ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РАССМОТРЕННЫХ Л. ЧАКАЛОВЫМ

Л. Е. Дундученко

Пусть Δ обозначает замкнутый круг: $|\zeta| \leqslant 1$, $\zeta = \varrho e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $\sigma \subset \Delta$ и σ определяется неравенствами:

$$\varrho_1 < \varrho \leqslant \varrho_1 + h_1, \quad \varphi_1 < \varphi \leqslant \varphi_1 + h_2; \quad h_1 > 0, \quad h_2 > 0; \quad (\varrho_1, \varphi_1) \in \Delta.$$

Определение 1. Условимся называть функцией класса $\mathfrak{M}$ всякую неотрицательную аддитивную и нормальную функцию промежутка $G(\sigma)$ (функцию распределения) [1], определённую в Δ, нормированную условием

$$\int\limits_{(\Delta)} G(d\sigma) = 1 \tag{1}$$

(где интеграл понимается в смысле двумерного интеграла Стильтьеса) и определяемую функцией точки $g(\varrho; \varphi)$ следующим образом:

$$G(\sigma) = g(\varrho_1+h_1; \varphi_1+h_2) - g(\varrho_1+h_1; \varphi_1) - g(\varrho_1; \varphi_1+h_2) + g(\varrho_1; \varphi_1) \geqslant 0, \tag{2}$$

при этом $g(\varrho; \varphi)$ непрерывна справа по любой из переменных в каждой точке $(\varrho; \varphi) \in \Delta$ и $g(0; 0) = 0$; кроме того, $g(\varrho; \varphi)$ неубывающая по любой из переменных и

$$g(1; 2\pi) - g(1; 0) = g(1; 2\pi) - g(0; 2\pi) = 1.$$

Рассмотрим следующий класс функций [2]:

$$f(z) = \int\limits_{(\Delta)} \frac{z\, G(d\sigma)}{1 - \zeta z}, \tag{3}$$

где

$$\zeta = \varrho e^{i\varphi} \in \Delta; \quad z = re^{i\theta}, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi; \quad G(\sigma) \in \mathfrak{M},$$

а интеграл понимается в смысле двумерного интеграла Стильтьеса [1]. Нетрудно видеть, что функции класса (3) регулярны в круге $|z| < 1$. Действительно, формула (3) определяет при конкретизации функции распределения $G(\sigma)$ такие аналитические функции, полюсы которых лежат где угодно вне круга $|z| < 1$. Если предположить, что переменная ζ пробегает только окружность $|\zeta| = 1$, то функция распределения $G(\sigma)$ вырождается в функцию класса M [3], а интеграл (3) становится обычным одномерным интегралом Стильтьеса, и мы получаем известный класс Л. Чакалова [4] таких регулярных в круге $|z| < 1$ функций, полюсы которых распределяются вдоль окружности $|z| = 1$. Если же заставить точку ζ пробегать какой-нибудь из диаметров круга Δ, скажем, диаметр, лежащий на вещественной оси, то из класса (3) получается второй известный класс Л. Чакалова [4] таких регулярных в круге $|z| < 1$ функций, полюсы которых распределяются вдоль лучей $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. Как и в случае классов, рассмотренных Л. Чакаловым, функции класса (3) однолистны в круге $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, что следует из положительности вещественной части производной функции (3) в упомянутом круге, но может быть доказано непосредственным использованием леммы работы [4]. Недавно (31 мая 1958 года) в Москве на IV Всесоюзной Конференции по теории функции комплексного переменного профессор Шанхайского университета Фу-Тан (Fu-Tan Univesity Shanghai, China) Chen Kun-Kwong сделал сообщение об одном классе регулярных в круге $|z| < 1$ функций, определяемых дифференциальным неравенством $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}$. Эти функции (точнее функции, определяемые неравенством $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$) изучались М. Робертсоном и названы им звёздными функциями порядка α $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right.$ в данном случае$\left.\right)$. Для этого класса функций, как сообщил проф. Chen Kun-Kwong, установлено интегральное представление в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z\, d\alpha(\theta)}{1 - e^{-i\theta} z}, \quad \alpha(\theta) \uparrow, \quad \alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2\pi,$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

которое не может считаться структурной формулой в смысле В. А. Зморовича [3], так как звездные функции порядка α, $0 \leq \alpha < 1$, однолистны во всём круге $|z| < 1$. Как видим, приведенная выше формула полностью совпадает с формулой одного из классов, рассмотренных Л. Чакаловым [4].

