БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ ТОМ VI

ВЪРХУ АБСОЛЮТНО СУМИРУЕМИТЕ С АРИТМЕТИЧНИТЕ СРЕДНИ ДВОЙНИ РЕДОВЕ

Н. Обрешков

I. Основни свойства

Аритметичните средни $s_{n,m}^{k,l}$ от ред $k,l > -1$ за двойния ред

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nm} \tag{1}$$

се дефинират, както е известно, с изразите

$$s_{n,m}^{k,l}=\frac{S_{nm}^{k,l}}{A_n^k A_m^l},\quad S_{n,m}^{k,l}=\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{m} A_{n-\mu}^k A_{m-\nu}^l u_{\mu\nu}.$$

Ако двойната редица $s_{n,m}^{k,l}$ при неограниченото растене на n и m е сходяща с граница s, то казваме, че двойният ред (1) е сумируем с аритметичните средни (или с метода на Чезаро) от ред k,l със сума s или накъсо, че редът (1) е (C,k,l)-сумируем със сума s. Но при двойните редове редица основни свойства на сумирането на Чезаро на еднократните редици не остават в сила. Известно преимущество се постига, като Прингсхаймовата дефиниция на сходимост на двойните редици се замести с тъй наречената ограничена сходимост, а именно редът (1) се нарича (C,k,l,λ), $\lambda > 0$, сумируем със сума s, ако редицата $s_{n,m}^{k,l}$ е сходяща с граница s, но при предположението, че индексите n и m от известно място удовлетворяват неравенствата

$$\frac{1}{\lambda}m < n < \lambda m.$$

Но и при тази дефиниция основното свойство, че всеки (C,k)-сумируем прост ред е и $(C_{k_1} > k)$-сумируем със същата сума, не остава в сила без допълнителни ограничения за средните $s_{n,m}^{k,l}$.

Както ще видим, абсолютното сумиране с аритметичните средни на двойните редове запазва по-голямата част от свойствата на сумирането на простите редове. За дадения ред $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}$ да образуваме трансформирания ред $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{nm}^{kl}$, на който парциалните суми са средните

$s^{k,l}_{n,m}$. Именно за $n \geq 1$ полагаме

$$\sigma^{kl}_{nm} = s^{kl}_{nm} - s^{kl}_{n-1,m} - s^{kl}_{n,m-1} + s^{kl}_{n-1,m-1}$$

и за $n \geq 1$ и $m=0$ и $m \geq 1$, $n=0$,

$$\sigma^{kl}_{n,0} = s^{kl}_{n,0} - s^{kl}_{n-1,0}, \qquad \sigma^{kl}_{0,m} = s^{kl}_{0,m} - s^{kl}_{0,m-1}.$$

С пресмятане, подобно на това за простите редове, получаваме формулите, въведени за простите редове от Когбетлианц, а именно

$$\sigma^{k,l}_{n,m} = \frac{1}{nA^k_n mA^l_m} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} A^{k-1}_{n-\mu} A^{l-1}_{m-\nu} \mu\nu u_{\mu\nu}, \quad n \geq 1, \ m \geq 1.$$

$$\sigma^{kl}_{n,0} = \frac{1}{nA^k_n} \sum_{\mu=1}^{n} A^{k-1}_{n-\mu} \mu u_{\mu,0}, \quad \sigma^{kl}_{0,m} = \frac{1}{mA^2_m} \sum_{\nu=1}^{m} A^{l-1}_{m-\nu} \nu u_{0\nu}, \quad \sigma^{kl}_{0,0} = u_{00}.$$

Ако двойният ред $\sum\limits_{0}^{\infty} \sum\limits_{0}^{\infty} \sigma^{k,l}_{n,m}$ е абсолютно сходящ, то даденият ред (1) се нарича абсолютно сумируем с аритметичните средни или с метода на Чезаро, накъсо $|C, k, l|$-сумируем, от ред k, l. От значение за изучаване на това сумиране е формулата ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$)

$$\sigma^{k+\alpha,\, l+\beta}_{nm} = \frac{1}{nmA^{k+\alpha}_n A^{l+\beta}_m} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} A^{\alpha-1}_{n-\mu} A^{\beta-1}_{m-\nu} \mu\nu A^l_\mu A^l_\nu \sigma^{k,l}_{\mu\nu} \tag{2}$$

която се получава от лесно доказуемото равенство

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha (1-y)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T^{k,l}_{n,m} x^n y^m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T^{k+\alpha,\, l+\beta}_{n,m} x^n y^m,$$

$$T^{k,l}_{n,m} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} A^{k-1}_{n-\mu} A^{l-1}_{m-\nu} \mu\nu u_{\mu\nu}.$$

Именно това равенство се получава, като извършим умножението на $(1-x)^{-\alpha}(1-y)^{-\beta}$ със степенните редове

$$\frac{1}{(1-x)^k} \frac{1}{(1-y)^l} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nmu_{nm} x^n y^m$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} A^{k-1}_\mu x^\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{l-1}_\nu y^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nmu_{nm}.$$

При $m=0$ имаме подобното известно равенство за простите редове

$$\sigma^{k+\alpha,\, l+\beta}_{n,0} = \frac{1}{nA^{k+\alpha}_n} \sum_{\mu=1}^{n} A^{\alpha-1}_{n-\mu} A^k_\mu \mu\sigma^{kl}_{\mu,0} \tag{3}$$

и аналогичната формула за $n=0$. Ще установим сега основна теорема за това сумиране, която ни е и необходима.

Ако редът (1) *е* $|C, k, l|$*-сумируем, то той е и* $|C, k_1, l|$*-сумируем за всеки* $k_1 \geq k$, $l_1 \geq l$.

