БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ ТОМ VI

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПРОЦЕССАМ ГИДРОДИНАМИКИ

Г. Георгиев (Яссы)

§ 1. При неустановившемся движении в гидродинамике или других областях механики сплошных сред рассматриваются, первым долгом, траектории частиц и линии тока этого движения. Если примем во внимание траектории всех частиц, проходящих в различные моменты через фиксированную точку M, то их касательные опишут полость конуса с вершиной в M. Это справедливо для каждой точки области, в которой протекает жидкость. Можно сказать, что нестационарное движение какой-либо жидкости происходит на многообразии локальных конусов скорости, при этом линии тока и траектории частиц будут допустимыми кривыми этого многообразия. Таким образом, исследование неустановившегося движения тесно переплетается с дифференциальной геометрией многообразия конусов эвклидового пространства.

Введение и систематическое использование метода подвижного ортогонального трёхгранника для исследования неустановившегося движения, сделанное профессором С. С. Бюшгенсом и автором этой заметки, связано с выбором подходящего репера для каждого случая течения жидкости, который сводит к минимуму компоненты, не имеющие физического или геометрического смысла. Я выразил условия интегрируемости нестационарных движений как для совершенных, так и для вязких жидкостей, разделив их на две группы, из коих одна содержит условия только геометрического характера. Эти условия дают возможность избежать исследования несуществующих движений и жидкостей и дают ответ на задачи существования движений, характеризуемых геометрически или кинематически. Некоторые из этих условий, выраженных подходящим образом, имеют простые геометрические истолкования.

Настоящая заметка является продолжением работы [9], ссылку на которую будем обозначать через (I). Она содержит некоторые соображения в связи с тензором деформации поля скорости, исследуя случай, когда его симметрическая часть равна нулю (§ 3). В § 4 устанавливаются внутренние связи между алгебраическими инвариантами тензора деформации и инвариантами поля скорости. Они получают простую геометрическую форму при винтовом или безвихревом течении жидкости. В следующих параграфах исследуются адиабатическое течение (§ 5), винтовое движение (§ 7), поперечное движение (§ 8), — преследуя цель установить для каждого случая условия допустимости, а также возможность и широту решения. Заметка заканчивается исследованием двух задач: а) неустановившегося движения несжимаемой вязкой жидкости, при котором $\bar{v}$, $\operatorname{rot}\bar{v}$, $\operatorname{rot}^2\bar{v}$ образуют в каждый момент триортогональную голономную систему (§ 9), и б) течения идеальной жидкости с полной энергией частиц, одинаковой для всех точек (§ 10) [5].

§ 2. Подвижной трёхгранник. Ассоциируем каждой точке M области, в которой происходит течение жидкости, и определённому моменту t ортонормированный трёхгранник с вершиной в M. Для элементарного перемещения dM и вариации времени dt имеем

$$dM=\omega^k I_k,\ dI_k=\bar{\omega}\times I_k,\ \text{где} \tag{1}$$

$$\bar{\omega}=pI_1+qI_2+rI_3,\ \text{в котором}$$

$$p=p_i\omega^i+p_t dt,\ q=q_i\omega^i+q_t dt,\ r=r_i\omega^i+r_t dt. \tag{2}$$

Если условимся обозначить через $\bar{p}=p_k I_k$ и т. д., то условия совместности, которым удовлетворяют введенные функции p_i, q_i, r_i, p_t, q_t, r_t $(i=1, 2, 3)$, из четырёх аргументов выводятся из уравнений структуры эвклидового пространства и будут

$$\operatorname{rot}\bar{p}+\bar{q}\times\bar{r}=0,\ \operatorname{rot}\bar{q}+\bar{r}\times p=0,\ \operatorname{rot} r+\bar{p}\times\bar{q}=0, \tag{3}$$

$$\dot{p}+q_t\bar{r}-r_t\bar{q}=\operatorname{grad} p_t,\ \dot{q}+r_t\, p-p_t\,\bar{r}=\operatorname{grad} q_t, \tag{4}$$

$$\dot{r}+p_t\, q-q_t\,\bar{p}=\operatorname{grad} r_t,$$

в которых $\dot{\bar{p}}=\frac{\partial p_k}{\partial t}I+p_k\frac{\partial I_k}{\partial t}$, $\frac{\partial I_1}{\partial t}=I_2 r_t-I_3 q_t$, и т. д.

Если поле скорости будет $\bar{V}(M,t)$ и выберем сопровождающий трёхгранник так, чтобы $\bar{V}=VI_3$, то легко получим выражения линейных дифференциальных операторов и другие формулы, необходимые в последующих параграфах.

$$\operatorname{grad} v=v_1I_1+v_2I_2+v_3I_3,\ \operatorname{div}\bar{v}=v_3+v(q_1-p_2),$$

$$\operatorname{rot}\bar{v}=(vp_3+v_2)I_1+(vq_3-v_1)I_2-v(p_1+q_2)I_3, \tag{5}$$

$$(\bar{v},\nabla)\bar{v}=v[v_3I_3+v(I_1q_3-I_2p_3)],\ \frac{\partial\bar{v}}{\partial t}=v_tI_3+v(q_tI_1-p_tI_2),$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=v[(q_t+vq_3)I_1-(p_t+vp_3)I_2+(v_3+(\lg v)_t)I_3],$$

$$dv=v_j\omega^j+v_t dt.$$

§ 3. Для вычисления компонент т е н з о р а д е ф о р м а ц и и поля скорости по отношению к какому-либо подвижному трёхграннику MI_k предположим, что $\bar{v}=v^jI_j$. Тогда

$$d\bar{v}=I_1(dv^1-v^2r+v^3q)+I_2(dv^2-v^3p+v^1r)+I_3(dv^3-v^1q+v^2p),$$

и, следовательно,

$$(\bar{v}, \bar{v})\ \bar{v} = I_1 [v^1 (v_1^1 - v^2 r_1 + v^3 q_1) + v^2 (v_2^1 - v^2 r_2 + v^3 q_3) + \\ + v^3 (v_3^1 - v^2 r_3 + v^3 q_3)] + \cdots$$

Таким образом получаем

$$D = \begin{pmatrix} v_1^1 - v^2 r_1 + v^3 q_1 & v_2^1 - v^2 r_2 + v^3 q_2 & v_3^1 - v^2 v_3 + v^3 q_3 \\ v_1^2 - v^3 p_1 + v^1 r_1 & v_2^2 - v^3 p_2 + v^1 r_2 & v_3^2 - v^3 p_3 + v^1 r_3 \\ v_1^3 - v^1 q_1 + v^2 p_1 & v_2^3 - v^1 q_2 + v^2 p_2 & v_3^3 - v^1 q_3 + v^2 p_3 \end{pmatrix}$$

откуда без труда выводится его симметрическая часть $\dot{S}$. Если $\bar{v} = v I_3$, то $\dot{S}$ будет

(6)
$$\dot{S} = \begin{pmatrix} v q_1 & \frac{1}{2} v (q_2 - p_1) & \frac{1}{2} (v_1 + v q_3) \\ \frac{1}{2} v (q_2 - p_1) & -v p_2 & \frac{1}{2} (v_2 - v p_3) \\ \frac{1}{2} (v_1 + v q_3) & \frac{1}{2} (v_2 - v p_3) & v_3 \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что если антисимметрическая часть тензора D равна нулю, то есть $\operatorname{rot} \bar{v} = 0$, тогда $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$ и получается всесторонне исследованное безвихревое течение жидкости [10]. Если же симметрическая часть тензора D, то есть $\dot{S}$, равна нулю, то, как говорят некоторые авторы, будем иметь квазитвёрдое движение жидкости. Представляет интерес выявить геометрические и кинематические характерные свойства такого движения.

