БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ ТОМ VI

ВЪРХУ ЕДНА ТЕОРЕМА НА Н. ОБРЕШКОВ

Кирил Дочев

В своята работа [1] Н. Обрешков доказва следното твърдение:

Ако $f(z)$ е полином от n-та степен със само реални нули и числата ρ и φ са подчинени на условията $\rho>0$ и $|\sin\varphi|\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}$, корените на уравнението

$$f''(z)-2\rho\cos\varphi f'(z)+\rho^2 f(z)=0 \tag{1}$$

са реални. При това, ако $|\sin\varphi|<n^{-\frac{1}{2}}$, всеки многократен корен на (1) *е многократна нула на $f(z)$.*

В същата работа е прецизирана известната теорема на Пулен-Хермит, като чрез последователно прилагане на горното твърдение е доказана следната

Теорема (Н. Обрешков). *Ако полиномът*

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,\quad a_0\neq 0 \tag{2}$$

има само реални нули и ако $g(z)$ е реален полином, чиито нули лежат в ъгловото пространство

$$|\sin\varphi|\leqq\frac{1}{\sqrt{n}},\quad \varphi=\arg z, \tag{3}$$

полиномът

$$g\left(\frac{d}{dz}\right)f(z) \tag{4}$$

има само реални нули. Ако в (3) *е в сила знак на неравенство, то всяка многократна нула на* (4) *е такава и на* (2).

В настоящото съобщение даваме ново доказателство на горната теорема, което се основава на известни твърдения от геометрия на нулите и дава възможност за някои обобщения. Методът на доказателство позволява подобно на теоремата на Пулен-Хермит да бъде прецизирана и друга една известна теорема, дължаща се на Лагер.

Основна роля в нашите разсъждения ще играе следната

Лема. *Ако при някое ζ е в сила равенство от вида*

$$Af''(\zeta)+Bf'(\zeta)+Cf(\zeta)=0,\ C\neq 0 \tag{5}$$

и a, b означават корените на квадратното уравнение

$$Cz^2 - nBz + n(n-1)A = 0, \tag{6}$$

то във всяка кръгова област, съдържаща точките

$$\zeta, \zeta + a, \zeta + b, \tag{7}$$

има поне една нула на $f(z)$.

Въпреки че в геометрия на нулите (вж. [3]) са известни по-общи резултати, така формулираната лема ще бъде достатъчна за нашите цели и ние ще приведем нейното доказателство, основаващо се на теоремата на Грейс[1]. И така вследствие на равенствата $C(a+b) = nB$, $Cab = n(n-1)A$ и (5) ще имаме $0 = abf''(\zeta) + (n-1)(a+b)f'(\zeta) + n(n-1)f(\zeta)$. От последното равенство се вижда, че двата полинома $\varphi(z) = f(z+\zeta)$ и $\psi(z) = z^n - (a+b)z^{n-1} + abz^{n-2}$ са аполарни и следователно според теоремата на Грейс всяка кръгова област, която съдържа точките $z=0$, $z=a$ и $z=b$, ще съдържа поне една нула на $\varphi(z)$. Но тъй като имаме $f(z) \equiv \varphi(z-\zeta)$, във всяка кръгова област, съдържаща точките ζ, $\zeta + a$ и $\zeta + b$, ще има поне една нула на $f(z)$. С това лемата е доказана.

Сега ще докажем цитираната в началото теорема на Н. Обрешков в следната по-обща форма, като заменим изискването нулите на $f(z)$ да са реални с условието те да лежат в една ивица с успоредни на реалната ос ограничителни прави.

Теорема 1. *Нека всички нули на полинома* (2) *да лежат в ивицата*

$$H = \{z;\ \alpha \leqq I_m(z) \leqq \beta\} \tag{8}$$

и аргументите на нулите на реалния полином $g(z)$ да удовлетворяват условието (3). *Тогава всички нули на полинома* (4) *лежат също в H. Ако в* (3) *имаме знак на неравенство и някоя гранична точка на H е многократна нула на* (4), *същата точка е многократна нула на* (2).