На основание на формулата (2) ще имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\sigma_{nm}^{k+\alpha,\, l+\beta}| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{nm A_n^{k+\alpha} A_m^{l+\beta}}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m} A_{n-\mu}^{\alpha-1} A_{m-\nu}^{\beta-1}\mu\nu A_\mu^k A_\nu^l |\sigma_{\mu\nu}^{kl}|$$

Като сменим вдясно реда на сумирането, получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\sigma_{nm}^{k+\alpha,\, l+\beta}|$$

$$\leq \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu\nu A_\mu^k A_\nu^l |\sigma_{\mu\nu}^{kl}| \sum_{n=\mu}^{\infty}\sum_{m=\nu}^{\infty}\frac{A_{n-\mu}^{\alpha-1} A_{m-\nu}^{\beta-1}}{nm A_n^{k+\alpha} A_m^{l+\beta}}. \tag{4}$$

Но при $n \to \infty$ съществува асимптотичното равенство

$$A_n^k \sim \frac{n^k}{\Gamma(k+1)}$$

и следователно

$$\sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{A_{n-\mu}^{\alpha-1}}{nA_n^{k+\alpha}} < K \sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{(n+1-\mu)^{\alpha-1}}{n^{k+\alpha+1}},$$

като K е крайна константа. По-нататък по известния метод на Коши получаваме

$$\sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{(n+1-\mu)^{\alpha-1}}{n^{k+\alpha+1}} = O\left(\int_{\mu}^{\infty}\frac{(x+1-\nu)^{\alpha-1}}{x^{k+\alpha+1}}\,dx\right) = O(\mu^{-k-1})$$

и следователно от (4) ще имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\sigma_{nm}^{k+\alpha,\, l+\beta}| = O\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu\nu A_\mu^k A_\nu^l |\sigma_{\mu\nu}^{kl}|\, \mu^{-1-k}\nu^{-1-l}\right) = O(1). \tag{5}$$

За $m=0$ имаме

$$|\sigma_{n0}^{k+\alpha,\, l+\beta}| \leq \frac{1}{nA_n^{k+\alpha}}\sum_{\mu=1}^{n} A_{n-\mu}^{\alpha-1} A_\mu^k \mu\sigma_{\mu,0}^{kl}$$

и следователно

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_{n0}^{k+\alpha,\, l+\beta}| \leq \sum_{\mu=1}^{\infty}\mu A_\mu^k |\sigma_{\mu,0}^{kl}| \sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{A_{n-\mu}^{\alpha-1}}{nA_n^{k+\alpha}} \tag{6}$$

$$< L\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu A_\mu^k |\sigma_{\mu,0}^{kl}| \frac{1}{\mu^{k+1}} = O(1),$$

като L е константа. С (5) и (6) теоремата е установена.

2. Теорема от Тауберов характер за абсолютно сумируемите двойни редове с аритметичните средни

За абсолютно сумируемите с аритметичните средни двойни редове установявам следното свойство:

Теорема 1. *Нека двойният ред*

(1)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}$$

е абсолютно сумируем с аритметичните средни от някой ред k, l. Като въведем означенията

$$\Delta_1 a_{nm} = a_{nm} - a_{n-1,m}, \quad \Delta_2 a_{nm} = a_{nm} - a_{n,m-1},$$

$$\Delta_1\Delta_2 a_{nm} = a_{nm} - a_{n-1,m} - a_{n,m-1} + a_{n-1,m-1}$$

нека редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left|\Delta_1\Delta_2\left(\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu u_{\mu\nu}\right)\right|,$$

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\Delta_1\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=1}^{n}\mu u_{\mu m}\right)\right|, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\Delta_2\left(\frac{1}{m+1}\sum_{\nu=1}^{m}\nu u_{n\nu}\right)\right|$$

са сходящи. Тогава даденият ред (1) *е абсолютно сходящ.*

Тази теорема ще установим в малко по-обща форма, а именно:

Теорема 2. *Нека на реда* (1) *трансформираният ред от редове k,l е*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{nm}^{kl}.$$

Нека редовете (2), (3) *в предната теорема са сходящи. Тогава редът*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sigma_{nm}^{kl} - u_{nm}\right)$$

е абсолютно сходящ.

Установяваме тази теорема при k и l цели числа. Предварително ще изведем две равенства.

Ако

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=1}^{n}\mu a_\mu,$$

то

(5)
$$\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu\left(\mu u_\mu - (\mu-1)u_{\mu-1}\right) = \alpha_n - \alpha_{n-1}$$

Действително имаме

(6)
$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=1}^{n}\mu a_\mu - \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n-1}\mu a_\mu$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu\, a_\mu + a_n$$

и

$$\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu(\mu a_\mu - \overline{\mu-1}a_{\mu-1}) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^2 a_\mu - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n-1}\mu(\mu+1)a_\mu$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu a_\mu + a_n\,,$$

откъдето следва равенството (5).

Ако α_{nm} и β_{nm} означават числата

$$\alpha_{nm} = \frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu\, a_{\mu\nu}\,,$$

$$\beta_{nm} = \Delta_1\Delta_2 a_{nm} = a_{nm} - a_{n-1,m} - a_{n,m-1} + a_{n-1,\,m-1}\,,$$

то имаме

$$J = \frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu\beta_{\mu\nu} = \Delta_1\Delta_2\alpha_{nm}\,. \tag{7}$$

Действително за J получаваме

$$J = \frac{1}{n(n+1)\,m(m+1)}\left(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu^2\nu^2 a_{\mu\nu} - \sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{m}\mu(\mu+1)\nu^2 a_{\mu\nu}\right. \tag{8}$$

$$\left. - \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m-1}\mu^2\nu(\nu+1)a_{\mu\nu} + \sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{m-1}\mu(\mu+1)\nu(\nu+1)a_{\mu\nu}\right).$$

Като вземем пред вид равенството

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}U_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{m-1}U_{\mu\nu} + \sum_{\mu=1}^{n}U_{\mu m} + \sum_{\nu=1}^{n}U_{n\nu} - U_{nm},$$

от (8) имаме

$$J = \frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu^2\nu^2 a_{\mu\nu}$$

$$-\frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\left(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu(\mu+1)\nu^2 a_{\mu\nu} - n(n+1)\sum_{\nu=1}^{m}\nu^2 a_{n\nu}\right)$$

$$-\frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\left(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\nu(\nu+1)\mu^2 a_{\mu\nu} - m(m+1)\sum_{\mu=1}^{n}\mu^2 a_{\mu m}\right)$$

$$+\frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\left(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu(\mu+1)\nu(\nu+1)a_{\mu\nu} - m(m+1)\sum_{\mu=1}^{n}\mu(\mu+1)a_{\mu m}\right.$$

$$-n(n+1)\sum_{\nu=1}^{m}\nu(\nu+1)a_{n\nu}\Big)+a_{nm}=\frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu a_{\mu\nu}$$

$$-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=1}^{m}\nu a_{n\nu}-\frac{1}{m(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu a_{\mu m}+a_{nm}.$$