Если выразить, что $\dot{S} = 0$, то из (6) следует, что

(7)
$$p_2 = q_1 = p_1 - q_2 = 0, \quad v_1 + v q_3 = v_2 - v p_3 = v_3 = 0.$$

Если сопровождающий трёхгранник $M I_k$ выберем так, чтобы, кроме $\bar{v} = v I_3$, имели бы (I_3, I_1) соприкасающейся плоскостью линий тока, то в этом случае $p_3 = 0$, а из (7) и $v_2 = 0$.

Геометрическая часть найденных условий, то есть: $p_2 = q_1 = p_1 - q_2 = 0$, показывает на то, что в каждый момент единичное поле направлений скорости будет ортогонально неголономной плоскости (многообразие с неопределёнными асимптотическими линиями), а её кинематическая часть, то есть

(8)
$$\operatorname{grad} \lg v = -q_3 I_1, \quad \operatorname{rot} \bar{v} = 2v (q_3 I_2 - q_2 I_3),$$

показывает, что $\operatorname{grag} \lg v$ совпадает (до знака) с вектором кривизны линий тока и что вихрь находится в спрямляемой плоскости этих линий. Из первого соотношения имеем следствием $q_2 + r_3 = 0$, которое утверждает, что спрямляемая плоскость линий тока огибает ∞^1 поверхностей.

Из условий совместности (3) выводим следующие соотношения

(9)
$$p_1^2 + q_3 r_2 = 0, \quad \operatorname{grad} q_3 = (q^2 - q_2^2) I_1 + q_3 r_1 I_2, \quad \operatorname{grad} q_2 = 2 q_2 q_3 I_1 - q_3 r_1 I_3.$$

Вычисляя $\mathrm{rot}^2\bar{v}$, находим

$$\frac{1}{2v}\,\mathrm{rot}^2\bar{v}=l_1\,(q_{3,3}-q_{2,2})+l_2(q_{2,1}-2q_2q_3)+l_3\,(q_3^2+2q_2^2-q_{3,1}-q_3r_2).$$

Используя соотношения (9), мы находим интересный результат, что

$$(10)\qquad \mathrm{rot}^2\bar{v}=0.$$

Итак, при каком-либо квазитвёрдом течении жидкости второй вихрь тождественно равен нулю.

Следствие. Так как при квазитвёрдом течении жидкости $\mathrm{div}\,\bar{v}=\mathrm{rot}^2\bar{v}=0$, то уравнения движения остаются неизменными как для совершенной, так и для вязкой жидкости.

Для жидкости с плотностью ρ уравнение неразрывности $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\bar{v}\rho)=0$ выразится через:

$$(11)\qquad (\lg\rho)_t+v\,(\lg\rho)_3+v_3+v\,(q_1-p_2)=0.$$

Отсюда следует, что при квазитвёрдом течении несжимаемой жидкости ($\rho=\mathrm{const}$) уравнение неразрывности удовлетворено тождественно, а в случае такого движения сжимаемого газа (11) сводится к:

$$(11')\qquad \rho_t+v\,\rho_3=0,$$

откуда следует, что линии частиц такого движения будут изобарами. Для установившегося течения идеальной жидкости, так как

$$(12)\qquad \mathrm{rot}\,\bar{v}\times\bar{v}=2v^2q_3l_1=-\mathrm{grad}\,v^2,$$

то уравнение движения

$$\mathrm{rot}\,\bar{v}X\bar{v}+\mathrm{grad}\,H=0,\qquad \text{где } H=\frac{1}{2}v^2+\int\frac{dp}{\rho}+u,$$

налагает единственное условие на плотность и потенциал силы

$$(13)\qquad \int\frac{dp}{\rho}+u-\frac{v^2}{2}=0.$$

Для неустановившегося квазитвёрдого движения нетрудно заметить, что добавочные условия совместности будут:

$$(14)\qquad \frac{\partial\,\mathrm{rot}\,\bar{v}}{\partial t}=0 \quad\text{или}\quad \bar{\omega}_t=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{q_2}{q_3}\,l_1+\lambda(q_2l_3-q_3l_2)$$

$$\text{и}\quad v\sqrt{q_2^2+q_3^2}=\varphi\,(M),$$

где $\bar{\omega}_t=p_tl_1+q_tl_2+r_tl_3$, а λ, φ — две скалярные функции. Было бы интересно довести до конца исследование нестационарного квазитвёрдого движения идеальной жидкости.

§ 4. Задаемся целью выявить внутреннюю связь между алгебраическими (эвклидовыми) инвариантами тензора деформации скорости и инвариантами, связанными с движением, то есть с полем скорости, линиями тока и т. д. Для этого вычислим коэффициенты уравнения:

$$\begin{vmatrix} vq_1-S & \frac{1}{2}v(q_2-p_1) & \frac{1}{2}(v_1+vq_3) \\ \frac{1}{2}v(q_2-p_1) & -vp_2-S & \frac{1}{2}(v_2-vp_3) \\ \frac{1}{2}(v_1+vq_3) & \frac{1}{2}(v_2-vp_3) & v_3-S \end{vmatrix} =0,$$

которое будет вида

(15) $$-S^3+IS^2+JS+K=0.$$

После элементарных вычислений находим:

$$I=v_3+v(q_1-p_2),$$

$$J=v^2\left[p_2q_1+\frac{1}{4}(p_3^2+q_3^2)+\frac{1}{4}(p_1-q_2)^2\right]$$
$$+v\left[\frac{1}{2}(v_1q_3-v_2p_3)+v_3(p_2-q_1)\right]+\frac{1}{4}(v_1^2+v_2^2),$$

(16) $$K=\frac{v^3}{4}\left[p_2q_3^2-q_1p_3^2+(q_2-p_1)p_3q_3\right]$$
$$+v^2\left[\frac{1}{2}(p_2q_3v_1+p_3q_1v_2)+\frac{1}{4}(q_2-p_1)(v_2q_3-v_1p_3)\right.$$
$$\left.-v_3p_2q_1-v_3\frac{(p_1-q_2)^2}{4}\right]+\frac{v}{4}[p_2v_1^2-q_1v_2^2+(q_2-p_1)v_1v_2].$$

Нетрудно установить, что значения этих инвариантов тензора $\dot{S}$ выразятся следующим образом через инварианты движения:

$$I=\operatorname{div}\bar{v},$$

$$J=\frac{1}{4}(\operatorname{rot}\bar{v})^2+J^*\operatorname{grad}\frac{1}{2}v^2-v(\bar{v},\bar{p},\bar{q}),$$

(17) $$K=\frac{v}{4}(\operatorname{rot}\bar{v}\times\bar{v})(\bar{p}\times\bar{q})+v\left(\operatorname{grad}\frac{1}{2}v^2,\ \bar{p},\ \bar{q}\right)$$
$$-\frac{1}{4v}(\operatorname{rot}\bar{v}.\bar{v})(\operatorname{rot}\bar{v}.\operatorname{grad}v)+\varkappa_{p(m,m')}$$

где $J^*=q_3I_1-p_3I_2+(p_2-q_1)I_3=\frac{\partial I_3}{\partial\omega^3}-\operatorname{div}I_3.I_3$, а $\bar{p}=p_kI_k$, $\bar{q}=q_kI_k$.

Что касается инварианта $\varkappa_{p(m,m')}$, придется дать некоторые пояснения. Асимптотические направления неголономной поверхности, ортогональной к полю скорости, даны [6]:

$$p_2m^2+(p_1-q_2)m-q_1=0,$$

где m — угловой коэффициент направления по отношению к реперу I_1, I_2 касательной плоскости. Направление m' этой плоскости будет односторонне сопряжено по отношению к m, если

$$(p_2m+p_1)m'-(q_2m+q_1)=0.$$

Так как $\operatorname{grad} v \times l_3 = v_2 l_1 - v_1 l_2$, то угловой коэффициент этого направления будет $m = -v_1 : v_2$; направление проекции вихря на касательную плоскость $l_1 l_2$ дано $m' = (vq_3 - v_1) : (vp_3 + v_2)$.

