НЯКОИ БЕЛЕЖКИ ВЪРХУ ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ УРАВНЕНИЯ НА J. HALM

Г. Каратопраклиев

1. Уравнението

$$y''+ay'\operatorname{th}x+by=0 \tag{1}$$

е интегрирано в затворена форма от J. Halm [1] (вж. [2], уравнение 2.64) при

(2) $a=2$, b — произволно,

а от Бл. Долапчиев и Ив. Чобанов [3] при

(3) $a^2-4b-1=0$,

(4) $b^2-ab+b=0$, т. е. $b=0$, a — произволно и $a-b-1=0$,

(5) $2a^2-b^2+ab-2a-5b-4=0$.

В [2] е указан начин, по който могат да се получат някои връзки между параметрите a и b, при които уравнение (1) се интегрира в затворена форма. Ние ще намерим тези връзки и ще покажем, че (2), (3) (4) и (5) са частни случаи от тях.

Известно е [4] (вж. [2], уравнение 2.298), че уравнението

$$(Ax^2+1)y''+Bxy'+Cy=0 \tag{6}$$

се интегрира в затворена форма в случаите

$$B=(2n+1)A, \tag{7}$$

$$(A-B)^2-4AC=(2n+1)^2A^2, \tag{8}$$

$$(A-B)^2-4AC=[(2n+1)A-B]^2, \tag{9}$$

където n е произволно цяло число (в [2] неточно е отбелязано, че n е натурално число).

В [2] е указано, че уравнение (1) посредством субституцията

$$y(x)=\eta(\xi),\quad \xi=\operatorname{sh}x \tag{10}$$

се трансформира в уравнение от типа (6):

$$(\xi^2+1)\eta''+(a+1)\xi\eta'+b\eta=0. \tag{11}$$

В този случай

$$A=1,\quad B=a+1,\quad C=b. \tag{12}$$

От (7), (8), (9) и (12) се получават следните условия, при които уравнение (11), а оттам и уравнение (1), се интегрира в затворена форма:

$$a=2n, \quad b \text{ — произволно,} \tag{13}$$

$$a^2-4b=(2n+1)^2, \tag{14}$$

$$na-b=n^2. \tag{15}$$

Очевидно условията (2), (3) и (4) се получават от (13), (14) и (15) съответно при $n=1$, $n=1$, $n=0$ и $n=1$. Лесно се проверява, че условие (5) може да се напише така:

$$(a+b+1)(2a-b-4)=0,$$

и следователно се разпада на две условия:

$$a+b+1=0 \text{ и } 2a-b-4=0.$$

Те се получават от (15) съответно при $n=-1$ и $n=2$.

Авторите на [3] също трансформират уравнение (1) в уравнение (11) посредством субституцията (10), обаче веднага привеждат уравнение (11) в нормална форма, от което следва, че не са забелязали указанието, дадено в [2].

Забележка. От нашата работа [5] следва, че само в случая, разгледан от J. Halm, уравнение (1) може да се сведе до уравнение с постоянни коефициенти чрез линейна смяна на зависимата променлива по формулата

$$y=C_1 e^{-\int (\operatorname{th} x+C)dx} z,$$

където $C_1 \neq 0$ и C са произволни константи. J. Halm фактически използува точно тази трансформачна формула при $C_1=1$ и $C=0$, в който случай тя има вида

$$y=\frac{1}{\operatorname{ch} x} z;$$

обаче начинът, по който той работи, е твърде изкуствен.

2. Аналогично по начин, указан в [2], се намират следните условия, при които уравнението

$$y''+ay' \operatorname{tg} x+by=0 \tag{16}$$

(вж. [2] уравнение 2.70) се интегрира в затворена форма:

$$a=-2n, \quad b \text{ — произволно,} \tag{17}$$

$$a^2+4b=(2n+1)^2, \tag{18}$$

$$na-b=-n^2. \tag{19}$$

Условията, намерени в [1] и [3], са частни случаи от тези условия.