За $\Delta_1\Delta_2\alpha_{nm}$ получаваме аналогично

$$(9)\quad \Delta_1\Delta_2\alpha_{nm}=\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu a_{\mu\nu}-\frac{1}{n(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu a_{\mu\nu}$$

$$-\frac{1}{(n+1)m}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m-1}\mu\nu a_{\mu\nu}+\frac{1}{nm}\sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{m-1}\mu\nu a_{\mu\nu}=\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu a_{\mu\nu}$$

$$-\frac{1}{n(m+1)}\Big(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu a_{\mu\nu}-n\sum_{\nu=1}^{m}\nu a_{n\nu}\Big)-\frac{1}{(n+1)m}\Big(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu a_{\mu\nu}$$

$$-m\sum_{\mu=1}^{n}\mu a_{\mu m}\Big)+\frac{1}{nm}\Big(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu a_{\mu\nu}-m\sum_{\mu=1}^{n}\mu a_{\mu m}-n\sum_{\nu=1}^{m}\nu a_{n\nu}+nma_{nm}\Big)$$

$$=\frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu\, a_{\mu\nu}-\frac{1}{m(m+1)}\sum_{\nu=1}^{m}\nu\, a_{n\nu}$$

$$-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu a_{\mu m}+a_{nm}.$$

От двете получени равенства следва равенството (7).

От равенствата (5) и (7) заключаваме, че условието в теорема (2) за сходимост на редовете е еквивалентно на условието за сходимост на редовете

$$(10)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\Big|\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu\omega_{\mu\nu}\Big|,$$

$$(11)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\Big|\sum_{\mu=1}^{n}\mu\gamma_{\mu m}\Big|,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\Big|\sum_{\nu=1}^{m}\nu\delta_{n\nu}\Big|,$$

като за простота сме въвели означенията

$$\omega_{\mu\nu}=\Delta_1\Delta_2(\mu\nu\, u_{\mu\nu})=\mu\nu\, u_{\mu\nu}-(\mu-1)u_{\mu-1,\nu}-\mu(\nu-1)u_{\mu,\nu-1}$$
$$+(\mu-1)(\nu-1)u_{\mu-1,\nu-1},$$
$$\gamma_{\mu m}=\Delta_1(\mu\, u_{\mu m})=\mu\, u_{\mu m}-(\mu-1)u_{\mu-1,m},$$
$$\delta_{n\nu}=\Delta_2(\nu u_{n\nu})=\nu u_{n\nu}-(\nu-1)u_{n,\nu-1}.$$

Ще изведем сега следната формула

(12)
$$\sigma_{nm}^{kl} - u_{nm} = \frac{I}{nmA_n^k A_m^l} + \frac{1}{nA_n^k}\sum_{\mu=1}^{n}\left(A_n^k - A_{n-\mu}^k\right)\gamma_{\mu,m}$$
$$+\frac{1}{mA_m^l}\sum_{\nu=1}^{m}\left(A_m^l - A_{m-\nu}^l\right)\delta_{n,\nu},$$

където I означава израза

$$I=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\left(A_n^k - A_{n-\mu}^k\right)\left(A_m^l - A_{m-\nu}^l\right)\omega_{\mu\nu}.$$

Да означим за простота с B_μ и C_ν числата

$$B_\mu = A_n^k - A_{n-\mu}^k,\quad C_\nu = A_m^l - A_{m-\nu}^l,\quad 1\leqq \mu \leqq n,\quad 1\leqq \nu\leqq m,$$

като B_{n+1} и C_{m+1} означават числата A_n^k и A_m^l. За израза I получаваме

$$I=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}B_\mu C_\nu\,\mu\nu\,u_{\mu\nu} - \sum_{\mu=2}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}B_\mu C_\nu\,(\mu-1)\nu\,u_{\mu-1,\nu}$$
$$-\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=2}^{m}B_\mu C_\nu\,\mu(\nu-1)\,u_{\mu,\nu-1}\quad \sum_{\mu=2}^{n}\sum_{\nu=2}^{m}B_\mu C_\nu\,(\mu-1)(\nu-1)u_{\mu-1,\nu-1}$$
$$=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}B_\mu C_\nu\,\mu\nu\,u_{\mu\nu} - \sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{m}B_{\mu+1}C_\nu\,\mu\nu\,u_{\mu\nu} - \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m-1}B_\mu C_{\nu+1}\mu\nu\,u_{\mu\nu}$$
$$+\sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{m-1}B_{\mu+1}C_{\nu+1}\mu\nu\,u_{\mu\nu}$$

Като вземем пред вид, че

$$\sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{m}B_{\mu+1}C_\nu\,\mu\nu\,u_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}B_{\mu+1}C_{\nu+1}\mu\nu\,u_{\mu\nu} - nB_{n+1}\sum_{\nu=1}^{m}B_\mu\,\mu u_{\mu\nu},$$

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m-1}B_\mu C_{\nu+1}\mu\nu\,u_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}B_m C_{\nu+1}\mu\nu\,u_{\mu\nu} - mC_{m+1}\sum_{\mu=1}^{n}B_\mu\,\mu\,u_{\mu m},$$

$$\sum_{\mu=1}^{n-1}\sum_{\nu=1}^{m-1}B_{\mu+1}C_{\nu+1}\mu\nu\,u_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}B_{\mu+1}C_{\nu+1}\mu\nu\,u_{\mu\nu} - nB_{n+1}\sum_{\nu=1}^{m}C_{\nu+1}\nu\,u_{n\nu}$$
$$-mC_{m+1}\sum_{\nu=1}^{n}B_{\mu+1}\mu\,u_{\mu m} + nmB_{n+1}C_{m+1}\,n_{nm},$$

за I получаваме

$$I=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}(B_\mu - B_{\mu+1})(C_\nu - C_{\nu+1})\mu\nu\,u_{\mu\nu}\quad nB_{n+1}\sum_{\nu=1}^{m}(C_\nu - C_{\nu+1})\nu\,u_{n\nu}$$

$$+mC_{m+1}\sum_{\mu=1}^{n}(B_\mu - B_{\mu+1})\mu\, u_{\mu m}.$$

Понеже

$$B_\mu - B_{\mu+1} = A^k_{n-\mu-1} - A^k_{n-\mu} = -A^{k-1}_{n-\mu},\quad C_\nu - C_{\nu+1} = -A^{l-1}_{m-\nu},$$