Это последнее направление будет односторонне сопряжено с $m = -v_1 : v_2$, если $\varkappa_{p\,(m,\,m')} = 0$.

Отсюда выводим, что $\varkappa_{p(m,\,m')}$ даёт то, что называется кривизной параллельности направления m' по отношению к направлению m.

Итак, все алгебраические инварианты тензора деформации $\dot{S}$ получили хорошее толкование через геометрические и кинематические элементы движения.

Для примера вычислим значения инвариантов I, J, K при винтовом течении несжимаемой жидкости. Для этого вида движения имеем

$$\operatorname{rot} v = -i\bar{v} \text{ и } \operatorname{grad} v = vJ^*, \tag{18}$$

а также имеем

$$(\operatorname{rot} \bar{v})^2 = i_1^2 v^2, \quad J^* \operatorname{grad} \frac{1}{2} v^2 = v^2 [p_3^2 + q_3^2 + (p_2 - q_1)^2] = i_2^2 + i_4,$$

$$(\operatorname{grad} \tfrac{1}{2} v^2, \bar{p}, q) = q_3 (p_2 q_3 - p_3 q_2) + p_3 (p_1 q_3 - p_3 q_1) + (p_2 - q_1)(p_1 q_2 - p_2 q_1) \tag{19}$$

$$= i_2 . i_3 + i_6,$$

$$(\operatorname{rot} (\bar{v} \times v))(p \times \bar{q}) = 0, \quad \frac{1}{4v} (v . \operatorname{rot} \bar{v}) (\operatorname{rot} \bar{v} \operatorname{grad} v) = -\frac{1}{4} i_1^2 i_{2,p(m,m')} = 0.$$

А потому уравнение (15) для винтового течения несжимаемой жидкости будет

$$-\left(\frac{S}{v}\right)^3 \left(\frac{1}{4} i^2 + i_2^2 - i_3 + i_4\right)\left(\frac{S}{v}\right) - \frac{1}{4} i_1^2 i_2 + i_2 i_3 + i_6 = 0. \tag{20}$$

Здесь были использованы обозначения проф. С. С. Бюшгенса [2] для алгебраических инвариантов поля единичных векторов l_3, а именно:

$$i_1 = p_1 + q_2, \quad i_2 = p_2 - q_1, \quad i_3 = p_1 q_2 - p_2 q_1, \quad i_4 = p_3^2 + q_3^2,$$

$$i_6 = q_3^2 p_2 - p_3^2 q_1 + p_3 q_3 (p_1 - q_2).$$

В случае безвихревого движения несжимаемой жидкссти уравнение (20) несколько упрощается, будучи

$$-\left(\frac{S}{v}\right)^3 (i_2^2 - i_3 + i_4) \left(\frac{S}{v}\right) + i_2 i_3 + i_6 = 0.$$

Для квазитвёрдого движения, очевидно, $H = J = K = 0$.

§ 5. Адиабатическое течение идеальной баротропной жидкости происходит в силу уравнений

$$\frac{d \lg \rho}{dt} \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad 0. \tag{21}$$

Имеем также

$$\frac{dp}{d\rho}=a^2=v^2:M^2, \tag{22}$$

где a — локальная скорость звука, а M — так называемое число Mach'a Так как

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=\frac{1}{K-1}\operatorname{grad} a^2, \qquad \frac{d}{dt}\lg\rho=\frac{1}{K-1}d\lg a^2,$$

$$\text{где } p:\rho^K=\text{const},$$

то уравнения неразрывности и движения (21) сводятся к

$$\frac{d\lg a^2}{dt}=(1-K)\operatorname{div}\bar{v} \quad \text{и} \quad \operatorname{grad} a^2=(1-K)\frac{d\bar{v}}{dt}. \tag{21'}$$

Первое из них будет:

$$\frac{\partial\lg a^2}{\partial t}+v\frac{\partial\lg a^2}{\partial\omega^3}=(1-K)\operatorname{div}\bar{v}.$$

Умножая скалярно на I_3 оба члена второго соотношения (21'), получаем $\frac{\partial a^2}{\partial\omega^3}=(1-K)(v_t+vv_3)$. В силу этого последнее равенство будет

$$\frac{\partial a^2}{\partial t}=(1-K)[a^2\operatorname{div}\bar{v}-v(v_t+vv_3)].$$

Нетрудно заметить, что эти выкладки приводят к

$$da^2=\frac{\partial a^2}{\partial\omega^i}\omega^i+\frac{\partial a^2}{\partial t}dt=(1-K)\left\{\frac{d\bar{v}}{dt}dM+[a^2\operatorname{div}\bar{v}-v(v_t+vv_3)]dt\right\}$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} da^2=&[v(q_t+vq_3)\omega^1-(p+vp_3)\omega^2]\\ &+(v_t+vv_3)(\omega^3-vdt)+a^2\operatorname{div}\bar{v}\,dt. \end{aligned} \tag{23}$$

Выражая, что внешний дифференциал пфаффовой формы из второй части соотношения (23) равен нулю, получаем заодно с (3, 4) все условия совместности для адиабатического потока.

Для исследования проблемы существования адиабатического потока в данных условиях, первым долгом, выберем (I_3, I_1) подвижного трёхгранника соприкасающуюся плоскость линий частиц, что требует

$$p_t+vp_3=0.$$

Наша проблема сводится к изысканию решений системы уравнений Pfaff'a:

$$\begin{aligned} p&=p_1\omega^1+p_2\omega^2+p_3(\omega^3-v\,dt),\\ q&=p_1\omega^1+q_2\omega^2+q_3\omega^3+q_t\,dt,\\ d\lg v&=v_1\omega^1+v_2\omega^2+v_3\omega^3+v_t\,dt, \end{aligned} \tag{24}$$

$$da^2 = v(q_t + vq_3)\omega^1 + (v + vv_3)(\omega^3 - v\,dt) + a^2[v_3 + v(q_1 - p_2)]dt.$$

Ограничиваясь регулярными решениями, остаётся исследовать, если система уравнений (24) будет в инволюции. В этом случае после известных выкладок находим следующие характеры $S_0 = S_1 = S_2 = 4$, $S_3 = 3$.

Система уравнений (24) будет в инволюции; откуда следует, что адиабатический поток идеальной баротропной жидкости существует и его произвол три функции от трёх аргументов.

Отметим, что вдоль линий частиц ($\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 - v\,dt = 0$) имеем

$$\frac{da^2}{dS_c} = \frac{a^2 \operatorname{div} \bar{v}}{v} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \lg a^2}{\partial S_c} = \frac{\operatorname{div} \bar{v}}{v} \tag{25}$$

Для случая стационарного адиабатического течения, которое было исследовано проф. Бюшгенсом в мемуаре [4], хочу сделать только два замечания в связи с числом Mach'a. Первым долгом, в этом случае имеем

$$v\frac{\partial \lg a^2}{\partial \omega^3} = (1 - K) \operatorname{div} \bar{v} \quad \text{и} \quad \frac{\partial a^2}{\partial \omega^3} = (1 - K)vv_3,$$

откуда следует простое выражение для числа Mach'a:

$$M^2 = \frac{\operatorname{div} \bar{v}}{v_3} \quad \text{или} \quad M^2 = 1 + \frac{q_1 - p_2}{(\lg v)_3}. \tag{26}$$

В этом случае к каждой точке M сверхзвуковой области присоединяется конус вращения с вершиной в M и с углом открытия $\alpha = \arcsin \frac{1}{M}$ вокруг оси направления скорости. Конусы Mach'a во всех точках этой области образуют многообразие конусов вращения, тесно связанное с этим образом движения.