Доказателство. Също както това е направено в [1] и тук е достатъчно да бъдат разгледани двата частни случая, когато $g(z)$ е полином от първа и съответно от втора степен, защото общият случай се свежда до тяхното последователно прилагане. Ако $g(z)$ е реален полином от първа степен, теоремата е почти очевидна. Наистина при $g(z) = z - \gamma$, γ — реално число, уравнението $g\left(\frac{d}{dz}\right) f(z) = 0$ добива вида $f'(z) - \gamma f(z) = 0$. Твърдението е, че всички корени на това уравнение лежат в H и това може да се докаже по същия начин, по който обикновено се доказва теоремата на Гаус—Люка. Като се следва също така добре известен начин на доказване, може да се покаже, че горното твърдение е и непосредствено следствие от инвариантната формулировка на теоремата на Гаус—Люка—теоремата на Лагер. Наистина, ако се направи допускането, че $f'(\zeta) - \gamma f(\zeta) = 0$ и $\zeta \bar{\in} H$, би следвало, че всяка кръгова област, която съдържа точките ζ и $\zeta' = \zeta - nf(\zeta)/f'(\zeta) = \zeta - \frac{n}{\gamma}$, трябва да съдържа поне една нула на $f(z)$. Последното обаче, както е лесно да се съобрази, води

[1] Както ми обърна внимание акад. Н. Обрешков, тази лема може да се докаже по-директно с помощта на класическата теорема на Лагер, посредством която обикновено се доказва теоремата на Грейс.

до противоречие със споменатата теорема на Лагер. Освен това лесно се вижда, че уравнението $f'(z)-\gamma f(z)=0$ може да има корен върху правата $I_m(z)=\alpha$ ($I_m(z)=\beta$) само когато всички нули на $f(z)$ са по тази права. Ако всички нули на $f(z)$ лежат по една права, успоредна на реалната ос (без ограничение на общността можем да предполагаме, че тя съвпада с реалната ос), според класическата теорема на Пулен-Хермит всяка многократна нула на (4) е многократна нула и на (2).

Да разгледаме сега по-интересния случай, когато $g(z)$ е реален квадратен тричлен от вида

$$g(z)=z^2-2\rho\cos\varphi z+\rho^2, \tag{9}$$

където $\rho>0$ и за φ е изпълнено равносилното с (3) неравенство

$$\cos^2\varphi\geqq\frac{n-1}{n}. \tag{10}$$

Трябва да докажем, че всички нули на полинома

$$\delta(z)=g\left(\frac{d}{dz}\right)f(z)=f''(z)-2\rho\cos\varphi f'(z)+\rho^2 f(z) \tag{11}$$

лежат в H. Да допуснем противното, а именно, че съществува точка $\zeta\bar{\in} H$, за която е в сила равенството

$$f''(\zeta)-2\rho\cos\varphi f'(\zeta)+\rho^2 f(\zeta)=0, \tag{12}$$

и да приложим доказаната в началото лема. Квадратното уравнение (6) в случая изглежда така:

$$\rho^2 z^2+2n\rho\cos\varphi z+n(n-1)=0. \tag{13}$$

Очевидно (10) изразява условието (13) да има реални корени. Нека реалните числа a и b да означават корените на (13); тогава според въпросната лема би трябвало във всяка кръгова област, която съдържа точките ζ, $\zeta+a$ и $\zeta+b$, да има поне една нула на $f(z)$. Последното обаче, както лесно се вижда, води до противоречие.

Нека сега да допуснем, че x_0 е многократна нула на $\delta(z)$, x_0 е гранична точка за H и $\cos^2\varphi>(n-1)/n$. За определеност да предположим, че $I_m(x_0)=\beta$. Ще докажем, че x_0 е нула на $f(z)$. Да допуснем противното, а именно $f(x_0)\neq 0$. Очевидно при $\zeta\to x_0$ ще имаме $\delta(\zeta)\approx L(\zeta-x_0)^k$, където $L=\text{const.}\neq 0$, $k>1$. Вместо (12) ще използуваме тъждеството

$$0=f''(\zeta)-2\rho\cos\varphi f'(\zeta)+\rho^2 f(\zeta).\Theta(\zeta), \tag{14}$$

където за величината $\Theta(\zeta)=1-\frac{\delta(\zeta)}{\rho^2 f(\zeta)}$ при $\zeta\to x_0$ имаме $\Theta(\zeta)\approx 1+$ $+M(\zeta-x_0)^k$, $M=\text{const.}$ На (14) ще съответствува квадратното уравнение

$$\Theta(\zeta)z^2+\frac{2n}{\rho}\cos\varphi z+\frac{n(n-1)}{\rho^2}=0. \tag{15}$$

По-нататък ще се възползуваме от следната почти очевидна забележка:

Ако квадратното уравнение $z^2+pz+q=0$ (p, q — константи) има различни корени a и b, т. е. $p^2-4q\neq 0$, корените $z_1(\lambda)$ и $z_2(\lambda)$ на уравнението $\Theta(\lambda)z^2+pz+q=0$, където $\Theta(\lambda)\approx 1+\lambda$ при $\lambda\to 0$, имат съответно вида $z_1(\lambda) \approx a+C_1\lambda$, $z_2(\lambda) \approx b+C_2\lambda$ (C_1, C_2—константи). Аналогично твърдение е в сила и за корените на уравнението $z^2+pz+q\,.\,\Theta(\lambda)=0$.