предната формула става

$$I=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m} A^{k-1}_{n-\mu}A^{l-1}_{m-\nu}\,\mu\nu\, u_{\mu\nu} - nA^k_n\sum_{\nu=1}^{m} A^{l-1}_{m-\nu}\,\nu\, u_{n\nu}$$

$$-mA^l_m\sum_{\mu=1}^{n} A^{k-1}_{n-\mu}\,\mu u_{\mu m} + nmA^k_nA^l_m\, u_{nm}.$$

Тук първият член вдясно е равен на $nmA^k_n A^l_m \sigma^{kl}_{nm}$ и тази формула ще приеме вида

$$\sigma^{kl}_{nm}\quad u_{nm} = \frac{I}{nmA^k_nA^l_m} + \frac{1}{nA^k_n}\sum_{\mu=1}^{n} A^{k-1}_{n-\mu}\,\mu\, u_{\mu m} \tag{13}$$

$$+\frac{1}{mA^l_m}\sum_{\nu=1}^{m} A^{l-1}_{m-\nu}\,\nu\, u_{n\nu}$$

Редовете $\sum\limits_\mu u_{\mu m}$ и $\sum\limits_\nu u_{n\nu}$ са прости и аналогично ще имаме

$$\frac{1}{nA^k_n}\sum_{\mu=1}^{n} A^{k-1}_{n-\mu}\,\mu\, u_{\mu m} = u_{nm} + \frac{1}{nA^k_n}\sum_{\mu=1}^{n}\left(A^k_{n-\mu} - A^k_n\right)\gamma_{\mu m} \tag{14}$$

$$\frac{1}{mA^l_m}\sum_{\nu=1}^{m} A^{l-1}_{m-\nu}\,\nu\, u_{n\nu} = u_{nm} + \frac{1}{mA^l_m}\sum_{\nu=1}^{n}\left(A^l_{m-\nu} - A^l_m\right)\delta_{n\nu}.$$

Като заместим в (13), получаваме формулата (12).

Първият член вдясно на (12) е равен на

$$\frac{I}{nmA^k_nA^l_m} = \frac{1}{nm}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\omega_{\mu\nu}\left(1-\frac{A^k_{n-\mu}}{A^k_n}\right)\left(1-\frac{A^l_{m-\nu}}{A^l_m}\right).$$

Като вземем пред вид, че

$$\frac{A^k_{n-\mu}}{A^k_n} = \prod_{s=1}^{k}\left(1-\frac{\mu}{n+s}\right)\quad \frac{A^l_{m-\nu}}{A^l_m} = \prod_{s=1}^{l}\left(1-\frac{\nu}{m+s}\right)$$

и означим с $S_1, S_2, \ldots, S_k$ елементарните симетрични функции на числата $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{n+k}$ и с $T_1, T_2, \ldots T_l$ тези на числата $\frac{1}{m+1}$, $\frac{1}{m+2}, \ldots, \frac{1}{m+l}$, то следва, че

$$\frac{I}{nmA_n^kA_m^l}=\frac{1}{nm}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\omega_{\mu\nu}[\mu S_1-\mu^2S_2+\ldots+(-1)^{k-1}\mu^k S_k][\nu T_1$$
$$-\nu^2T_2+\ldots+(-1)^l\nu^l T_l].$$

Ще докажем, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I}{nmA_n^kA_m^l}$$

е абсолютно сходящ. Понеже

$$S_p=O(n^{-p}),\ T_q=O(m^{-q}),\qquad n,\ m\to\infty,$$

то достатъчно е да установим сходимостта на редовете

(15) $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}m^{q+1}}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu^p\nu^q\omega_{\mu\nu}\qquad 1\leq p\leq k,\ 1\leq q\leq l.$$

При $p=q=1$ горният ред по предположение е сходящ. Да въведем означението

$$U_{nm}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu\omega_{\mu\nu}.$$

За сумата

$$V_{nm}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu^p\nu^q\omega_{\mu\nu}$$

с преработка, както преди, получаваме

(16) $$V_{nm}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}U_{\mu\nu}[\mu^{p-1}-(\mu+1)^{p-1}][\nu^{q-1}-(\nu+1)^{q-1}]$$
$$+(n+1)^{p-1}\sum_{\nu=1}^{m}U_{n\nu}[\nu^{q-1}-(\nu+1)^{q-1}]$$
$$+(m+1)^{q-1}\sum_{\mu=1}^{n}U_{\mu m}[\mu^{q-1}-(\mu+1)^{q-1}]+(n+1)^{p-1}(m+1)^{q-1}U_{nm}.$$

Тук естествено предполагаме, че p и q не са едновременно равни на 1. Ако $p=1$ или $q=1$, първият член в дясната част на предната формула изчезва. За сумата

$$V'_{nm}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}U_{\mu\nu}[\mu^{p-1}-(\mu+1)^{p-1}][\nu^{q-1}-(\nu+1)^{q-1}]$$

очевидно ще имаме

$$V'_{nm}<M\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu^{p-2}\nu^{q-2}|U_{\mu\nu}$$

където M е константа, независима от n и m. Ще имаме

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{q+1}}\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{q-2}|U_{n\nu}| = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{q-2}|U_{n\nu}|\sum_{m=\nu}^{\infty}\frac{1}{m^{q+1}} < M'\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}|U_{n\nu}|,$$

като M' е константа (примерно може да се вземе $M'=2^q$) и оттук получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}m^{q+1}}|V'_{nm}| < MM'\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{\mu=1}^{n}|U_{\mu\nu}|\mu^{p-2} \tag{17}$$

$$= MM'\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{p-2}|U_{\mu\nu}|\sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}} < M''\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2\nu^2}|U_{\mu\nu}|,$$

където M'' е константа. За сумата

$$g_n = (n+1)^{p-1}\sum_{\nu=1}^{m}U_{n\nu}\,[\nu^{q-1}-(\nu+1)^{q-1}]$$

имаме подобно

$$|g_n| < M(n+1)^{p-1}\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{q-2}|U_{n\nu}|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|g_n|}{n^{p+1}m^{q+1}} < M2^q\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\nu^2}|U_{n\nu}| \tag{18}$$

За

$$g'_m = (m+1)^{q-1}\sum_{\mu=1}^{n}U_{\mu m}[\mu^{q-1}-(\mu+1)^{q-1}]$$

имаме подобно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|g'_n|}{n^{p+1}m^{q+1}} < M'\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2\mu^2}|U_{\mu m}|, \tag{19}$$

където M' е константа. От (16), (17), (18), (19) получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|V_{nm}|}{n^{p+1}m^{q+1}} < L\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|U_{nm}|}{n^2m^2},$$

като L е константа и сходимостта на редовете (15) е така установена. Понеже

$$\frac{1}{nA_n^k}\sum_{\mu=1}^{n}(A_{n-\mu}^k-A_n^k)\gamma_{\mu m} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{n}\gamma_{\mu m}[\mu S_1-\mu^2S_2+\ldots\ (-1)^{k-1}\mu^kS_k] \tag{20}$$

от (20) следва напълно аналогично, като прилагаме същите неравенства, сходимостта на редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{nA_n^k}\left|\sum_{\mu=1}^{n}(A_{n-\mu}^k-A_n^k)\gamma_{\mu m}\right|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mA_m^2}\left|\sum_{\nu=1}^{m}(A_{m-\nu}^l-A_m^l)\,\delta_{n\nu}\right|$$

и доказателството на теоремата се привършва.