В [7] я исследовал многообразия конусов вращения, и эту теорию можно полностью применить к изучению многообразия конусов Mach'a и, следовательно, к геометрической структуре адиабатического потока.

Частные случаи. 1°. Если вдоль линий частиц величина скорости остаётся постоянной (меняясь при переходе от одной линии на другую) и выбираем $(I_3 I_1)$— соприкасающуюся плоскость этих линий, то $da^2 = \varphi_i \omega^i \quad \varphi_t . dt$ будет в данном случае

$$da^2 = v(q_t + vq_3)\omega^1 + a^2 \operatorname{div} \bar{v} . dt.$$

Используя (I)(фор. 5), получаем все условия совместности вида:

$$q_2 + r_3 = 0, \operatorname{grad}(a^2 \operatorname{div} \bar{v}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right) \quad \operatorname{grad}\left|\frac{d\bar{v}}{dt}\right| = \frac{\partial}{\partial \omega^1}\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right),$$

$$\text{где } \frac{d\bar{v}}{dt} = \varphi_1 I_1.$$

Первое из них показывает, что в каждый момент поле бинормалей линий частиц допускает семейство ∞^1 ортогональных поверхностей.

2°. Если линии частиц будут прямолинейные, то $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и

$$da^2 = (v_t + vv_3)(\omega^3 - v\,dt) + a^2 \operatorname{div} \bar{v}\,dt.$$

Используя те же формулы (I)(5), получаем для данного случая все условия совместности вида:

$$p_1+q_2=0, \quad \operatorname{grad}\left|\frac{d\bar{v}}{dt}\right|=\frac{\partial}{\partial\omega^3}\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right),$$

$$\operatorname{grad}(a^2\operatorname{div}\bar{v})=\left|\frac{d\bar{v}}{dt}\right|\operatorname{grad}v+\frac{d}{dt}\left|\frac{d\bar{v}}{dt}\right| I_3.$$

Первое соотношение показывает, что комплекс прямых линий частиц допускает семейство ∞^1 ортогональных поверхностей.

§ 6. В случае идеальной жидкости, рассматривается малое возмущение, исходя из состояния покоя; пренебрегая внешней силой, уравнения движения и неразрывности можно заменить уравнениями [12]:

$$\text{27)} \qquad \rho_0\frac{d\bar{v}}{dt}=-a_0^2\operatorname{grad}\rho, \qquad \rho_0\operatorname{div}\bar{v}=-\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

которые, в отличие от точных уравнений, будут линейными относительно переменных $\bar{v}$ и ρ. Как и для адиабатического потока, все условия совместности выразятся при приравнивании к нулю внешнего дифференциала пфаффовой формы

$$\omega=vq_t\,\omega^1+v_t\,\omega^3+a_0^2[v_3+v(q_1-p_2)]dt,$$

если выберем репер так, чтобы I_3I_1 была касательной плоскостью к локальному конусу скоростей.

В этом случае, очевидно, $\frac{\partial\operatorname{rot}\bar{v}}{\partial t}=0$, а это показывает, в частности что квазитвёрдое неустановившееся движение идеальной жидкости будет и линеаризированным в вышеуказанном смысле.

Рассмотрение существования и произвола решений в данном случае сводится к исследованию, если система уравнений Pfaff'a

$$p=p_1\omega^1+p_2\omega^2+p_3\omega^3,$$
$$q=q_1\omega^1+q_2\omega^2+q_3\omega^3+q_t\,dt,$$
$$d\lg v=v_1\omega^1+v_2\omega^2+v_3\omega^3+v_t\,dt,$$
$$d\lg\rho=vq_t\,\omega^1+v_t\,\omega^3+a_0^2[v_3+v(q_1-p_2)]dt$$

будет в инволюции. Ответ будет утвердительным, и широта решения — три произвольных функции от трёх независимых переменных.

§ 7. Винтовое течение, будучи, наряду с безвихревым, одним из простейших движений и имея глубокую связь с важными категориями действительных течений как несжимаемых жидкостей, так и сжимаемых газов, было внимательно исследовано за последние восемь десятков лет. Несмотря на большое количество работ, посвященных этим течениям, есть всё же некоторые пробелы, даже в вопросе существования таких движений для некоторых жидкостей, к которым хотелось бы привлечь внимание читателей.

В связи с этим, начиная с работ И. Громеки, было исследовано систематически винтовое установившееся течение совершенных жидкостей. Было доказано, что неустановившегося винтового течения идеальной несжимаемой жидкости не бывает. Известно также, что не существует установившегося потока Громеки несжимаемой вязкой жидкости. Были даны, наконец, несколько примеров неустановившегося винтового течения несжимаемой вязкой жидкости; все эти примеры предполагают, что поле направлений скорости стационарно. Этим, насколько мне известно, ограничиваются исследованные вопросы о существовании винтовых потоков.

В § 4 мы уже видели, что при винтовом течении жидкостей имеем

$$v = vI_3,\ \operatorname{rot} v = -i_1 v,\quad \operatorname{grad} \lg v = q_3 I_1 - p_3 I_2 + (\lg v)_3 I_3, \qquad (27)$$
$$J^* = q_3 I_1 - p_3 I_2 + (p_2 - q_1) I_3.$$

Так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{v} = 0$, то одно из следствий будет

$$\frac{\operatorname{div} \bar{v}}{v} - \frac{\partial \lg i_1}{\partial \omega^3} = 0 \text{ или } (\lg v)_3 + (q_1 - p_2) + \frac{\partial \lg i_1}{\partial \omega^3} = 0. \qquad (28)$$

В случае потока Громеки $i_1 = \text{const}$, а потому (28) сводится к $\operatorname{div} v = 0$ откуда следует, что только несжимаемые жидкости могут иметь течение типа Громеки.

Из (28) следует, что для винтового течения сжимаемых жидкостей имеем

$$\operatorname{grad} \lg v = J^* - \frac{\partial \lg i_1}{\partial \omega^3} I_3, \qquad (29)$$

а для несжимаемых жидкостей всегда будет

$$\frac{\partial \lg i_1}{\partial \omega^3} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{grad} \lg v = J^*. \qquad (30)$$

При установившемся винтовом течении идеальной жидкости очевидно, что уравнения движения не налагают ограничений на движение, а потому в этом случае проблема их существования сводится к исследованию решений системы уравнений Pfaff'а:

$$\begin{aligned} p &= p_1 \omega^1 + p_2 \omega^2, \\ q &= q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2 + q_3 \omega^3, \\ d \lg v &= q_3 \omega^1 + (\lg v)_3 \omega^3, \end{aligned} \qquad (31)$$

если выберем трёхгранник так, чтобы $I_3 I_1$ была бы соприкасающейся плоскостью линий тока. Исследование на инволюцию этой системы приводит к характерам $S_0 = S_1 = S_2 = 3$.

Если жидкость несжимаема, то $(\lg v)_3 = p_2 - q_1$ и устанавливается, что $S_0 = S_1 = 3$, $S_2 = 2$, а при потоке Громеки, так как $q_2 = c - p_1 (c = \text{const})$, устанавливается тем же путём, что $S_0 = S_1 = 3$, $S_2 = 1$.

Итак, стационарное винтовое движение идеальной жидкости существует, имея произвол при сжимаемой жидкости — в три функции, при несжимаемой жидкости — в две функции, а при потоке Громеки — в одну функцию, причём все произвольные функции — из двух аргументов.

Существует ли неустановившееся винтовое течение сжимаемого совершенного газа? Оказывается, что при регулярных условиях такого течения не бывает.