На доказателството не ще се спираме, тъй като се свежда до непосредствена проверка.

По условие квадратното уравнение (13) има два различни корена a и b. Според направената току-що забележка корените на уравнението (15) ще имат при $\zeta \to x_0$ вида $z_1(\zeta) \approx a+C'(\zeta-x_0)^k$, $z_2(\zeta) \approx b+C''(\zeta-x_0)^k$ (C', C''—константи, $k>1$). Да положим $\zeta=x_0+i\eta$, $\eta>0$ и да разгледаме точките $\zeta=x_0+i\eta$, $\zeta+z_1(\zeta)$, $\zeta+z_2(\zeta)$. От направените разсъждения се вижда, че при достатъчно малки стойности на положителния параметър η горните три точки имат имагинерни части $>\beta$, което означава, че те лежат извън ивицата H и следователно са отделими от H, т. е. съществува кръгова област, която ги съдържа и няма общи точки с H. Последното обаче противоречи на доказаната в началото лема. И така необходимо е да имаме $f(x_0)=0$. По подобен начин се доказва, че $f''(x_0)=0$. Очевидно от равенствата $f(x_0)=f''(x_0)=0$ и $\delta(x_0)=0$ следва $f'(x_0)=0$. Следователно x_0 е многократна нула на $f(z)$. С това теорема 1 е доказана.

Теорема 2. *Нека всички нули на полинома $f(z)$ да лежат в едно изпъкнало множество D, съдържащо поне един лъч, еднопосочен с положителната реална полуос, и нулите на реалния полином $g(z)$ да лежат в ъгъла, определен от неравенствата*

$$\sin\varphi \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\varphi \leqq 0 \quad (\varphi=\arg z).$$

Тогава всички нули на полинома $g\left(\frac{d}{dz}\right)f(z)$ лежат също в D.

Доказателството на горната теорема се извършва по същия начин както при теорема 1, като се вземе пред вид, че в случая на полином от първа степен $g(z)=z-\gamma$ ще имаме по условие $\gamma < 0$ и точките ζ и $\zeta'=\zeta-n\gamma^{-1}$ ($\zeta \in D$) са отделими от D, а в случая на квадратен тричлен от вида (9) корените на квадратното уравнение (13) според условието на теорема 2, освен че са реални, са и отрицателни и вследствие на това трите точки от (7) при $\zeta \in D$ също са отделими от D.

Доказаната в началото лема може да бъде използувана с успех и в други случаи, подобни на разгледаните по-горе. Следващите разглеждания имат за цел да изтъкнат още един пример в това направление.

Да предположим, че всички нули на полинома

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

лежат в едно изпъкнало множество R, съдържащо точката $z=0$. С γ да означим произволно отрицателно число. Да разгледаме полинома

$$\varphi_\gamma(z)=-\gamma f(z)+zf'(z). \tag{16}$$

С оглед на следващото обобщение ще запишем този полином във вида

$$\varphi_\gamma(z)=a_0F(0)+a_1F(1)z+a_2F(2)z^2+\cdots+a_nF(n)z^n \quad F(z)=z-\gamma.$$

Лесно може да се докаже, че нулите на (16) лежат също в R. Наистина ако допуснем, че $\zeta \in R$ и $-\gamma f(\zeta)+\zeta f'(\zeta)=0$, според теоремата на Лагер би трябвало всяка кръгова област, която съдържа точките ζ и $\zeta' = \zeta - \frac{nf(\zeta)}{f'(\zeta)} = \zeta\left(1 - \frac{n}{\gamma}\right)$, да съдържа поне една нула на $f(z)$, но последното води до противоречие, защото е лесно да се съобрази, че двете точки ζ и ζ' са отделими от R.