Теорема 1 следва непосредствено от теорема 2. Именно, понеже всеки $|C, r, s|$-сумируем ред е също така $|C, r_1, s_1|$-сумируем за всеки $r_1 \geq r$, $s_1 \geq s$, то можем да предположим, че редът (1) е сумируем $C, k, l|$, като k и l са цели числа. Понеже редът $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|\sigma_{nm}^{kl}|$ е абсолютно сходящ (по предположение), следва, че и редът (1) е абсолютно сходящ.

Теорема 3. *Ако редът* (1) *е абсолютно сходящ, то редовете* (2) *и* (3) *в теорема* 1 *са сходящи.*

Действително по формулата (6) имаме

$$g_{nm} = \Delta_1\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=1}^{n}\mu\, u_{\mu m}\right)=u_{nm}-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu\, u_{\mu m}.$$

Оттук получаваме

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|g_{nm}|\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|u_{nm}|+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu\,|u_{\mu m}|$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|u_{nm}|+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu\,|u_{\mu m}|\sum_{n=\mu}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|u_{nm}|.$$

Също така от формулата (9) имаме

$$T_{nm}=\Delta_1\Delta_2\left(\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu\, u_{\mu\nu}\right)=\frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu u_{\mu\nu}$$

$$-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu u_{\mu m}-\frac{1}{m(m+1)}\sum_{\nu=1}^{m}\nu\, u_{n\nu}+u_{nm},$$

откъдето получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|T_{nm}|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu\,|u_{\mu\nu}|$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\mu\,|u_{\mu m}|+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\,|u_{n\nu}|+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|u_{nm}|$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|u_{nm}|,$$

с което теоремата е установена.

От теоремите 1 и 3 следва:

Теорема 4. *Необходимо и достатъчно условие един ред* $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}$, *който е абсолютно сумируем с аритметичните средни от някой ред, да бъде абсолютно сходящ, е редовете*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\Delta_1\Delta_2\left(\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu u_{\mu\nu}\right)\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\Delta_1\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=1}^{n}\mu u_{\mu m}\right)\right|,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\Delta_2\left(\frac{1}{m+1}\sum_{\nu=1}^{m}\nu u_{n\nu}\right)\right|$$

да бъдат сходящи.

Ще установим сега някои достатъчни условия за разглежданите въпроси.

Теорема 5. *Нека редът*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nm} \tag{21}$$

е абсолютно сумируем с аритметичните средни от някой ред и нека редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|nu_{n,m}-(n-1)u_{n-1,m}|,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|mu_{n,m}-(m-1)u_{n,m-1}| \tag{22}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\; nmu_{nm}-(n-1)mu_{n-1,m}-(m-1)nu_{n,m-1}+(n-1)(m-1)u_{n-1,m-1} \tag{23}$$

са сходящи. Тогава редът (21) *е абсолютно сходящ.*

Ако положим

$$\delta_{nm}=nu_{n,m}-(n-1)u_{n-1,m},\quad \alpha_{n,m}=\frac{1}{n+1}\sum_{\mu}\mu u_{\mu,m},$$

имаме

$$nu_{nm}=\delta_{1m}+\delta_{2m}+\dots+\delta_{nm},$$

$$\alpha_{nm}=\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{\mu}\delta_{\tau m}=\sum_{\tau=1}^{n}\left(1-\frac{\tau}{n+1}\right)\delta_{\tau,m}$$

и оттук получаваме

$$\alpha_{nm}-\alpha_{n-1,m}=\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\delta_{\nu m}-\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\delta_{\nu m}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\nu\delta_{\nu m}$$

и следователно

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{nm}-\alpha_{n-1,m}|\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\nu|\delta_{\nu m}|=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}|\delta_{\nu m}|.$$

Като положим сега

$$\omega_{nm}=\Delta_1\Delta_2(nmu_{nm})=nmu_{nm}-(n-1)mu_{n-1,m}-n(m-1)u_{n,m-1}$$
$$+(n-1)(m-1)u_{n-1,m-1},$$

$$\beta_{nm}=\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu\, u_{\mu\nu},$$

получаваме

$$nm\, u_{nm}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\omega_{\mu\nu},$$

$$\beta_{nm}=\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{\mu}\sum_{\beta=1}^{m}\omega_{\alpha\beta}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\left(1-\frac{\mu}{n+1}\right)\left(1-\frac{\nu}{m+1}\right)\omega_{\mu\nu},$$

$$\Delta_1\Delta_2\beta_{nm}=\frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu\omega_{\mu\nu},$$

откъдето следва, че

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\Delta_1\Delta_2\beta_{nm}|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)m(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu|\omega_{\mu\nu}|=\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}|\omega_{\mu\nu}|.$$

С предните неравенства е установено, че редовете (22) и (23) са сходящи. Теорема 4 следва от теорема 1.

Трябва да отбележим, че от абсолютната сходимост на реда (21) не следва сходимостта на редовете (22) и (23).