Действительно, если жидкость идеальна, то из уравнения движения $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}=\operatorname{grad} M$ следует, что $\frac{\partial \operatorname{rot} \bar{v}}{\partial t}=0$ или, используя (5, 27), имеем

$$wq_t = wp_t = \frac{dw}{dt}+wv(q_1-p_2)=0, \quad \text{где} \quad w=-i_1v. \tag{32}$$

Исключая безвихревое течение, то есть предполагая, что $w\neq 0$, из первых двух соотношений (32) имеем: $p_t = q_t = 0$, а это показывает, что поле направлений скорости стационарно. Вставляя в последнее соотношение (32) значение w, получаем

$$v_t\, i_1+v^2\left[i_{1,3}+\frac{v_3}{v}i_1-i_1(p_2-q_1)\right]=0, \tag{33}$$

откуда, в силу равенства (28), следует, что $v_t\, i_1=0$ или $v_t = 0$. Итак, поле скорости стационарно, а потому винтовое течение идеальной жидкости, будь она сжимаема или несжимаема, может быть только установившимся.

При винтовом потоке вязкой несжимаемой жидкости уравнения неразрывности и движения будут

$$v_3=v(p_2-q_1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}=\operatorname{grad} N+\alpha \operatorname{rot}^2 \bar{v}. \tag{34}$$

Из первого соотношения следует, что винтовое течение какой-либо несжимаемой жидкости налагает ряд условий совместности, исходящих из того, что $J^*=q_3I_1-p_3I_2+(p_2-q_1)I_3$ будет градиентным вектором. После небольших выкладок получаем

$$\operatorname{rot}^2 v=v(i_{1,1}I_2-i_{1,2}I_1+i_1^2I_3), \quad \text{а также}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}=v(q_t\, I_1-p_t\, I_q)+v_t\, I_3 \quad \text{и аналогично}$$

$$\frac{\partial \operatorname{rot} v}{\partial t}=w(q_t\, I_2-p_t\, I_1)+w_t\, I_3.$$

Теперь из (34) выводим все условия совместности винтового вязкого потока жидкости, которые выражаются соотношениями (3,4) и

$$\operatorname{rot} J^*=0, \quad \operatorname{rot}\{v(q_t+\alpha i_{1,2})I_1-(p_t-\alpha i_{1,1})I_2+ \\ +(v_t-\alpha v i_1^2)I_3\}=0. \tag{35}$$

Если в эти равенства проводим $p_t = q_t = v_t = 0$, то получаются условия для случая установившегося винтового потока вязкой жидкости; в этом последнем случае, если $i_1=\text{const}\neq 0$, то второе соотношение из (35) даёт $\operatorname{rot}\bar{v}=0$, что противоречит $i_1\neq 0$. Находим известный результат, что стационарного вязкого потока типа Громеки не бывает. Что касается неустановившегося вязкого потока типа Громеки, то есть такого течения, при котором в каждый момент t_0, $i_1=i_1(t_0)=\text{const}$, то условия совместности в этом случае будут

$$\operatorname{rot} J^*=0, \quad \frac{\partial \operatorname{rot} v}{\partial t}=\alpha i_1^2 \operatorname{rot} \bar{v}, \tag{35'}$$

откуда получаем

$$q_t = p_t = 0 \quad (\lg w)_t = \alpha i_1^2. \tag{36}$$

Первые два соотношения показывают, что поле направлений скорости стационарно, имея постоянное кручение (так как $i_{1,t} = 0$). Последнее из соотношений (36), если использовать (32), приводит к: $v = u(M) e^{\alpha i_1^2 t}$, откуда

$$\bar{v} = e^{\alpha i_1^2 t}\, \bar{u}, \tag{37}$$

где $\bar{u}$, удовлетворяя первому из равенств (35′), есть поле скоростей установившегося потока типа Громеки идеальной несжимаемой жидкости. Тогда (37) даёт вязкий поток типа Громеки. Это решение было найдено впервые проф. С. С. Бюшгенсом и, как указывает автор, оно включает осесимметричный винтовый поток вязкой несжимаемой жидкости, найденный B. Caldonazzo [3].

Исключая впредь потоки типа Громеки, то есть предполагая $\operatorname{grad} i_1 \neq 0$, заметим, во-первых, что этот вектор в силу равенства (30) ортогонален к скорости $\bar{v}$. Выбирая l_2 так, чтобы $\operatorname{grad} i_1 = \lambda l_2$, то есть так, чтобы $i_{1,1} = 0$, то имеем и

$$p_1 + r_3 = 0, \quad \text{а также} \quad \operatorname{rot}^2 \bar{v} = v(i_1^2 l_3 - i_{1,2} l_1).$$

Условия совместности, вытекающие из второго соотношения (35), будут

$$\begin{gathered} i_{1,2}(2i_1 + q_2 + r_3) + \beta i_1 q_t = 0, \\ p_2 i_{1,2} + \beta i_1 p_t = 0, \\ i_{1,22} - (p_3 + r_1) i_{1,2} - i_1^3 + \beta[i_{1,t} + (\lg v)_t\, i_1] = 0, \end{gathered} \tag{38}$$

где $\beta = 1 : \alpha$ постоянная вязкости.

Замечание. Отметим, между прочим, что плоскость скорости и второго вихря огибает вообще, в каждый момент, семейство ∞^1 поверхностей, которые по аналогии можно назвать бернуллиевыми поверхностями. Для того, чтобы эта плоскость огибала бы во всякий момент одно и то же семейство бернуллиевых поверхностей, то, как следует из (1)(6:14), необходимо и достаточно иметь

$$\left(\bar{v}, \operatorname{rot}^2 \bar{v}, \frac{\partial \operatorname{rot}^2 \bar{v}}{\partial t}\right) = 0,$$

или

$$p_t\, i_1^2 + r_t\, i_{2,2} = 0.$$

Исключая вязкий поток типа Громеки, то есть предполагая $i_{1,2} \neq 0$, поле направлений скоростей будет стационарным ($p_t = q_t = 0$), если $p_2 = 0$, $p_1 = -3q_2 = -r_3$, а также

$$(\lg v)_t \quad (p_3 + r_1)(\lg i_1)_2 + i_1^2 - \frac{i_{1,22}}{i_1} - (\lg i_1)_t\,. \tag{39}$$

Итак, все условия совместности, кроме (3, 4) в случае неустановившегося винтового вязкого потока с стационарным полем скоростей (кроме случая, найденного проф. Бюшгенсом), будут даны

(40) $$p_2=p_1+r_3=p_1+3q_2=0 \quad \text{и} \quad d\omega=0,$$

где d внешний дифференциал пфаффовой формы

(41) $$\omega=J^*dM+v_t dt, \text{ где } v_t \text{ имеет значение (39).}$$

При стационарном вязком винтовом потоке условия (40) сводятся к

(42) $$p_2=p_1+r_3=p_1+3q_2=0, \quad (p_3+r_1)(\lg i_1)_2+i_1^2-\frac{i_{1,22}}{i_1}=0 \text{ и } rot\ J^*=0.$$

Для того, чтобы указать существование такого потока, достаточно показать, что система уравнений Pfaff'а:

(42) $$\begin{aligned} p&=-3q_2\omega^1+p_3\omega^3,\\ q&=q_1\omega^1+q_2\omega^2+q_3\omega^3,\\ r&=r_1\omega^1+r_2\omega^2+3q_2\omega^3,\\ d\lg v&=q_3\omega^1-p_3\omega^2-q_1\omega^3,\\ d\lg q_2&=q_{2,2}\omega^2,\\ d\lg q_{2,2}&=-r_2\omega^1+\left(p_3+r_1+4\frac{q_2^3}{q_{2,2}}\right)\omega^3 \end{aligned}$$

находится в инволюции. Система состоит из $S_0=6$ уравнений с $n=3$ независимыми переменными и $q=5$ неизвестными функциями: p_3, q_1, q_3, r_1, r_2. Билинейные коварианты системы (43) будут вида

$$\begin{aligned} -3\pi^1dq_2+\pi^3dp_3+\cdots&=0,\\ \pi^1dq_1+\pi^2dq_2+\pi^3dq_3+\cdots&=0,\\ \pi^1dr_1+\pi^2dr_2+3\pi^3dq_2+\cdots&=0,\\ \pi^1dq_3-\pi^2dp_3-\pi^3dq_1+\cdots&=0,\\ \pi^2dq_{2,2}+\cdots&=0,\\ -\pi^1dr_2+\pi^2d(p_3+r_1)+\cdots&=0, \end{aligned}$$

где π^i — произвольные значения, данные независимым линейным формам ω^i Так как детерминант коэффициентов дифференциалов неизвестных функций p_3, q_1, q_2, r_1, r_2 равен $\pi^3[(\pi^1)^2+(\pi^2)^2][(\pi^1)^2+(\pi^3)^2]\neq 0$, то $S_1=5$, $S_2=S_3=0$ и система (43) в инволюции. Итак, установившееся винтовое течение вязкой несжимаемой жидкости существует, имея произвол в пять функций одного аргумента.

