БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE DES SCIENCES DE BULGARIE
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VII

ВЪРХУ НЯКОИ АЛГЕБРИЧНИ КОВАРИАНТИ И НУЛИТЕ НА ПОЛИНОМИ

Н. Обрешков

Ако $f(x)$ е произволен полином от степен n и $g(x)$ е полином от степен m, полиномът

$$(1) \qquad \sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{n-m+\mu}{\mu}g^{(\mu)}(x)f^{(m-\mu)}(x)$$

се нарича полярна производна на $f(x)$ относно нулите на $g(x)$, които се наричат полюси. Полиномът (1) е от степен $n-m$ при $n \geqq m$ и тъждествено равен на нула при $n<m$. По една основна теорема на Лагер, ако нулите на $f(x)$ лежат в кръгова област K и нулите на $g(x)$ лежат в допълнителната кръгова област K_1, към която присъединяваме и контура на K, нулите на (1) лежат в K. В тази работа прецизирам тази теорема относно разположението на нулите на (1) вътре в K, т. е. в отворената област K и по контура ѝ.

Полиномът (1), както е известно, представлява ковариант при извършване на произволна недегенерована дробна линейна трансформация върху променливото x. В § 2 на настоящата работа установявам, че този ковариант не е единствен и по-точно всеки ковариант, който е билинеен спрямо два полинома $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и на производните им, има формата (до константен множител)

$$\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{p-\mu}{m-\mu}\binom{q-m+\mu}{\mu}f_1^{(\mu)}(x)f_2^{(m-\mu)}(x),$$

като тук p и q са степените на $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и m е произволно естествено число, ненадминаващо p и q. В § 3 извеждам обща теорема за нулите на такива коварианти, както и разглеждам и други коварианти, имащи връзка с горните. В § 4 доказвам някои нови теореми за нулите на класи от полиноми.

1. Върху някои теореми на Лагер

Една от основните теореми за нулите на полиномите е следната теорема на Лагер [1]:

Нека $f(z)$ е произволен полином от n-та степен, λ е комплексно число. Нека α е произволна нула на полинома

$$(1) \qquad f_1(z)=(\lambda-z)f'(z)+nf(z),$$

като $f(a) \neq 0$. *Тогава във всяка окръжност* C *и вън от нея, която минава през точките* a *и* λ, *има поне по една нула на* $f_1(z)$ *или всичките нули на този полином лежат по окръжността* C.

Очевидно от условието, че $f(a) \neq 0$, следва непосредствено, че $f'(a) \neq 0$ и $\lambda \neq a$ и за λ ще имаме

$$\lambda = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \tag{2}$$

Ще изложим едно доказателство на тази теорема, подобно на това, дадено в работата ни [1]. Да положим

$$z = \lambda + \frac{1}{y} \tag{3}$$

Когато z описва окръжността C, точката y ще опише права L, минаваща през точката β, дадена с $a = \lambda + \frac{1}{\beta}$ Да въведем полинома

$$F(y) = y^n f\left(\lambda + \frac{1}{y}\right) = y^n f(z), \tag{4}$$

за който ще имаме

$$F'(y) = ny^{n-1} f(z) - y^{n-2} f'(z) = y^{n-1} f_1(z). \tag{5}$$

От условието $f_1(a) = 0$ и $f(a) \neq 0$ следва, че

$$F'(\beta) = 0, \ F(\beta) \neq 0,$$

като вземем пред вид, че $\beta \neq 0$. Но тогава съгласно теоремата на Гаус—Люка от двете страни на правата L ще има поне по една нула на полинома $F(y)$ или всичките негови нули ще лежат на L. Като се върнем към равнината на z, получаваме изказаната теорема на Лагер.

От теоремата на Лагер следва следното предложение:

Нека нулите на полинома от n-та степен $f(z)$ да лежат в кръгова област K и λ е произволна точка, лежаща извън K. Тогава нулите на $f_1(z)$ лежат също в K. Не е безинтересно да докажем това следствие директно по следвания път. Действително при прилагане на трансформацията (3) на точката $z = \lambda$ отговаря $y = \infty$ и следователно на кръговата област K ще отговаря в равнината на y кръг K', в който ще лежат нулите на полинома $F(y)$. По теоремата на Гаус—Люка нулите на $F'(y)$ лежат също в K' и следователно нулите на $f'_1(z)$ ще лежат в K.