3. Ив. Чобанов и Г. Паскалев [6] (вж. таблица 3 и 7) намират някои връзки между параметрите α, β и γ на хипергеометричното уравнение

$$x(x-1)y''+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0, \tag{20}$$

при които то се интегрира в затворена форма. Условията в табл. 7 те са получили, като използуват условието (7). В табл. 3 условията са получени по друг начин.

Бл. Долапчиев, Г. Паскалев и Ив. Чобанов [7] намират някои връзки между параметрите a и b, при които уравнението на J. Halm

$$(1+x^2)^2y''+(ax^2+b)y=0 \tag{21}$$

се интегрира в затворена форма. В друга работа [8] Г. Паскалев и Ив. Чобанов обобщават условията, намерени в [7].

Ние ще покажем, че условията, намерени в [8], се получават веднага от един резултат в [7].

В [7] е получен следният резултат, ако

$$a=\theta-\theta^2-\lambda,\quad b=-\theta-\lambda, \tag{22}$$

където θ и λ са произволни константи, то общият интеграл на уравнение (21) се получава от общия интеграл на уравнението

$$2\theta xu'+(1+x^2)u''=\lambda u \tag{23}$$

по формулата

$$y=(1+x^2)^{\frac{\theta}{2}}u. \tag{24}$$

По-нататък авторите на [7] трансформират уравнение (21) в уравнение от типа (20) с цел да използуват условията, получени в [6], при които уравнение (20) се интегрира в затворена форма.

Авторите на [7] не са забелязали, че уравнението (23) е от типа (6). Ние ще използуваме този факт. Като елиминираме параметъра λ от (22) и (23), получаваме, че ако е изпълнено условието

$$a-b=2\theta-\theta^2, \tag{25}$$

общият интеграл на уравнение (21) се получава от този на уравнението

$$(1+x^2)u''+2\theta xu'+(b+\theta)u=0 \tag{26}$$

по формула (24). В този случай

$$A=1,\quad B=2\theta,\quad C=b+\theta. \tag{27}$$

От (27), (7), (8), (9) и (25) получаваме, че уравнение (21) се интегрира в затворена форма, ако е изпълнено някое от условията

$$4a-4b=-4n^2+4n+3, \tag{28}$$

$$a=-n^2-n,\ b \text{ — произволно}, \tag{29}$$

$$b^2+(2n-1)^2a+(-2n^2+2n+1)b=-n(n^2-1)(n-2). \tag{30}$$

Условията, получени в [7], са частни случаи, а тези, получени в [8], са еквивалентни на условията (28), (29) и (30).

Нека отбележим, че да се трансформира уравнение (23), което е от типа (6), в хипергеометрично, има смисъл само в случай че не се използуват условията от табл. 7. Причината за това е, че условията от табл. 7 са получени, като е използувано условието (7). Авторите на [7] не са взели това пред вид.

4. В работите [1] и [3] са намерени някои условия, при които уравнението на J. Halm

$$(1-x^2)^2 y''+(ax^2+b)y=0 \tag{31}$$

се интегрира в затворена форма. Други резултати в това направление не са получени.

Ние ще намерим някои връзки между параметрите a, b и c, при които уравнението (при $a \neq 0$ ще го наричаме уравнение на J. Halm)

$$(ax^2+1)^2 y''+(bx^2+c)y=0 \tag{32}$$

се интегрира в затворена форма. При $a=1$ и $a=-1$ ще получим съответни условия за уравненията (21) и (31).

Ако $a \neq 0$, уравнение (32) при известна връзка между параметрите a, b и c може да се трансформира в уравнение от типа (6) посредством линейна смяна на търсената функция. Наистина, като положим

$$y=\alpha(x)u,$$

където функцията $\alpha(x)$ е двукратно непрекъснато диференцируема и $\alpha(x) \neq 0$ в някой интервал, уравнение (32) при $ax^2+1 \neq 0$ добива вида

$$u''+2\frac{\alpha'}{\alpha}u'+\left[\frac{bx^2+c}{(ax^2+1)^2}+\frac{\alpha''}{\alpha}\right]u=0. \tag{33}$$

