fourier series. Mathematische Zeitschrift, 28, 1928, p. 612—634.

Zugmund A. Sur la sommabilité des séries de Fourier des fonctions verifiant la condition de Lipschitz, Bulletin de l'Acad. de Cracovie, 1925, p. 1—9.

О СРЕДНЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ И УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКОГО РЯДА

Н. Обрешков

РЕЗЮМЕ

В этой работе автор устанавливает сперва точную асимптотическую формулу для средних арифметических ряда-ядра

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots$$

в ряду Фурье. Именно, если $s_n^k(x)$ означают эти средние от порядка $k>-1$, т. е.

$$s_n^k(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{A_n^k}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^k\cos\nu x,$$

то для $0<x<\pi$ при $n\to\infty$ получаем

$$\frac{d^p}{dx^p}s_n^k(x)=\Gamma(k+1)\,n^{p-k}\,\frac{\sin\left[x\left(n+\frac{k+1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}(p-k)\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}+O\left(\frac{n^{p-k-1}}{x^{k+2}}\right)+O\left(\frac{1}{nx^{p+2}}\right).$$

На основе этой формулы выводятся точные теоремы суммируемости ряда Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

который соответствует данной функции $f(x)$, которая перидиочна с периодом 2π и интегрируема в $(0, 2\pi)$ по Лебегу. Например, доказывается следующая теорема, обобщающая известную теорему Зигмунда, а именно:

Пусть $\mu_p(t)$ означает функцию

$$\mu_p(t) = \frac{1}{2} p t^{-p} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} [f(x+\tau) + f(x-\tau)] \, d\tau$$

при $p > 0$ и $\mu_0(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)]$. Пусть для некоторого p функция $\mu_p(t)$ удовлетворяет в интервале $(0, \pi)$ условию Липшица порядка α, $0 < \alpha < 1$, т. е.

$$\mu_p(x) - \mu_p(y) = O(|x-y|^\alpha) \tag{2}$$

для $x - y \to 0$. Тогда ряд (1) является суммируемым (C, k) для каждого $k > p - \alpha$ суммой $\mu_p(0)$. Если условие (2) заменить условием

$$\mu_p(x) - \mu_p(y) = o(|x-y|^\alpha),$$

тогда ред (1) является суммируемым $(C, p-\alpha)$ с суммой $\mu_p(o)$.

Подобные асимтотические формулы выводятся и для средних арифметических ряда-ядра

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) P_n^{(\lambda)}(x)$$

ультрасферического ряда.

SUR LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DE FOURIER ET DE LA SÉRIE ULTRASPHÉRIQUE

N. Obrechkoff

RÉSUMÉ

Désignons par $s_n^k(x)$ les moyennes arithmétiques d'ordre $k > -1$ de la série

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots,$$

c'est-à-dire l'expression

$$s_n^k(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^k \cos \nu x.$$

Nous démontrons d'abord la formule asymptotique

$$(1)\quad \frac{d^p}{dx^p}S_n^k(x)=\Gamma(k+1)n^{p-k}\frac{\sin\left[x\left(n+\frac{k+1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}(p-k)\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{k+1}}+O\left(\frac{n^{p-k-1}}{x^{k+2}}\right)+O\left(\frac{1}{nx^{p+2}}\right),$$

valable uniformément pour $0<x, \leq \pi$, $n\to\infty$. Soit maintenant $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, intégrable au sens de Lebegue, périodique de période 2π et soit

$$(2)\qquad f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

la série de Fourier correspondante. En appliquant la formule (1) nous démontrons des théorèmes précis pour la sommabilité (C, k) de la série (2), parmi lesquels nous allons citer le suivant théorème, qui est une généralisation d'un théorème connu de Zygmund:

Désignons par $\mu_p(t)$ la fonction

$$\mu_p(t)=pt^{-p}\int_0^t(t-\tau)^{p-1}\varphi(\tau)d\tau,\quad \varphi(\tau)=\frac{1}{2}[f(x+\tau)+f(x-\tau)]$$

si $p>0$ et $\mu_p(t)=\varphi(t)$. Supposons que pour un p la fonction $\mu_p(t)$ satisfait dans l'intervalle $(0,\pi)$ à la condition de Lipschitz d'ordre α, $0<\alpha<1$, c'est-à-dire

$$(3)\qquad \mu_p(x)-\mu_p(y)=O(|x-y|^\alpha)$$

pour $x-y\to 0$. Alors la série (2) est sommable (C,k) pour chaque $k>p-\alpha$ avec la somme $\mu_p(0)$. Si au lieu de (3) on a

$$\mu_p(x)-\mu_p(y)=o(|x-y|^\alpha)$$

la série (2) sera sommable $(C, p-\alpha)$ avec la somme $\mu_p(0)$. On peut démontrer aussi ce théorème d'une manière semblable en utilisant la fonction $\gamma_p(x)=\int_0^1(1-t)^{p-1}\cos xt\,dt$ de Young. Nous démontrons à la fin la formule asymptotique correspondante pour la série ultrasphérique.