3. Теореми от Тауберов характер за абсолютно сумируемите интеграли със средните на Чезаро

Интегралът

$$\int_0^\infty f(x)dx \tag{1}$$

се нарича сумируем със средните на Чезаро от ред $k \geqq 0$ със стойност, s, ако средната стойност

$$\varphi_k(x)=\int_0^x\left(1-\frac{t}{x}\right)^k f(t)dt \tag{2}$$

клони към границата s, когато x расте неограничено. Казваме накъсо че интегралът (1) е сумируем (C, k) със сума s. Определението на абсолютното сумиране на интегралите с този метод бе дадено в работите ми [1], [2] и [3]. Именно интегралът (1) се нарича абсолютно сумируем със средните на Чезаро от ред k, ако функцията (2) е с ограничена вариация в интервала $(A, \ )$, $A>0$, т. е. интегралът

$$\int_0^x |\varphi_k'(x)|\,dx$$

съществува. За производната $\varphi_k'(x)$ имаме

$$\sigma_k(x)=\varphi_k'(x)=kx^{-k-1}\int_0^x (x-t)^{k-1}tf(t)dt. \tag{3}$$

В работата [4] установихме теореми от Тауберов характер за това сумиране. Именно, ако интегралът

$$\int_A^\infty \frac{dx}{x^2}\left|\int_0^x t\,dg(t)\right|, \quad g(x)=xf(x), \tag{4}$$

е сходящ и интегралът (1) е абсолютно сумируем с метода на Чезаро от някой ред, то интегралът (1) е абсолютно сходящ. Доказахме и по-общата теорема, че от сходимостта на интеграла (4) следва сходимостта на интеграла

$$\int_A^\infty |f(x)-\sigma_k(x)|\,dx, \tag{5}$$

без да се правят предположения за абсолютната сумируемост на интеграла (1). Тук k е произволно естествено число. Функцията $f(x)$ се предполага непрекъсната във всеки краен интервал. Ако с $h(x)$ означим функцията

$$h(x)=\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt, \tag{6}$$

установихме, че интегралът (4) е само тогава сходящ, когато функцията (6) е с ограничена вариация в интервала (A, ∞).

В настоящата работа доказваме съответни теореми за двукратните интеграли. При това за простота предполагаме, че разглежданите функции са непрекъснати в крайни области или интегруеми в Риманов смисъл и ограничени в тях. Пренасянето на получените резултати за повечекратните редове и интеграли не представлява съществена трудност.

За двойния интеграл

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)dxdy \tag{7}$$

средните на Чезаро от ред $k, l \geqq 0$ са

$$\sigma_{k,l}(x,y)=\int_0^x\int_0^y \left(1-\frac{t}{x}\right)^k\left(1-\frac{\tau}{y}\right)^l f(t,\tau)dtd\tau.$$

Интеграла (7) наричаме абсолютно сумируем със средните на Чезаро от ред k, l, накъсо $|C, k, l|$-сумируем, ако интегралът

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |\sigma_{kl}(x, y)|\, dxdy$$

е сходящ, където $\sigma_{kl}(x, y)$ представлява интегралът

$$\sigma_{kl}(x, y) = klx^{-k-1}y^{-l-1}\int_0^x\int_0^y (x-t)^{k-1}(y-\tau)^{l-1}f(t, \tau)dtd\tau.$$

Лесно се вижда, че всеки абсолютно сходящ интеграл е и $|C, k, l|$-сумируем за всяко $k \geqq 0$ и $l \geqq 0$. По-общо имаме:

Ако един интеграл е $|C, k, l|$-сумируем, той е и $|C, k_1, l_1|$-сумируем за всяко $k_1 \geqq k$ и $l_1 \geqq l$.

Ако $k_1 = k+\alpha$, $l_1 = l+\beta$, като $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то по познат начин за простите интеграли получаваме формулата

$$(8)\quad \sigma_{k_1, l_1}(x, y) = \frac{\Gamma(k_1+1)\Gamma(l_1+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{-k_1-1}y^{-l_1-1}\int_0^x\int_0^y (x-t)^{\alpha-1}(y-\tau)^{\beta-1}t^{k+1}\tau^{l+1}\sigma_{kl}(t, \tau)dtd\tau.$$

Ако едно от числата α и β е равно на нула, например $\beta=0$, то предната формула трябва да заместим с формулата

$$(9)\quad \sigma_{k_1, l}(x, y) = \frac{\Gamma(k_1+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} x^{-k_1-1}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^{k+1}\sigma_{kl}(t, y)dt.$$

Но тогава от формулата (8) имаме

$$(10)\quad \begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty |\sigma_{k_1, l_1}(x, y)dxdy &\leqq L\int_0^\infty\int_0^\infty x^{-k_1-1}y^{-l_1-1}\, dxdy\\ &\times \int_0^x\int_0^y (x-t)^{\alpha-1}(y-\tau)^{\beta-1}t^{k+1}\tau^{l+1}|\sigma_{kl}(t, \tau)|dtd\tau,\end{aligned}$$

като за късота с L сме означили числото

$$L = \frac{\Gamma(k_1+1)\Gamma(l_1+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

От (10) със смяна на реда на интегриране получаваме

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |\sigma_{k_1, l_1}(x, y)|dxdy \leqq L\int_0^\infty\int_0^\infty t^{k+1}\tau^{l+1}|\sigma_{kl}(t, \tau)|\, dtd\tau$$

$$\times\int_t^\infty\int_\tau^\infty x^{-k_1-1}y^{-l_1-1}(x-t)^{k-1}(y-\tau)^{l-1}dtd\tau = LL'\int_0^\infty\int_0^\infty |\sigma_{kl}(t, \tau)|dtd\tau,$$

като L' означава числото

$$L' = \int_1^\infty u^{-k_1-1}(u-1)^{\alpha-1}du \int_1^\infty v^{-l_1-1}(v-1)^{\beta-1}dv = \frac{1}{L}$$

Следователно интегралът (7) е $|C, k_1, l_1|$-сумируем. Ако $\beta=0$, от (9) следва неравенството

$$\int_0^\infty |\sigma_{k_1, l}(x,y)|dx \leq \frac{\Gamma(k_1+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{-k_1-1}dx \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^{k+1}|\sigma_{kl}(t,y)|dt$$

$$= \frac{\Gamma(k_1+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{k+1} |\sigma_{kl}(t,y)|dt \int_t^\infty x^{-k_1-1}(x-t)^{\alpha-1}dx = \int_0^\infty |\sigma_{kl}(t,y)|dt,$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |\sigma_{k_1, l}(x,y)\,dxdy \leq \int_0^\infty\int_0^\infty |\sigma_{kl}(t,y)||dtdy$$

и доказателството се привършва.