За да бъде това уравнение от типа (6), е необходимо

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{kx}{ax^2+1},$$

където k е произволна константа. За α получаваме

$$\alpha=C_1\,|ax^2+1|^{\frac{k}{2a}}, \tag{34}$$

където $C_1 \neq 0$ е произволна константа.* Като заместим α от (34) в уравнение (33), при $ax^2+1>0$ и $ax^2+1<0$, то добива вида

$$u''+2k\frac{x}{ax^2+1}u'+\frac{(k^2-ak+b)x^2+k+c}{(ax^2+1)^2}u=0$$

и следователно е от типа (6) само в случай че е изпълнено условието

$$k^2-ak+b=a(k+c).$$

* В работата [7], където се разглежда уравнение (32) при $a=1$, се използува точно тази субституция при $C_1=1$.

С това показахме, че ако е изпълнено условието*

$$k^2-2ak-ac+b=0, \tag{35}$$

то уравнение (32) посредством субституцията

$$y=C_1|ax^2+1|^{\frac{k}{2a}}u, \tag{36}$$

където $C_1 \neq 0$ и k са произволни константи, се трансформира в уравнението

$$(ax^2+1)u''+2kxu'+(k+c)u=0, \tag{37}$$

което е от типа (6).** В този случай

$$A=a, \quad B=2k, \quad C=k+c. \tag{38}$$

От (38), (7), (8), (9) и (35) получаваме, че уравнение (32) се интегрира в затворена форма, ако е изпълнено някое от условията

$$(4n^2-4n-3)a^2-4ac+4b=0, \tag{39}$$

$$b=-n^2-n, \ a \text{ и } c \text{ — произволни}, \tag{40}$$

$$n(n^2-1)(n-2)a^2+c^2+(-2n^2+2n+1)ac+(2n-1)^2b=0, \tag{41}$$

където n е произволно цяло число.

При $a=1$ се получават условията, намерени в [8] и които ние получихме в предната точка. При $a=-1$ и подходящи стойности на n се получават всички условия, намерени в [1] и [3], при които уравнение (31) се интегрира в затворена форма.

Условията (39), (40) и (41) могат да се получат и от [8], обаче начинът е твърде изкуствен.

Нека отбележим, че уравнение (32) при $a \neq 0$ посредством субституцията

$$y(x)=\eta(\xi), \quad \xi=\sqrt{|a|}\,x$$

се свежда до уравнение от типа (21) или (31). Също по общото диференциално уравнение (при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ ще го наричаме уравнение на J. Halm)

$$(ax^2+b)^2y''+(cx^2+d)y=0 \tag{42}$$

при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ чрез деление на b и извършване на субституцията

$$y(x)=\eta(\xi), \quad \xi=\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}\,x$$

се свежда до уравнение от типа (21) или (31).

По общото уравнение

$$(px^2+qx+r)^2y''+[\alpha(px^2+qx+r)+\beta]y=0, \tag{43}$$

* При $a=1$ се получава условието (25).

** Оттук следва, че резултатът от работа [7], който използувахме, за да получим условията (28), (29) и (30), може да се формулира така: ако са изпълнени условията (22), то уравнение (21) се трансформира в уравнение (23) посредством субституцията (24).

което разглежда А. Стоянов [9], при $p \neq 0$ посредством субституцията

$$y(x) = \eta(\xi), \quad \xi = x + \frac{q}{2p}$$

се свежда до уравнението

$$\left(p\xi^2 + \frac{4pr - q^2}{4p}\right)^2 \eta'' + \left[\alpha\left(p\xi^2 + \frac{4pr - q^2}{4p}\right) + \beta\right]\eta = 0, \tag{44}$$

което е от типа (42). Ако и $\Delta = 4pr - q^2 \neq 0$, като разделим на $\frac{\Delta^2}{16p^2}$, уравнение (44) добива вида (32)

$$\left(\frac{4p^2}{\Delta}\xi^2 + 1\right)^2 \eta'' + \left[\frac{16p^3\alpha}{\Delta^2}\xi^2 + \frac{4p\alpha}{\Delta} + \frac{16p^2\beta}{\Delta^2}\right]\eta = 0. \tag{45}$$