Для неустановившегося вязкого винтового потока система уравнений Pfaff'а, инволюцию которой нужно будет исследовать, будет:

$$\begin{aligned} p&=p_1\omega^1+p_2\omega^2+p_3\omega^3+p_t dt,\\ q&=q_1\omega^1+(i_1-p_1)\omega^2+q_3\omega^3+q_t\, dt, \end{aligned}$$

$$(44)\qquad \begin{aligned} r &= r_1\omega^1 + r_2\omega^2 - p_1\omega^3 + r_t\, dt,\\ d\lg v &= q_3\omega^1 - p_3\omega^2 + (p_2 - q_1)\omega^3 + v_t\, dt,\\ d\Phi &= v(q_t + \alpha i_{1,2})\omega^1 - vp_t\,\omega^2 + (v_t - \alpha v i_1^2)\omega^3 + \Phi_t\, dt,\\ di_1 &= i_{1,2}\omega^2 + i_{1,t}\, dt. \end{aligned}$$

Применяя известный метод, находим $S_0 = S_1 = S_2 = 6$ и $S_3 = ?$, $S_4 = 0$. Итак, неустановившийся винтовой вязкий поток имеет произвол в две функции трёх аргументов.

Интересно было бы найти пример такого потока с нестационарным полем скоростей, например для случая $p_t = 0$, когда плоскость $(\overline{v}, \operatorname{rot}^2 \overline{v})$ будет и касательной плоскостью к локальному конусу скорости; в этом случае, как видно из (38), будем иметь и $p_2 = 0$.

§ 8. Так как поперечное течение жидкости, обладает свойством: в каждый момент поле вихря ортогонально скорости, то $p_1 + q_2 = 0$. Если выбрать трёхгранник так, чтобы, кроме $\overline{v} = vI_3$, имели бы $\operatorname{rot} \overline{v} = zI_1$, то тогда

$$(45)\qquad z = v_2 + vp_3,\quad (\lg v)_1 = q_3 \quad \text{или} \quad \operatorname{grad} \lg v = q_3 I_1 + \left(\frac{z}{v} - p^3\right) I_2 + (\lg v)_3 I_3.$$

Для идеальной жидкости из уравнений движения следует:

$$(46)\qquad \frac{d \lg z}{dt} = vp_2 - v_3,\quad r_t + v(p_1 + r_3) = 0,\quad q_t + v_1 + vq_3 = 0.$$

Когда плоскость Lamb'a $I_3 I_1$ касается локального конуса скоростей ($p_t = 0$), то второе соотношение (46) можно истолковать следующим образом: при неустановившемся поперечном движении идеальной жидкости, если плоскость Lamb'a касается конуса скоростей, то линии частиц, находящиеся на многообразии этих конусов, будут и его характеристическими линиями.

Если же плоскость Lamb'a ортогональна касательной плоскости к конусу скоростей ($q_t = 0$), то, как следует из (45, 46), имеем $v_1 = 0$, $q_3 = 0$. Итак, в этом случае соприкасающиеся плоскости линий частиц и линий тока совпадают с касательной плоскостью конуса скоростей, что указывает на то, что поле направлений скоростей вырождается в комплекс прямых. В этом случае локальные конусы скорости и вихря будут дополнительны (complémentaires), то есть нормаль к касательной плоскости одного из конусов будет соответствующей образующей второго конуса. Отметим также свойство, что в этом случае величина скорости вдоль линий вихря остаётся постоянной.

Первому равенству из (46) можно еще придать вид

$$(47)\qquad \frac{d \lg z}{dt} + \operatorname{div} \overline{v} = vq_1,$$

который позволяет вывести трёхстороннюю теорему, которая при $p_t = 0$ будет: если неустановившееся поперечное течение идеальной жидкости, когда плоскость Lamb'a касается конуса скорости, обладает двумя из свойств: 1^0 величина вихря инвариантна вдоль линий частиц $\left(\frac{dz}{dt} = 0\right)$, 2^0 жидкость несжимаема ($\operatorname{div} v = 0$), 3^0 линии вихря будут в каждый момент геодезическими на многообразии, касательном к плоскости Lamb'a, — то справедливо и третье свойство.

Наконец, из второго равенства (46), если $r_t = 0$, то $p_1 + r_3 = 0$, и обратно, что показывает: если $(l_3 l_1)$ будет касательной плоскостью к конусу вихря, то многообразие этих конусов будет голономным, и обратно. Это свойство представляет частный случай свойства (1) (6 : 14).

Если иметь одновременно $p_1 + r_3 = p_1 + q_2 = 0$, следует, что в каждый момент конгруэнция линий вихря будет биортогональной конгруэнцией. Если же имеем одновременно $p_t = r_t \neq 0$, то локальные конусы вихря и скорости вырождаются в стационарную плоскость Lamb'a, которая огибает ∞^1 поверхностей.

§ 9. Рассмотрим подробнее один частный случай неустановившегося поперечного движения, когда несжимаемая жидкость вязкая, а второй вихрь коллинеарен с нормалью к плоскости Lamb'a. Ставится вопрос, при каких условиях $\bar{v}$, $\operatorname{rot}\bar{v}$, $\operatorname{rot}^2 v$ образует в каждый момент **триортогональную голономную систему**. На эту мысль меня навела работа Н. И. Алексеева [I], в которой исследуется установившееся поперечное течение вязкой жидкости, поле скоростей которого допускает ортогональное семейство поверхностей с одним параметром, входящее в триортогональную систему.

Если выбирать сопровождающий трёхгранник так, чтобы

$$\bar{v} = v l_2, \quad \operatorname{rot}\bar{v} = w l_3, \quad \operatorname{rot}^2\bar{v} = z l_1, \tag{48}$$

будут удовлетворены следующие соотношения

$$\begin{gathered} v_3 - v p_2 = 0, \quad p_1 + r_3 = 0, \quad v_1 + v r_2 = w, \\ w_2 + w p_3 = z, \quad w_1 - w q_3 = 0, \quad p_1 + q_2 = 0. \end{gathered} \tag{49}$$

Так как $\operatorname{div}\bar{v} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{v} = \operatorname{div}\operatorname{rot}^2\bar{v} = 0$, то

$$v_2 + v(p_3 - r_1) = 0, \quad w_3 + w(q_1 - p_2) = 0, \quad z_1 + z(r_2 - q_3) = 0. \tag{50}$$

Применяя операцию rot к обеим частям уравнения движения для данного случая, получим

$$\frac{\partial \operatorname{rot}\bar{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} v \times \bar{v}) = \alpha \operatorname{rot}(\operatorname{rot}^2 \bar{v})$$

или

$$\frac{\partial (w l_3)}{\partial t} = \operatorname{rot}(\alpha z + v w) l_1. \tag{51}$$

Обозначая временно через $\lambda = \alpha z + v w$, после небольших выкладок имеем

$$w q_t + \lambda(q_2 + r_3) = 0, \quad w p_t + \lambda_3 + \lambda q_1 = 0, \quad w_t + \lambda_2 - \lambda r_1 = 0. \tag{52}$$

Из первого соотношения следует, что необходимое и достаточное условие, чтобы $\bar{v}$, $\operatorname{rot}\bar{v}$, $\operatorname{rot}^2\bar{v}$, будучи попарно перпендикулярны, образовали в каждый момент триортогональную голономную систему $(p_1 = q_2 = r_3 = 0)$, будет $q_t = 0$. Здесь мы предположили $\lambda \neq 0$, то есть исключили случай $\frac{\partial \operatorname{rot} \bar{v}}{\partial t} = 0$, когда первый вихрь образует стационарное векторное поле.