Целью настоящей заметки является установление обычных в такого рода исследованиях теорем, касающихся точных оценок модуля и аргумента функции класса (3) и её первой производной, а также проблемы коэффициентов в классе (3). Полученные оценки, как мы увидим, окажутся точными и в классах функций Л. Чакалова, которые уже подробно изучены автором в работе [5]. Предварительно докажем одну теорему, позволяющую определять мажорантные области значений линейных функционалов вида:

$$(4) \qquad f(z) = \int_{(\Delta)} F(z; \zeta)\, G(d\sigma), \quad z = \text{const}, \quad z \in |z| < 1,$$

где подинтегральная функция регулярна по обоим переменным, соответственно в кругах $|z| < 1$ и $\Delta(|\zeta| \leq 1)$, а интеграл понимается, как двумерный интеграл Стильтьеса.

Определение 2. Пусть имеется односвязная область D. Её выпуклой оболочкой назовём такую выпуклую область P_0, что $D \subset P_0$, и, если P_1 — любая другая выпуклая область такая, что $D \subset P_1$, то также и $P_0 \subset P_1$.

Теорема 1. Мажорантной областью B значений функционала (4) при фиксированном z, $z \in |z| < 1$, является выпуклая оболочка P_0 области D, на которую отображает круг Δ функция $w = F(z; \zeta)$, как функция переменного ζ.

Доказательство. Прежде всего, мажорантная область B значений функционала (4) есть связное замкнутое и выпуклое множество. Замкнутость следует из теоремы Хелли для двумерных функций распределения класса $\mathfrak{M}$. Что касается связности и выпуклости, то они следуют из такого замечания: вместе с функциями w_1 и w_2, принадлежащими классу $W(w)$ функций (4), этому же классу принадлежит и функция $w_\lambda = \lambda w_1 + (1-\lambda) w_2$ при любом λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, так как, если w_1 и w_2 определяются из (4) функциями распределения $G_1(\sigma)$ и $G_2(\sigma)$, то функция $w_\lambda = \lambda w_1 + (1-\lambda) w_2$ определяется такой функцией распределения $G_\lambda(\sigma) = \lambda G_1(\sigma) + (1-\lambda) G_2(\sigma) \in \mathfrak{M}$.

Пусть теперь Δ отображается регулярной функцией $w = F(z; \zeta)$ $z = \text{const}$, $z \in |z| < 1$, на некоторую область D. Обозначим, соответственно через B и P_0 мажорантную область значений функционала (4) и выпуклую оболочку области D. Покажем, что $B = P_0$. Пусть $w_0 \in B$, можно убедиться, что тогда и $w_0 \in P_0$, откуда следует включение $B \subset P_0$. Действительно, если $w_0 \in B$, то либо $w_0 \in D$ и тогда, конечно, $w_0 \in P_0$; либо $w_0 \in \bar{D}$, но тогда ввиду выпуклости B, w_0 можно представить в виде $w_0 = \lambda w_1 + (1-\lambda) w_2$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, а w_1, $w_2 \in D$. Однако точка $w_0 = \lambda w_1 + (1-\lambda) w_2$ при любом λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, принадлежит P_0.

Пусть теперь $w_0 \in P_0$, покажем, что тогда и $w_0 \in B$, откуда будет следовать включение $P_0 \subset B$ и, следовательно, теорема. Допустим противное и пусть $w_0 \in \bar{B}$ при $w_0 \in P_0$. В таком случае из геометрических соображений ясно, что на границе L области B найдётся хотя бы одна такая точка w_0^*, $w_0^* \in \bar{P}_0$, что опорная прямая l области B будет иметь только одну общую точку w_0^* с границей L. Покажем, что это не так, то-есть, прямая l будет иметь общие точки с границей L, отличные от w_0^*, что и будет противоречить допущению $w_0 \in B$. С этой целью повернём область B на угол φ так, чтобы опорная прямая l стала параллельной мнимой оси, а область B находилась бы слева от неё. Если w_0^* соответствует в формуле (4) функция распределения $G_0^*(\sigma) \in \mathfrak{M}$, то

а) $w_0 = \int\limits_{(\Delta)} F(z; \zeta)\, G_0^*(d\sigma)$,

б) $J = \operatorname{Re}\left[e^{i\varphi} \int\limits_{(\Delta)} F(z; \zeta)\, G(d\sigma)\right] \quad \operatorname{Re}\left[e^{i\varphi} \cdot w_0^*\right] = J_0$.