За реални полиноми $f(z)$ при реално число λ може да се прецизира предното предложение относно нереалните нули на $f_1(z)$. Именно нека z_p и $\bar{z}_p$ са две такива нули на $f(z)$ и y_p и $\bar{y}_p$ са съответните им трансформирани точки, които са нули на полинома $F(y)$. На правата L'_p, минаваща през точките y_p и $\bar{y}_p$, в равнината на y ще отговаря окръжност C'_p, минаваща през точките z_p, $\bar{z}_p$ и точката λ в равнината на z, която окръжност се свежда на права, ако точката λ е средата на отсечката $y_p \bar{y}_p$. На окръжността C''_p, описана около отсечката $y_p \bar{y}_p$ с диаметър тази отсечка, ще отговаря окръжност C_p, минаваща през точките z_p и z_p

и ортогонална на C'_p, като в частност, ако λ лежи на C''_p, последната окръжност е права линия. На кръга K''_p, ограничен от окръжността C''_p, ще отговаря тази кръгова област K_p, ограничена от окръжността (или правата) C_p, която не съдържа точката λ. Но съгласно теоремата на Иензен нереалните нули на полинома $F'(y)$ лежат във възможните такива кръгове K''_p. Следователно съществува следното предложение:

Нека $f(z)$ е реален полином и λ е произволно реално число. Нека z_p, z_p $(p=1, 2, \dots, k)$ са имагинерните нули на полинома $f(z)$, степента на който е n. Да означим с C'_p окръжността (евентуално правата), минаваща през точките z_p, $\bar{z}_p$ и λ, и с C_p окръжността (правата), минаваща през точките z_p, $\bar{z}_p$ и ортогонална на C'_p, $p=1, 2, \dots, k$. От двете кръгови области, ограничени от C_p, нека K_p е тази, която не съдържа точката λ. Тогава имагинерните нули на полинома $f_1(z)$ лежат в кръговите области $K_1, K_2, \dots, K_k$.

Полиномът $f_1(z)$ се нарича полярна производна на $f(z)$ относно полюса λ. Можем последователно с прилагане на същия оператор да получим полярни производни от k-ти ред $f_k(z)$, дефинирани следователно с

$$(6)\qquad f_\nu(z)=(\lambda-z)f'_{\nu-1}(z)+(n-\nu+1)f_{\nu-1}(z),\ \nu=1, 2, \dots, k; f_0(z)=f(z).$$

Полиномът $f_k(z)$ е от степен $n-k$ и при $k>n$ ще е равен тъждествено на нула. Както е известно, той представлява един алгебрически ковариант при дробно линейните трансформации. На основание на релацията (6) лесно получаваме явния израз за $f_k(z)$, а именно

$$(7)\qquad f_k(z)=k!\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n-\nu}{k-\nu}\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}(\lambda-z)^\nu.$$

Лагер [2] обобщава своята теорема, като използува при доказателството си доста комплициран път. По следвания начин неговата теорема може да се установи лесно, и то в прецизна форма.

Теорема I. *Нека $f(z)$ е произволен полином от n-та степен и λ е произволно комплексно число. Нека z_0 е произволна нула на $f_k(z)$ и числото λ да е отлично от z_0. При това, ако z_0 е и нула на $f(z)$, предполагаме, че кратността й не надминава $k-1$. Тогава във всяка окръжност C, минаваща през точките λ и z_0, има вътре и вън поне по една нула на полинома $f(z)$ или всичките нули на този полином лежат по C.*

Видяхме, че за полинома (4) имаме

$$F'(y)=y^{n-1}f_1(z).$$

По индуктивен път получаваме

$$(8)\qquad F^{(k)}(y)=k!\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{n-\nu}{k-\nu}\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}y^{n-k-\nu},$$

т. е.

$$(9)\qquad F^{(k)}(y)=y^{n-k}f_k(z).$$

Именно с диференциране на (8) и като вземем пред вид, че

$$\binom{n-\nu}{k-\nu}\frac{n-\nu+k}{\nu!}+\binom{n-\nu+1}{k-\nu+1}\frac{1}{(\nu-1)!}=(k+1)\binom{n-\nu}{k+1-\nu}\frac{1}{\nu!},$$