Геометрически $q_t = 0$ обозначает, что локальные конусы первых двух вихрей дополнительны (complémentaires). Итак, необходимое условие, чтобы три многообразия конусов, соответствующие образующие которых формировали бы в каждый момент триортогональный голономный трёхгранник, состоит в том, чтобы локальные конусы двух из них были бы дополнительными.

Вводя значение λ в (52), находим

$$
\begin{aligned}
& wq_t + (dz + vw)(q_2 + r_3) = 0, \\
(53) \qquad & \alpha(z_3 + q_1 z) + w(p_t + 2vp_2) = 0, \\
& \alpha(z_2 - r_1 z) + w_t + zv - 2vwp_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Первое из них вместе с двумя соотношениями (49) дает в этом случае

$$
(54) \qquad p_1 = q_2 = r_3 = q_t = 0.
$$

Все эти соотношения можно выразить сжато через:

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{grad} \lg v = -r_2 I_1 + p_2 I_3 + (r_1 - p_3) I_2 + \frac{w}{v} I_1, \\
& \operatorname{grad} \lg w = q_3 I_1 - p_3 I_2 + (p_2 - q_1) I_3 + \frac{z}{w} I_2, \\
(55) \qquad & \operatorname{grad} \lg z = (q_3 - r_2) I_1 + r_1 I_2 - q_1 I_3 \\
& + \beta\left[\left(\frac{2p_3 vw - w_t}{z} - v\right) I_2 - \frac{w}{z}(p_t + 2vp_2) I_3\right],
\end{aligned}
$$

где $\beta = 1 : \alpha$ — постоянная вязкости.

Если присоединим к каждой оси трёхгранника I_k, векторные поля

$$
J_k^* = \frac{\partial I_k}{\partial \omega^k} - (\operatorname{div} I_k) I_k,
$$

которые, по-видимому, впервые были использованы Westherburn'ом в 1927 г., и вычислим $\bar{v} \times \operatorname{rot} \bar{v}$, $\operatorname{rot} \bar{v} \times \operatorname{rot}^2 \bar{v}$, $\operatorname{rot}^2 v \times \operatorname{rot}^3 \bar{v}$, то тогда формулы (55) принимают симметрическую форму:

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{grad} \lg v = J_2^* + \frac{1}{v^2} \bar{v} \times \operatorname{rot} v, \\
(56) \qquad & \operatorname{grad} \lg w = J_3^* + \frac{1}{w^2} \operatorname{rot} \bar{v} \times \operatorname{rot}^2 v, \\
& \operatorname{grad} \lg z = J_1^* + \frac{1}{z^2} \operatorname{rot}^2 \bar{v} \times \operatorname{rot}^3 \bar{v}.
\end{aligned}
$$

Итак, для того, чтобы три многообразия конусов образовали бы в каждый момент триортогональную голономную систему, соответствующие образующие которых служили бы базисом для $\bar{v}$, $\operatorname{rot} \bar{v}$, $\operatorname{rot}^2 \bar{v}$ несжимаемой вязкой жидкости, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия, выражаемые формулами (56).

Рассматривание регулярных решений этой задачи сводится к исследованию на инволюцию следующей системы уравнений Pfaff'a:

$$
\begin{aligned}
&p = p_2\omega^2 + p_3\omega^3 + p_t\,.\,dt,\\
&q = q_1\omega^1 + q_3\omega^3,\\
&r = r_1\omega^1 + r_2\omega^2 + r_t\,.\,dt,\\
(57)\qquad &d\lg v = \left(\frac{w}{v} - r_2\right)\omega^1 + (r_1 - p_3)\omega^2 + p_2\omega^3 + v_t\,.\,dt,\\
&d\lg w = q_3\omega^1 + \left(\frac{z}{w} - p_3\right)\omega^2 + (p_2 - q_1)\omega^3 + w_t\,.\,dt,\\
&d\lg z = (q_3 - r_2)\omega^1 + \left[\,r_1 + \beta\left(\frac{2p_3vw}{z} - v\right)\right]\omega^2\\
&\qquad - \left[q_1 + \beta\frac{w}{z}(p_t + 2vp_2)\right]\omega^3 + z_t\,.\,dt.
\end{aligned}
$$

В данной системе $S_0=6$, $n=4$, $q=11$. Билинейные коварианты уравнений системы (57) дают на первом этапе значения дифференциалов неизвестных функций p_t, q_3, r_t, v_t, w_t, z_t (детерминант коэффициентов будет $-\pi^3(\delta t)(^4)$), а потому $S_1=6$; на следующем этапе фиксируются значения дифференциалов остальных функций, из ковариантов первых пяти уравнений — детерминант коэффицентов будет $\pi'\,.\,[(\pi')^2+(\pi^2)^2]\,[(\pi^2)^2+(\pi^3)^2]$, а потому $S_2=5$ и $S_3=0$. Данная система в инволюции и её решение зависят от пяти произвольных функций двух аргументов.

§ 10. Проф. С. С. Бюшгенс в § 7 своего мемуара [5] рассматривает течение идеальной жидкости с полной энергией частиц H, одинаковой для всех точек. В связи с этой задачей мне хотелось бы сделать несколько замечаний и остановиться на некоторых частных случаях.

Выражая основное свойство таких течений, что

$$H=\frac{1}{2}v^2+\int\frac{dp}{\rho}+u=(t),$$

из уравнения движения следует, что

$$\frac{dv}{dt}=\operatorname{grad}\frac{1}{2}v^2. \tag{58}$$

Используя формулы (5), получаем соотношения

$$q_t + vq_3 = v_1,\quad p_t + vp_3 = -v_2,\quad v_t + vv_3 = vv_3. \tag{59}$$

Из последнего равенства получаем $v_t = 0$, а это означает, что для идеальной жидкости, будь она несжимаема или сжимаема, в этом случае величина скорости не зависит от времени.

Кроме того, используя (59), имеем

$$-\operatorname{rot}\bar v = p_t\,I_1 + q_t\,I_2 + (p_1+q_2)I_3,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{rot}\bar v\,\bar v = v(q_t\,I_1 - p_t\,I_2) = \frac{\partial\bar v}{\partial t}.$$

Это равенство указывает на одно замечательное свойство такого течения касательная плоскость к конусу скоростей и плоскость Lamb'а ортогональны между собою.

Если жидкость несжимаема, то имеем и

$$v_3 = v(p_2 - q_1).$$

Для исследования широты регулярных решений этой задачи достаточно рассматривать на инволюцию систему уравнений Pfaff'а

$$
\begin{aligned}
& p = p_1\omega^1 + p_2\omega^2 + p_3\omega^3, \\
(60) \qquad & q = q_1\omega^1 + q_2\omega^2 + q_3\omega^3 + q_t dt, \\
& dv = (q_t + vq_3)\omega^1 - vp_3\omega^2 + v(p_2 - q_1)\,\omega^3.
\end{aligned}
$$

Нетрудно установить, что $S_0 = S_1 = S_2 = 3$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$. Решение зависит от одной функции трёх аргументов.