За функцията

$$g(x,y) = \frac{1}{xy}\int_0^x\int_0^y t\tau f(t,\tau)dtd\tau \tag{11}$$

получаваме

$$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{1}{x^2y^2}\int_0^x\int_0^y t\tau f(t,\tau)dtd\tau - \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t,y)dt$$

$$-\frac{1}{y^2}\int_0^y \tau f(x,\tau)d\tau + f(x,y).$$

От друга страна, ако $h(x,y)$ означава функцията

$$h(x,y) = \int_0^x\int_0^y t\tau d_1 d_2[t\tau f(t,\tau)],$$

където диференциалът d_1 се отнася за променливото t, а d_2 за променливото τ, получаваме по формулата за интегриране по части израза

$$h(x,y) = \int_0^x\int_0^y t\tau f(t,\tau)dtd\tau - x^2\int_0^y \tau f(x,\tau)d\tau$$

$$y^2\int_0^x tf(t,y)dt - x^2y^2 f(x,y).$$

Като сравним горните два израза, заключаваме, че

$$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{h(x,y)}{x^2y^2} \tag{12}$$

Да разгледаме сега израза

$$I=\int_0^x\int_0^y[x^k-(x-t)^k][y^l-(y-\tau)^l]d_1d_2[t\tau f(t,\tau)].$$

С интегриране по части получаваме последователно

$$I=\int_0^y[y^l-(y-\tau)^l]\{x^{k+1}d_2[f(x,\tau)]$$

$$-k\int_0^x t(x-t)^{k-1}d_2[\tau f(t,\tau])\}dt$$

$$=x^{k+1}y^{l+1}f(x,y)-l\int_0^y\tau(y-\tau)^{l-1}f(x,\tau)d\tau$$

$$-k\int_0^x t(x-t)^k\{y^{l+1}f(t,y)-l\int_0^y\tau(y-\tau)^{l-1}f(t,\tau)\}dtd\tau \tag{13}$$

$$=x^{k+1}y^{l+1}f(x,y)-ky^{l+1}\int_0^x t(x-t)^{k-1}f(t,y)dt$$

$$-lx^{k+1}\int_0^y\tau(y-\tau)^{l-1}f(x,\tau)d\tau+kl\int_0^x\int_0^y t\tau(x-t)^{k-1}(y-\tau)^{l-1}f(t,\tau)dtd\tau.$$

Но

$$k\int_0^x(x-t)^{k-1}tf(t,y)dt=x^{k+1}f(x,y)-\int_0^x[x^k-(x-t)^k]d_1[tf(t,y)],$$

$$l\int_0^y(y-\tau)^{l-1}\tau f(x,\tau)d\tau=y^{l+1}f(x,y)$$

$$-\int_0^y[y^l-(y-\tau)^l]d_2[\tau f(x,\tau)]$$

и от (13) със съответни замествания получаваме

$$\sigma_{kl}(x,y)-f(x,y)=\frac{I}{x^{k+1}y^{l+1}}$$

$$-x^{-k-1}\int_0^x[x^k-(x-t)^k]d_1[tf(t,y)]- \tag{14}$$

$$y^{-l-1}\int_0^y[y^l-(y-\tau)^l]d_2[\tau f(x,\tau)].$$

Ако $g(x,y)$ означава функцията (11) и $g_1(x,y)$ и $g_2(x,y)$ са функциите

$$g_1(x,y)=\frac{1}{x}\int_0^x tf(t,y)dt,\qquad g_2(x,y)=\frac{1}{y}\int_0^y\tau f(x,\tau)d\tau,$$

предполагаме, че интегралите

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left|\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y}\right| dxdy, \tag{15}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left|\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}\right| dxdy, \quad \int_0^\infty\int_0^\infty \left|\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}\right| dxdy \tag{16}$$

са сходящи. Тогава съгласно равенството (12) интегралът

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |h(x,y)| \frac{dxdy}{x^2y^2}$$

ще бъде сходящ и на основание на равенството от работата [4] също интегралите

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dxdy}{x^2}\left|\int_0^x td_1[tf(t,y)]\right|, \quad \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dxdy}{y^2}\left|\int_0^y \tau d_2[\tau f(x,\tau)]\right|$$

ще бъдат сходящи. Тогава, като следваме напълно аналогичен начин на този, който приложихме при доказване на теоремите 2 и 6, установяваме, че интегралът

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |f(x,y)-\sigma_{kl}(x,y)| dxdy$$

е сходящ. Следователно съществува

Теорема 7. *Ако интегралите* (15) *и* (16) *са сходящи, то интегралът*

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |f(x,y)-\sigma_{kl}(x,y)| dxdy$$

е също сходящ.

Предполагаме, че числата k и l са цели. Като следствие получаваме следната теорема от Тауберов характер:

Теорема 8. *Ако двойният интеграл*

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)dxdy \tag{17}$$

е абсолютно сумируем от някой ред със средните на Чезаро и интегралите (15), (16) *са сходящи, даденият интеграл е абсолютно сходящ.*

Ще забележим, че подобно на редовете лесно се вижда, че от абсолютната сходимост на интеграла (17) следва сходимостта на интегралите (15) и (16), т. е. в известен смисъл условията в горната теорема са необходими. Лесно се установява и подобна теорема на теоремата 5.

4. Абсолютно сумиране на двойните редове с метода на Абел

Редът

$$\sum_{n=0}^\infty u_n \tag{1}$$

се нарича сумируем с метода на Абел, накъсо A-сумируем, със сума s, ако редът

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$$

е сходящ за $0\leqq x<1$ и сумата му $f(x)$ клони към границата s, когато x клони към 1, растейки. По аналогия на дефиницията за абсолютното сумиране с типичните средни, което въведох (работи 1 и 2), казваме по Уитекер (1931 г.), че редът (1) е абсолютно сумируем с метода на Абел, накъсо $|A|$-сумируем, ако функцията $f(x)$ е с ограничена вариация в интервала $(0, 1)$, т. е. интегралът

$$\int_0^1 |f'(x)|\, dx$$

съществува. Всеки абсолютно сходящ ред или по-общо всеки $|C, k|$-сумируем ред е и $|A|$-сумируем.