В този случай

$$a = \frac{4p^2}{\Delta} \quad b = \frac{16p^3\alpha}{\Delta^2}, \quad c = \frac{4p\alpha}{\Delta} + \frac{16p^2\beta}{\Delta^2}. \tag{46}$$

От (46), (39), (40) и (41) намираме, че уравнение (45), а оттам и уравнение (43), се интегрира в затворена форма, ако е изпълнено някое от условията

$$\frac{16\beta}{\Delta} = 4n^2 - 4n - 3, \tag{47}$$

$$\frac{16\alpha p^3}{\Delta^2} = -n^2 - n, \tag{48}$$

$$\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{4\beta}{\Delta}\right)^2 + (n^2 - n + 1)\frac{2\alpha}{p} + (-2n^2 + 2n + 1)\frac{4\beta}{\Delta} + n(n^2 - 1)(n - 2) = 0, \tag{49}$$

където n е произволно цяло число. Условията, намерени в [9] при $p \neq 0$ и $\Delta \neq 0$, се получават от (47), (48) и (49) при $n = 0$.

В заключение нека отбележим, че намерените условия, при които уравненията на J. Halm (1), (16) и (32) се интегрират в затворена форма, се получават от известните условия (7), (8) и (9), при което уравнение (6) се интегрира в затворена форма. Също и хипергеометричното уравнение (20) (вж. работа [6]) е тясно свързано с уравнение (6). Поради това представлява интерес да се потърсят други условия, при които уравнение (6) се интегрира в затворена форма.

Постъпила на 1. IV. 1960 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Halm J., Transactions of Royal Society of Edinburg, **41** (1906).
2. Kamke E., Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1, Leipzig, 1956.
3. Долапчиев Бл., Ив. Чобанов, Върху едно диференциално уравнение на J. Halm, Известия на математическия институт, том III, кн. I, 1958, 51—66.
4. Forsyth A., W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2 Aufl., Braunschweig, 1912.

5. Каратопраклиев Г., Някои условия, при които уравнението на Рикати може да се сведе до линейно хомогенно уравнение от втори ред с постоянни кеефициенти, Год. на Маш.-елект. инст., т. VI, кн. I (1959), 61—68.
6. Чобанов Ив., Г. Паскалев, Върху хипергеометричното диференциално уравнение, Год. на Соф. у-т, Физико-матем. фак., **50** (1955/56), кн. 1, ч. I, 31—65.
7. Доланчиев Бл., Г. Паскалев, Ив. Чобанов, Върху диференциалното уравнение на J. Halm, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **50** (1955/56), кн. 1, ч. I, 67—73.
8. Паскалев Г., Ив. Чобанов, Към въпроса за интегриране на диференциалното уравнение на J. Halm, Год. на Соф. унив., Физико-мат. фак., **50** (1955/56), кн. 1, ч. II, 61—65.
9. Стоянов А., Едно обобщение на диференциалното уравнение на J. Halm, Год. на Инж. стр. и-т, София, т. X, 1958, кн. 1, 7—13.

ЗАМЕТКИ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ХАЛЬМА

Г. Каратопраклиев

РЕЗЮМЕ

По способу, указанному в [2], находим, что уравнения (1) и (16) интегрируются в замкнутой форме, если выполнены соответственно условия (13), (14), (15) и (17), (18), (19), и показываем, что условия, полученные в (1) и (3), являются частными случаями найденных условий.

Для уравнения (32) находим условия (39), (40) и (41), при которых оно интегрируется в замкнутой форме. Более общие уравнения (42) и (43) при известных условиях сводятся к уравнению (32).

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VON HALM

G. Karatopraklieff

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird zunächst gezeigt, daß unter Benutzung der in [2] angedeuteten Methode die Differentialgleichungen (1) und (16) in geschloßener Form integriert werden können, wenn die Bedingungen (13), (14), (15) bzw. (17), (18), (19) erfüllt sind. Die früher in [1] und [3] gefundenen Bedingungen sind Spezialfälle davon. Es werden außerdem die Integrabilitätskriterien (39), (40) und (41) für die Gleichung (32) gefunden, wobei die allgemeineren Gleichungen (42) und (43) in gewißen Fällen sich auf die Gleichung (32) zurückführen lassen.