Если выбираем референцию, так чтобы плоскость $(I_3 I_1)$ касалась бы локального конуса скоростей, то $p_t = 0$, а потому $v_2 = -vp_3$. Используя формулы (1)(1:3, 4, 5) имеем

$$
\begin{aligned}
& v_{2t} + v_1 r_t = 0, \\
61) \qquad & p_{3,t} = q_t\,(p_1 - r_3) + r_t\, q_3, \\
& vp_{3t} = r\ (q_t + vq_3).
\end{aligned}
$$

Сопоставляя последние два соотношения и исключая возможность $q_t = 0$ (при $p_t = 0$), что поле скоростей стационарно, получим

$$(62) \qquad r_t = v\,(p_1 - r_3).$$

Это равенство показывает, что если $r_t = 0$, то тогда и $p_1 = r_3 = 0$. При $p_t = r_t = 0$ локальный конус скоростей вырождается в плоскость и жидкость течет по неголономной поверхности.

Из $p_1 = r_3$ следует $p_{1,t} = r_{3,t}$

Так как $p_{1,t} = -q_t\,(p_3 + r_1)$, а $r_{3,t} = q_t\,(p_3 + r_1)$, то имеем

$$2q_t\,(p_3 + r_1) = 0.$$

Так как была исключена возможность $q_t = 0$, то получаем $p_3 + r_1 = 0$. Формулы

$$(63) \qquad p_1 = r_3, \quad p_3 = r_1 = 0$$

указывают на то, что многообразие, вдоль которого происходит течение будет н е г о л о н о м н о й с ф е р о й.

Если же, кроме выбора $p_t = 0$, имеем и $p_3 = 0$, то есть нестационарное поле направлений скорсети вырождается в комплекс прямых, то тогда из (59) имеем $v_2 = 0$, а из (61) $v_1 r_t = 0$.

Если исключить возможность $v_1 = 0$, которая приводит к частному случаю, исследованному проф. Бюшгенсом, когда линии частиц прямолинейны, то остаётся равенство $r_t = 0$.

Снова приходим к течению по неголономной поверхности, на которой $p_1 = r_3$, $p_3 = r_1 = 0$; а комплекс прямых направлений скорости будет линейным. Иначе говоря, течение происходит вдоль неголономной плоскости Такое движение было мною ранее разобрано в [8]. Что касается геометрических свойств неголономных сферы и плоскости, могу указать работу R. Miron'a [11].

Поступило 21. II. 1962

Поступило 21. II. 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев И. Н. Об установившемся потоке несжимаемой вязкой жидкости, допускающем триортогональную систему поверхностей, *Изв. высш. уч. зав. Математика* № 1 (8), 1959, 3—8.
2. Бюшгенс С. С. Геометрия векторного поля. *Изв. АН СССР, серия мат.*, 10, 1946, 73—96.
3. Бюшгенс С. С. О винтовом потоке. *Научн. зап. Моск. гидромелиоративного ин-та.* 17, 1948, 73—90.
4. Бюшгенс С. С. Геометрия адиабатического потока. *Учен. зап. МГУ, вып.* 148, *Мат.*, 4, 1954, 30—52.
5. Бюшгенс С. С Геометрия неустановившегося потока совершенной несжимаемой жидкости, *Изв. АН СССР, серия мат.*. 24, 1960, 171—202.
6. Gheorghiev Gh. Cîteva probleme geometrice legate de un cîmp de vectori unitari. *Acad. R. P. R, Buletin şt. secţ. mat.-fiz.*, 6, 1954, 101—123.
7. Gheorghiev Gh. Sulla geometria dei coni dell'S_3 euclideo. *Analele stiinţifice ale Un. v. Iaşi*, S. I, 3, 1957, 125—132.
8. Георгиев Г Не тационарные движения идеальной жидкости вдоль линейной неголономной поверхности. *An. şt. Univ. Iaşi, S.* I, 5, 1959, 51—65.
9. Георгиев Г. Дифференциально-геометрические свойства нестационарных движений в гидродинамике и в магнитной гидромеханике (I). *An. şt. Univ. Iaşi*, S. I, 6, 1960, 265—290.
10. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Москва, Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1950.
11. Miron R. Asupra sferei neolonome şi planului neolonom. *An. şt. Univ. Iaşi*, S. I. 1, 1955, 43—52.
12. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. Москва, Изд. ин лит 1961.

ДИФЕРЕНЦИАЛНО ГЕОМЕТРИЧНО РАЗГЛЕЖДАНЕ НА НЯКОИ НЕСТАЦИОНАРНИ ПРОЦЕСИ В ХИДРОДИНАМИКАТА

Г Георгиев (Яш, РНР)

(Резюме)

Настоящата работа е продължение на публикацията (9), в която бе изучавана геометричната структура на нестационарните процеси в хидродинамиката. Тук се разглежда тензорът на деформацията на полето от скоростите. В частност изучава се анулирането на симетричната част на този тензор. В този случай скоростта е ортогонална на полярната равнина с корелация нула, а дивергенцията и втората ротация са равни на нула.

В § 4 са изложени релациите, свързващи алгебричните (евклидови) инварианти на деформационния тензор и на движението, т. е. инвариантите на полето на скоростите, на траекториите и на нехолономното ор-

тогонално многообразие. Тези релации се изразяват интересно геометрически в случай на винтови движения и на движения без вихри.

В следващите параграфи се изучават: адиабатично движение (§ 5), винтово движение (§ 7), трансверзално движение (§ 8) на различни флуиди, като във всеки отделен случай са установени условията за допустимост, съществуването на движението и общността на решението.

В края на работата са изучени следните въпроси: а) нестационарното движение на несвиваем вискозен флуид, за който $\bar{v}$, rot $\bar{v}$, rot rot $\bar{v}$ образуват, във всеки момент, една ортогонална холономна система (§ 9), и б) протичането на един идеален флуид, за който тоталната енергия на частиците е една и съща за всички точки.

CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES SUR QUELQUES PROCESSUS NON-STATIONNAIRES DE LA HYDRODYNAMIQUE

G. Guéorguiev

(Résumé)

La note fait suite au travail [9] dans lequel on a étudié la structure géométrique des processus non-stationnaires de la hydrodynamique. Elle contient des considérations relatives au tenseur de déformation du champ des vitesses. On étudie particulièrement le cas de l'annulation de la partie symétrique de ce tenseur; dans ce cas, la vitesse est orthogonale au plan polaire de la corrélation nulle, tandis que, la divergence et le second tourbillon sont nuls.

Dans le 4-ème paragraphe sont exposées les relations reliant les invariants algébriques (euclidéens) du tenseur de déformation et ceux du mouvement, c'est-à-dire ceux du champ des vitesses, des lignes de courant et ceux de la variété non-holonome orthogonale. Ces relations reçoivent des expressions géométriques remarquables dans le cas des mouvements hélicoïdaux et de ceux dépourvus de tourbillons.

Dans les paragraphes suivants, on étudie: le mouvement adiabatique (§ 5), le mouvement hélicoidal (§ 7), le mouvement transversal (§ 8) des différents fluides, en établissant, pour chacun de ces cas, les conditions d'admissibilité, l'existence d'un tel mouvement et la généralité de la solution.

A la fin, on étudie les questions suivantes: a) le mouvement non-stationnaire d'un fluide visqueux incompressible pour lequel $\bar{v}$, rot $\bar{v}$, rot rot $\bar{v}$ forment, à chaque instant, un système triplement orthogonal holonome (§ 9) et b) l'écoulement d'un fluide idéal ayant pour tous les points, la même énérgie totale de ses particules.