БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ ТОМ VI

ГЕОМЕТРИЧНИ ТЪЛКУВАНИЯ НА НЯКОИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ИНВАРИАНТИ НА РОЕВЕ ПРАВИ В ДВУОСНАТА ГЕОМЕТРИЯ

Грозьо Станилов

Нека в реалното триизмеримо проективно пространство P_3 са дадени две реални кръстосани прави j и k. Онези фигури, величини, свойства и т. н., които са инвариантни при произволна колинеация, запазваща тези прави, съставляват съдържанието на двуосната геометрия. В редица свои работи проф. Б. Петканчин изследва различни типове роеве прави в тази геометрия. Като използуваме понятия, означения и резултати от цитираните работи [1], [2], [3], ние ще дадем геометрични тълкувания на някои диференциални инварианти, характеризиращи параболични, елиптични и изотропни роеве прави в двуосната геометрия.

Параболичен рой. Формулите на Френе за параболичен рой прави в двуосната геометрия са

$$x' = \omega u, \qquad y' = y + \omega v,$$

$$u' = \frac{L}{\omega} x, \qquad v' = \frac{M}{\omega} y + v.$$

Величините L, M са абсолютни диференциални инварианти на роя, чиято произволна права $g(s)$ е представена параметрично във функция от специалния параметър s, посредством специалните двойки точки (основни точки) $I = (x, y)$, $II = (u, v)$ (стр. 75 от [1]).

Тъй като основните точки (x, y), (u, v) са инвариантно свързани с роя поради избора на специалния параметър s и освен това са възможни пренормирания само с постоянни коефициенти, следва, че точките (x', y'), (u', v') са също инвариантно свързани с роя. Същото може да се каже и за всички геометрични обекти точки, прави и равнини, определени чрез тях.

Разглеждаме правата a, определена от точките $(x, 0)$, (x', y'). Тя има следното параметрично представяне:

$$a: \begin{array}{l} \xi = \lambda x + \mu x' = \lambda' x + \mu\omega u \\ \eta = \lambda . 0 + \mu y' = \mu(y + \omega v) \end{array}$$

От друга страна, правата $g(s)$ от роя има представяне

$$g: \begin{array}{l} \xi = \lambda' x + \mu' u \\ \eta = \lambda' y + \mu' v \end{array}$$

Търсим общите точки на тези две прави. За целта решаваме системата

$$\lambda x + \mu\omega u = (\lambda' x + \mu' u)\,\rho$$
$$\mu(y + \omega v) = (\lambda' y + \mu' v)\,.\,\sigma$$

относно параметрите λ, μ, λ', μ'. Чрез приравняване на коефициентите получаваме

$$\lambda = \rho\lambda' \qquad\qquad \mu = \sigma\lambda'$$
$$\mu\omega = \rho\mu',\ \rho \neq 0 \qquad\qquad \mu\omega = \sigma\mu',\ \sigma \neq 0$$

Тъй като $\omega \neq 0$, следва $\rho = \sigma$. Тогава

$$\lambda = \mu = \rho\lambda', \qquad\qquad \mu\omega = \rho\mu'.$$

Сигурно $\lambda' \neq 0$, защото иначе би следвало $\lambda = \mu = 0$, което е невъзможно. Поради това, че работим с хомогенни параметри, вземаме $\rho = 1$, $\lambda' = 1$ и получаваме

$$\lambda = \mu = 1,\ \lambda' = 1,\ \mu' = \omega.$$

Оказва се, че двете прави имат точно една обща точка P и тя има следното представяне

$$P = (a \times g) = (x + \omega u,\ y + \omega v).$$

По-нататък разглеждаме равнината δ, която минава през правата $g(s)$ и точката (u', v'). В текущи координати X, Y тя има уравнение

$$\delta = \begin{vmatrix} X & Y \\ x & y \\ u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = 0$$

Развиваме детерминантата по правилото на Лаплас, като при опростяване ползуваме формулите на Френе. Получаваме

$$\delta = \frac{L - M}{\omega}[Xx\,.\,yv - xu\,.\,Yy] + xu\,.\,Yv - Xu\,.\,yv = 0.$$

Безкрайната права на тази равнина ще получим, като поставим $X = 0$, след това $Y = 0$. Ако $X = 0$, получаваме

$$-\frac{L - M}{\omega} xu\,.\,Yy + xu\,.\,Yv = 0,$$

поради $xu \neq 0$ следва

$$Y\left(v + \frac{M - L}{\omega}\,y\right) = 0,$$

т. е.

$$Y = \frac{M - L}{\omega}y + v.$$

Ако сега положим $Y = 0$, получаваме

$$X = \frac{M - L}{\omega}\,x + u.$$

Тогава пресечните точки на равнината δ с първата абсолютна права j, съответно с втората абсолютна права k, имат представяния

$$A=\left(\frac{M-L}{\omega}x+u, 0\right); \qquad B=\left(0, \frac{M-L}{\omega}y+v\right).$$

Безкрайната права на δ има следното параметрично представяне:

$$AB: \quad \begin{aligned} \xi &= \lambda''\left(\frac{M-L}{\omega}x+u\right) \\ \eta &= \mu''\left(\frac{M-L}{\omega}y+v\right) \end{aligned}$$

За двете прави AB и $g(s)$ се оказва, че имат точно една обща точка Q, която намираме, както по-горе. Получава се

$$Q=\left(\frac{M-L}{\omega}x+u, \quad \frac{M-L}{\omega}y+v\right).$$

Така получихме върху правата $g(s)$ от роя четири точки: основните точки $I=(x, y)$, $II=(u, v)$ и намерените P, Q, които могат да се представят така:

$$P=1 \,.\, I+\omega \,.\, II,$$

$$Q=\frac{M-L}{\omega}I+1 \,.\, II.$$

За двойното отношение на тези четири точки получаваме

$$1) \qquad \Delta=(I, II, P, Q)=M-L$$

и това представлява едно тълкуване на инвариантата $M-L$.