На основании теоремы об оценке интеграла [1] будем иметь

$$J \leqslant \sup_{G(\sigma)} \int\limits_{(\Delta)} \operatorname{Re}\left[e^{i\varphi} F(z; \zeta)\right] G(d\sigma) \quad \sup_{\zeta \in \Delta} \left[\operatorname{Re} e^{i\varphi} F(z; \zeta)\right] \quad J_1.$$

В частности, $J_0 \leqslant J_1$. Пусть $\sup\limits_{\zeta\in\Delta} [\operatorname{Re} e^{i\varphi} F(z;\zeta)]$ достигается в точке ζ_1 (при фиксированном z из круга $|z|<1$). Считая, что $G_1(\sigma)\in\mathfrak{M}$ есть функция скачка [1] с одним скачком в точке ζ_1, равным 1, получим

$$J_1 = \operatorname{Re} F(z;\zeta_1) = \operatorname{Re}\int\limits_{(\Delta)} F(z;\zeta)\, G_1(d\sigma) \leqslant J_0,$$

то-есть, $J_0 = J_1$. Но функции $G_1(\sigma)$ соответствует по формуле (4) функция $w_1(z) = \int\limits_{(\Delta)} F(z;\zeta)\, G_1(d\sigma)$, причём, так как $w_1\in\overline{D}$, то $w_1\in P_0$. Таким образом, на опорной прямой l оказалась ещё одна точка w_1, отличная от точки w_0^*. Мы получили вышеупомянутое противоречие. Теорема доказана.

На основании этой теоремы можно получить ряд точных оценок в классе (3) и установить экстремальные отображающие функции.

Теорема 2. Если функция $w=f(z)$ принадлежит классу (3), то имеют место неравенства, точные во всём единичном круге:

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{1-|z|}, \qquad \left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \arcsin|z| \tag{5}$$

и реализуемые экстремальными функциями и только ими:

$$f_\theta(z) = \frac{z}{1-e^{+i\theta}z}, \quad \theta\in[0, 2\pi]. \tag{6}$$

Доказательство. Исследуя вид мажорантной области функционала (3)

$$f(z) = \int\limits_{(\Delta)} \frac{z\,G(d\sigma)}{1-\zeta z}, \quad f(z) = w,$$

убеждаемся, что она представляет собою круг

$$\left|w - \frac{z}{1-|z|^2}\right| \leqslant \frac{|z|^2}{1-|z|^2},$$

откуда и следуют немедленно оценки (5). Выбирая в формуле (3) в качестве функции распределения $G(\sigma)$ функцию скачка $G_\theta(\sigma)$, обладающую одним скачком, равным 1, в точке $\zeta=e^{i\theta}$, $\theta\in[0;2\pi]$, получаем экстремальные отображающие функции (6). Теорема доказана.

Теорема 3. Если функция $w=f(z)$ принадлежит классу (3), то в круге еднолистности $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеет место точные неравенства:

$$\text{A)}\ \frac{1}{(1+|z|)^2} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1}{(1-|z|)^2}; \tag{7}$$

$$\left(0 \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

В) $\dfrac{1-2|z|^2}{2(1-|z|^2)^2} \leqslant |f'(z)| \leqslant \dfrac{1}{(1-|z|)^2}$;

$\left(\dfrac{1}{2} \leqslant |z| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad |\arg f'(z)| \leqslant \arccos(1-2|z|^2).$

Все оценки, за исключением В), реализуются функциями (6) и только ими, а оценка В) реализуется функциями класса (3):

(8) $$f(z) = \frac{\lambda z}{1-\varepsilon_1 z} + \frac{(1-\lambda)z}{1-\varepsilon_2 z},$$

при надлежаще подобранных константах λ, ε_1, ε_2,

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad \varepsilon_1 = e^{i\theta_1}, \quad \varepsilon_2 = e^{i\theta_2}, \quad \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi].$$

Доказательство. Дифференцируя (3) по параметру z (что возможно ввиду регулярности подинтегральной функции в круге $|z| < 1$), получим следующий функционал

(9) $$u + iv = \int\limits_{(\varDelta)} \frac{G(d\sigma)}{(1-\zeta z)^2}.$$

Мажорантной областью значений этого функционала будет выпуклая оболочка области, ограниченной кривой L:

(10) $$\begin{gathered} u^2 + v^2 - 2a^2 u + a^2 = 2a^2 r^2 \sqrt{u^2+v^2}, \\ r = |z| < 1, \quad a^2 = \frac{1}{(1-r^2)^2} > 1. \end{gathered}$$

Подробное исследование вида этой граничной кривой L в декартовых и полярных координатах приводит к следующим результатам:

a) граничная кривая L симметрична относительно вещественной оси и пересекается любой прямой $u = C$, $C = \text{const} > 0$, не более, чем в двух точках, если $0 \leqslant |z| = r \leqslant \dfrac{1}{2}$, причём наиболее удалённой от начала координат точкой будет точка, лежащая на вещественной оси;

b) если $\dfrac{1}{2} < r < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, то таких точек пересечения с прямой $u=C$ будет не более четырёх (точнее: четыре при $\dfrac{a^2}{2}(1-2r^2) < C < a^2(1-r^2)$;

c) приведения уравнения L к полярной форме (то-есть, в полярных координатах) позволяет оценить $\arg f'(z)$. Исходя из вида выпуклой оболочки, нетрудно установить вид экстремальных отображающих функций (6) и (8), причём (8) получается из формулы (3) при выборе функции распределения $G(\sigma)$, обладающей двумя скачками в точках $\zeta = \varepsilon_1$ и $\zeta = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = e^{i\theta_1}$, $\varepsilon_2 = e^{i\theta_2}$, сумма которых равна 1. Теорема доказана.

Теорема 4. Если функция $w = f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ принадлежит классу (3), то имеют место точные неравенства:

$$(11) \qquad |a_n| \leqslant 1, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

которые достигаются функциями (6) и только ими.

Доказательство. Раскладывая подинтегральную функцию в (3) в ряд и почленно интегрируя его, а также используя теорему об оценке интеграла [1], немедленно получаем теорему 4.

Примечание. Как видим, оценки, приведенные в теоремах 2, 3 и 4, достигаются экстремальными функциями (6) и (8), принадлежащими, в свою очередь, классам, рассмотренных Л. Чакаловым, следовательно, являются точными и в этих классах, что было ранее установлено автором в работе [5].

Поступило 6. IV. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Смирнов В. И. Курс высшей математики, том V, М.—Л., 1947 г.
[2] Дундученко Л. О. Доповыды АН УРСР, т. 6 (1958).
[3] Зморовыч В. А. Укр. Матем. Журнал, том 4, № 3, (1952), 276—298.
[4] Tchakaloff L. C. R. Acad. Sci., **242**, 4, pp. 437—439, (1956).
[5] Дундученко Л. Е. Buletinul I. P. I., serie nouă, tom. III (VII), 3—4, (1957), pp. 37—38

ВЪРХУ ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА КЛАСИ ОТ АНАЛИТИЧЕСКИ ФУНКЦИИ, РАЗГЛЕЖДАНИ ОТ Л. ЧАКАЛОВ

Л. Е. Дундученко

РЕЗЮМЕ

Изучава се една класа от функции, холоморфни в единичния кръг и еднолистни в кръга $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, представени с формулата

$$w = \int\limits_{(\Delta)} \frac{z\,G(d\sigma)}{1-\zeta z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad \zeta \in \Delta,$$

където интегралът трябва да се разбира в смисъл на двумерен интеграл на Стилтес. За тази класа функции се установяват точните горни и долни оценки за

$$|w|, \quad |w'|, \quad \left|\arg \frac{w}{z}\right|, \quad |\arg w'|, \quad |a_n|.$$

Приведени са и екстремалните изобразяващи функции.

ON A GENERALIZATION OF CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS, EXAMINED BY L. CHAKALOV

L. E. Doundouchenko

SUMMARY

One class of functions, holomorphe in a unit circle and unifoliate in the circle $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ is represented by the formula

$$w = \int_{(\Delta)} \frac{z\,G(d\sigma)}{1 - z\zeta} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad \zeta \in \Delta,$$

where the integral should be taken in the sense of a two-dimensional Stieltes integral. In this class of functions, precise upper and lower estimations have been set up for $|w|$, $|w'|$, $\left|\arg \frac{w}{z}\right|$, $|\arg w'|$, $|a_n|$. Extremal depicting functions are given.