Нека сега $\alpha = \xi + i\eta$ да е комплексно число, което допълнително ще бъде подчинено на известни ограничения, и да разгледаме полинома

$$\psi(z) = -\bar{\alpha}\varphi_\alpha(z) + z\varphi_\alpha'(z) = \alpha\bar{\alpha}f(z) + (1 - \alpha - \bar{\alpha})zf'(z) + z^2 f''(z).$$

Да приложим нашата лема при условие, че ζ е произволна нула на $\psi(z)$, т. е.

$$\alpha\bar{\alpha}f(\zeta) + (1 - \alpha - \bar{\alpha})\zeta f'(\zeta) + \zeta^2 f''(\zeta) = 0.$$

Квадратното уравнение (6) в случая изглежда така:

$$\alpha\bar{\alpha}z^2 + n(\alpha + \bar{\alpha} - 1)\zeta z + n(n-1)\zeta^2 = 0. \tag{17}$$

Очевидно корените на (17), да ги означим с a и b, ще имат вида $a = \mu_1\zeta$, $b = \mu_2\zeta$, където μ_1 и μ_2 са корените на квадратното уравнение

$$\alpha\bar{\alpha}\mu^2 + n(\alpha + \bar{\alpha} - 1)\mu + n(n-1) = 0. \tag{18}$$

Ограничението, на което ще подчиним комплексното число $\alpha = \xi + i\eta$, се състои в това, че ще изискваме корените на (18) да бъдат положителни. За тази цел е необходимо и достатъчно да бъдат в сила условията

$$n(1 - \alpha - \bar{\alpha})^2 \geqq 4(n-1)\alpha\bar{\alpha}, \tag{19}$$

$$1 - \alpha - \bar{\alpha} \geqq 0. \tag{20}$$

Тези неравенства могат да се запишат още и така:

$$\left(\xi - \frac{n}{2}\right)^2 - (n-1)\eta^2 \geqq \frac{n(n-1)}{4} \tag{19'}$$

$$\xi \leqq \frac{1}{2} \tag{20'}$$

По такъв начин лесно се вижда, че ако числото $\alpha = \xi + i\eta$ удовлетворява на условията (19') и (20'), всички корени на уравнението $\psi(z) = 0$ лежат в R. Наистина в противен случай бихме дошли до противоречие с лемата, защото при $\xi \bar{\in} R$ трите точки ζ, $\zeta + a = \zeta(1 + \mu_1)$, $\zeta + b = \zeta(1 + \mu_2)$ ($\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$), както е лесно да се съобрази, са отделими от R.

Да отбележим, че уравнението $\psi(z) = 0$ може да се запише във вида

$$a_0F(0) + a_1F(1)z + a_2F(2)z^2 + \cdots + a_nF(n)^nz = 0,$$

където

$$F(z) = z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}.$$

Да означим с Q множеството, ограничено от левия клон на хиперболата

$$\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 - (n-1)y^2 = \frac{n(n-1)}{4} \tag{21}$$

и съдържащо отрицателната реална полуос. Не е трудно да се провери, че сечението на Q с реалната ос се съдържа в интервала $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$, така че за точките $\alpha \in Q$ неравенството (20′) е следствие от (19′).

Обобщавайки резултатите от направените разсъждения, лесно достигаме до следната

Теорема 3. *Нека* $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ *е полином от степен n и всичките му нули да лежат в едно изпъкнало множество* R, *съдържащо точката* $z=0$. *Ако* $F(z)$ *е реален полином, на който реалните нули от нечетна кратност са отрицателни, а останалите лежат в* Q, *всички корени на уравнението*

$$a_0F(0)+a_1F(1)z+a_2F(2)z^2+\cdots+a_nF(n)z^n=0 \tag{22}$$

лежат в R.

Последната теорема може да се разглежда като обобщение на следното твърдение, произтичащо от една известна теорема на Лагер (вж. напр. [2], 227).

Ако $F(z)$ има само реални отрицателни нули и полиномът $f(z)$ има само реални нули, всички корени на уравнението (22) са също реални.

Постъпила на 16. I. 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Обрешков, Върху някои теореми за нулите на реалните полиноми. *Известия на Мат. инст.*, т. IV, кн. 2, 1960, 17—41.
[2] Н. Обрешков, Висша алгебра. София, „Наука и искуство", 1954.
[3] M. Marden, The Geometry of the Zeros. New York, American Mathematical Society, 1949.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Н. ОБРЕШКОВА

К. Дочев

(Резюме)

В настоящей работе дается новое доказательство результата Н. Обрешкова [1] относительно классической теоремы Пулена-Эрмита. Доказательство основывается на известных утверждениях из геометрии нулей многочленов и допускает обобщения. Метод доказательства дает также возможность уточнить одну теорему Лагерра.

SUR UN THÉORÈME DE N. OBRECHKOFF

K. Dočev

(Résumé)

L'auteur donne une nouvelle démonstration d'un résultat, obtenu par N. Obrechkoff [1], concernant le théorème classique de Poulain-Hermite. La démonstration s'appuie sur certaines propositions de la géométrie des zéros des polynômes et admet des généralisations. La méthode de démonstration permet également de préciser le théorème de Laguerre.