Елиптичен рой. Сега формулите на Френе за роя са

$$x'=(B+1)\varphi \,.\, u, \qquad y'=f \,.\, y+B\varphi \,.\, v,$$

$$u'=\frac{A-1}{\varphi}\cdot x, \qquad v'=\frac{A}{\varphi}\cdot y+f \,.\, v.$$

Тук величините A, B, f са абсолютни диференциални инварианти на роя, като f само си мени знака при пренормиране на точките (стр. 152, [2]).

Разглеждаме двойното отношение на четирите точки върху втората абсолютна права k: $(0, y)$, $(0, v)$,

$$(0, y')=f(0, y)+B\varphi\,(0, v),$$

$$(0, v')=\frac{A}{f}(0, y)+f(0, v).$$

За него получаваме

$$\Delta_1=[(0, y), (0, v), (0, y'), (0, v')]=\frac{AB}{f^2}.$$

Правата, определена от точките (u, v), (x', y'), има параметрично представяне

$$\xi=\lambda\,(B+1)\varphi \,.\, u+\mu \,.\, u,$$

$$\eta=\lambda\,(fy+B\varphi v)+\mu \,.\, v.$$

Търсим безкрайната ѝ точка R, т. е. пресечната ѝ точка с втората абсолютна права k. Полагаме $\xi=0$, или

$$\lambda(B+1)\varphi+\mu=0,$$

откъдето намираме $\lambda=-1$, $\mu=(B+1)\varphi$ и за R получаваме

$$R=(0,-f\,y+\varphi\,v).$$

Двойното отношение на точките $(0,\,y)$, $(0,\,v)$

$$R=-f(0,y)+\varphi(0,v)$$

$$(0,v')=\frac{A}{\varphi}\cdot(0,y)+f\cdot(0,v)$$

е

$$\Delta_2=[(0,y),(0,v),R,(0,v')]=-\frac{A}{f^2}\cdot$$

Тогава

$$B=-\frac{\Delta_1}{\Delta_2}. \tag{2}$$

Най-после разглеждаме правата, минаваща през точките $(x,\,y)$, $(u'\,v')$. Тя сече втората абсолютна права k в точка

$$Q=\left(0,\frac{1}{\varphi}\cdot y+f.v\right).$$

За двойното отношение на точките $(0,y),(0,v)$

$$Q=\frac{1}{\varphi}\cdot(0,y)+f(0,v)$$

$$R=-f.(0,y)+\varphi(0,v)$$

имаме

$$\Delta_3=[(0,y),(0,v),Q,R]=-f^2,$$

откъдето

$$f^2=-\Delta_3. \tag{3}$$

Оттук за А получаваме

$$A=\Delta_2\,.\,\Delta_3. \tag{4}$$

Формулите (2), (3) и (4) представляват тълкувания на диференциалните инварианти A,B,f чрез двойни отношения.

Изотропен рой. В този случай формулите на Френе за роя са

$$x'=\theta\,.\,e^{-3s}\,.\,u,$$

$$u'=\frac{1}{\theta}\cdot e^{3s}\,P.\,x+u,\qquad v''=Q\,.\,v\,,$$

като величините P, Q са абсолютни диференциални за роя, а θ е константа, различна от нула (стр. 79, от [3]).

За точката $(u'',\,v'')$ имаме следното представяне:

$$(u'',v'')=\left[\frac{e^{3s}}{\theta}\cdot(4P\quad P')x+(P+1)\cdot u,\ Qv\right]\cdot$$

Правата, която минава през точките (u, v), $(u'' v'')$, сече първата абсолютна права j в точката

$$T = \left[-\frac{e^{3s}}{\theta}(4P+P')x + (Q-P-1)\,u,\ 0 \right].$$

Двойното отношение на точките $(u'', 0), (x, 0), (u, o)$, T върху първата абсолютна права j е:

$$\Delta' = \frac{Q}{P+1} \tag{5}$$

и това представлява едно тълкуване на инвариантата $\frac{Q}{P+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин Б. Параболични роеве прави в двуосната геометрия, Год. на Соф. унив. Физ.-мат. фак., т. 49, 1954—1955, кн. 1 (мат. и физ.), ч. 1, стр. 48—84.
2. Петканчин Б. Върху елиптичните роеве прави в двуосната геометрия. Известия на Мат. институт при БАН, т. II, кн. 2, 1957, стр. 134—161.
3. Петканчин Б. Роеве изотропни прави в двуосната геометрия. Известия на Мат. институт при БАН, т. II, кн. 1, 1956, стр. 69—86.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЛКОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРЯМЫХ В БИАКСИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Г. Станилов

(Резюме)

В статье мы даем геометрические толкования (1), (2), (3), (4) и (5) некоторых дифференциальных инвариантов, характеризующих различные типы однопараметрических систем прямых в биаксиальной геометрии.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRÎQUES DE CERTAINS INVARIANTS DIFÉRENTIELS DE SYSTÈMES DE LIGNES DROITES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE DANS LA GÉOMÉTRIE À DEUX AXES

G. Stanilov

(Résumé)

L'auteur donne des interprétations géométriques (1), (2), (3), (4) et (5) de certains invariants différentiels qui caractérisent les divers types de systèmes de lignes droites dépendant d'un paramètre dans la géométrie à deux axes.