За един двоен ред

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}u_{nm}$$

ще казваме, че е абсолютно сумируем с метода на Абел, накъсо $|A|$-сумируем, ако редовете

$$(3)\qquad \varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n0}x^n,\qquad \psi(y)=\sum_{m=0}^{\infty}u_{0m}y^m$$

са сходящи съответно за $0\leqq x<1$, $0\leqq y<1$ и редът

$$(4)\qquad f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{nm}x^n y^m$$

е сходящ за $0\leqq x<1$, $0\leqq y<1$, като интегралите

$$(5)\qquad \int_0^1|\varphi'(x)|\,dx,\quad \int_0^1|\psi'(y)|\,dy$$

$$(6)\qquad \int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|dx\,dy$$

съществуват. Ще докажем следното основно свойство:

Ако двойният ред (2) е $|C, k, l|$*-сумируем за някои k и l, то той е и $|A|$-сумируем.*

Ще забележим, че от $|C, k, l|$-сумируемостта на реда (2) следва подобно на случая на прости редове, че

$$u_{nm}=O[(n+1)^k(m+1)^l].$$

Следователно редовете (3), (4) са абсолютно сходящи за $|x|<1$, $|y|<1$, както и редовете, получени от тях с почленно диференциране. Съществуването на интегралите (5) следва на основание на позната теорема за простите редове. За интеграла (6) използуваме изведеното преди тъждество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} nmu_{nm}x^{n-1}y^{m-1}=(1-x)^k(1-y)^l\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} nmA_n^kA_m^l\sigma_{nm}^{kl}x^{n-1}y^{m-1},$$

валидно в случая за $|x|<1$, $|y|<1$. За тези стойности на x и y имаме

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} nmu_{nm}x^{n-1}y^{m-1}.$$

Следователно за двойния интеграл в областта $0\leq x\leq x_1<1$, $0\leq v\leq y_1<1$ ще имаме

$$\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|dxdy \tag{7}$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} nmA_n^kA_m^l|\sigma_{nm}^{kl}|\int_B^{x_1}\int_0^{y_1}(1-x)^k(1-y)^l x^{n-1}y^{m-1}dxdy.$$

Понеже

$$\int^{x_1}(1-x)^k x^{n-1}dx<\int_0^1(1-x)^n x^{n-1}dx=\frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n)}$$

от (7) следва, че

$$\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|dxdy\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\sigma_{nm}^{kl}|$$

и оттук получаваме

$$\int_0^1\int_B^1\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|dxdy\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\sigma_{nm}^{kl}|,$$

с което сходимостта на интеграла (6) е установена.

В следваща работа ще изследваме въпроса за Тауберови теореми за това сумиране.

Постъпила на 10. I. 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

Obrechkoff, N.

1. Sur la sommation absolue des séries de Dirichlet, C. R. Acad. Sci. Paris, 186 (1928), 215—217.
2. Über die absolute Summierung der Dirichletschen Reihen, Math. Zeitshr., 30 (1929), 375—386.
3. Sulla sommazione assoluta degli integrali colle medie di Cesaro, Atti Acad. naz. Lincei Rend., Roma, Cl. Sci. fis. mat. nat. (6), 29 (1939), 31—34.

Zeller, K.

Theorie der Limitierungsverfahren, Berlin-Cöttingen-Heidelberg, 1958. Тук е даден подробен списък на трудовете на И. И. Огиевицкий, М. Ф. Тиман, В. Г. Челидзе, Н. Р. Тевцадзе и др. по сумиране на двойните редове.

Обрешков, Н.

4. Върху абсолютното сумиране на разходящите редове с аритметичните средни, Известия на Математическия институт при БАН, том III, книга II (1959), 39—58.

О ДВОЙНЫХ РЯДАХ, АБСОЛЮТНО СУММИРУЕМЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИМИ СРЕДНИМИ

Н. Обрешков

(Резюме)

В этой работе устанавливается следующая теорема:

1. *Предположим, что члены двойного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nm} \tag{1}$$

удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\Delta_1\Delta_2\left(\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\mu\nu u_{\mu\nu}\right)\right|<\infty,$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\Delta_1\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=1}^{n}\mu u_{\mu m}\right)\right|<\infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\Delta_2\left(\frac{1}{m+1}\sum_{\nu=1}^{m}\nu u_{n\nu}\right)\right|<\infty,$$

где введены обозначения

$$\Delta_1 a_{nm}=a_{nm}-a_{n-1,\,m},\quad \Delta_2 a_{nm}=a_{nm}-a_{n,\,m-1},$$

$$\Delta_1\Delta_2 a_{nm}=a_{nm}-a_{n-1,m}-a_{n,\,m-1}+a_{n-1,\,m-1}.$$

В таком случае, если

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{nm}^{kl}$$

является (C, k, l) трансформированным рядом ряда (1), то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(\sigma_{nm}^{kl}-u_{nm})$$

абсолютно сходится.

Как следствие получается теорема:

2. *Если ряды* (2) *сходятся и ряд* (1) *абсолютно суммируется арифметическими средними некоторого порядка* (k, l), *то ряд* (1) *сходится абсолютно.*

Если ряд (1) сходится абсолютно, то ряды (2) сходятся. Это свойство показывает, что в известном смысле условия в теореме 1 необходимы. Даны и некоторые более простые условия, которые ведут к сходимости рядов (2). Определяется также абсолютное суммирование интегралов средними Чезаро и устанавливаются подобные теоремы.

SUR LES SÉRIES DOUBLES, ABSOLUMENT SOMMABLES PAR LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES

N. Obrechkoff

(Résumé)

Dans ce travail l'auteur démontre le théorème suivant:
1. Soit donnée la série double

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}$$

et supposons que les termes u_{nm} satisfont aux conditions suivantes: En désignant par

$$\Delta_1 a_{nm} = a_{nm} - a_{n-1,m}, \quad \Delta_2 a_{nm} = a_{nm} - a_{n,m-1},$$
$$\Delta_1\Delta_2 a_{nm} = a_{nm} - a_{n-1,m} - a_{n,m-1} + a_{n-1,m-1},$$

les différences premières supposons que les séries

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left| \Delta_1\Delta_2 \left[\frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m} \mu\nu u_{\mu\nu} \right] \right|,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left| \Delta_1 \left(\frac{1}{n+1} \sum_{\mu=1}^{n} \mu u_{\mu m} \right) \right|, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left| \Delta_2 \left(\frac{1}{m+1} \sum_{\nu=1}^{m} \nu u_{n\nu} \right) \right|$$

sont convergentes. Alors si $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{nm}^{kl}$ est la série transformée de la serie (1), la série

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(\sigma_{nm}^{kl} - u_{nm})$$

est absolument convergente

En particulier si les séries (2) sont convergentes et la série (1) est absolument sommable par les moyennes arithmétiques d'un ordre (k, l) la série donnée (1) sera absolument convergente.

Si la série (1) est absolument convergente, les séries (2) seront convergentes. Cette propriété montre que les conditions dans l'énoncé du théorème 1. sont aussi nécessaires.

Des théorèm s semblables sont aussi démontrés par les intégrales.