установяваме верността на формулата (8) и за производната $F^{(k+1)}(y)$. Формулата (9) следва индуктивно впрочем от (6) и от равенството

$$F^{(k+1)}(y)=(n-k)\,y^{n-k-1}f_k(z)-y^{n-k-2}f'_k(z).$$

На окръжността C отговаря в равнината на y една права L, минаваща през точка y_0, определена със $z_0=\lambda+\frac{1}{y_0}$, за която ще имаме

$$F^{(k)}(y_0)=0.$$

Съществува поне една производна $F^{(\mu)}(y)$, $0\leqq\mu<k$, която не се анулира за $y=y_0$. В противен случай би следвало, като вземем пред вид формулата (7), че полиномите $f(z), f'(z), \ldots, f^{(k)}(z)$ се анулират за $z=z_0$, което противоречи на условието в теоремата. Но тогава съгласно теоремата на Гаус—Люка ще има поне по една нула на полинома $F^{(\mu)}(y)$ във всяка от двете полуравнини, ограничени от правата L, или всичките нули на този полином ще лежат по правата L. Оттук очевидно на същото основание следва, че полиномът $F(y)$ ще има поне по една нула във въпросните полуравнини, или всичките му нули ще лежат по L. Като се върнем към равнината на комплексното променливо z, получаваме изказаната теорема.

Условията за λ и z_0 са съществени. Действително, ако $\lambda=z_0$, то трябва $f(z_0)$ да е равно на нула и можем да вземем такава малка окръжност C, минаваща през z_0, в която и по която освен z_0 да няма нула на полинома $f(z)$, стига z_0 да не е k-кратна нула на този полином. Последният обаче случай противоречи на условието в теоремата. Ако λ е отлично от z_0, но $f^{(\mu)}(z_0)=0$, $0\leqq\mu\leqq k-1$, от $f_k(z_0)=0$ следва, че и $f^{(k)}(z_0)=0$, т. е. z_0 е поне $k+1$-кратна нула на $f(z)$. Ако полиномът $f(z)$ не е тривиалният полином $c(z-z_0)^n$, за който твърдението в теоремата е очевидно, то $f(z)$ ще има поне една нула z_1, отлична от z_0, и ще има окръжност, минаваща през z_0 и точката λ (която в случая може да вземем произволно) и несъдържаща вътре и вън поне по една нула на $f(z)$ или други нули на $f(z)$ по нея.

При образуване на полярните производни $f_k(z)$ полюсът остава същият. При освобождаване от това ограничение при произволни комплексни числа $\lambda_1, \lambda_2, .\ \ , \lambda_m$ образуваме последователно полиномите

$$f_0(z)=f(z),\ f_1(z),\ f_2(z),\ldots,f_m(z)$$

с рекурентната зависимост

$$f_\nu(z)=(\lambda_\nu-z)\,f'_{\nu-1}(z)+(n-\nu+1)f_{\nu-1}(z),\quad \nu=1,2,\ldots,m.$$

Едно непосредствено изчисление води до формулата

$$f_m(z)=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu\binom{n-m+\nu}{\nu}g^{(\nu)}(z)\,f^{(m-\nu)}(z),$$

където $g(z)$ е полиномът

$$g(z)=(\lambda_1-z)(\lambda_2-z)\dots(\lambda_m-z).$$

От теоремата на Лагер следва непосредствено следната основна негова теорема:

Ако нулите на полинома $f(z)$ лежат в кръгова област K и нулите на $g(z)$ лежат извън тази област, нулите на $f_m(z)$ лежат също в областта K.

Оттук следва непосредствено, че ако нулите на $g(z)$ лежат в една кръгова област K, в която има поне една нула на $f_m(z)$, в K има и поне една нула на дадения полином $f(z)$. Обратно от това предложение следва предната теорема. Представлява интерес да се прецизира теоремата на Лагер относно разположението на въпросната нула по контура на областта K. Именно ще установим следното.

Теорема II. *Нека нулите на полинома $g(z)$ да лежат в една кръгова област K, в която лежи поне една нула z_0 на полярния полином $f_m(z)$. При това, ако z_0 съвпада с някоя нула на полинома $g(z)$, кратността на която е k и, ако z_0 е нула и на полинома $f(z)$, то кратността q на тази нула да не надминава $m-k-1$. Тогава вътре в K има поне една нула на $f(z)$ или всичките нули на полиномите $f(z)$ и $g(z)$ лежат по контура C на областта K. В последния случай и нулите на $f_m(z)$ ще лежат по C.*

Съгласно условието имаме

$$g(z)=(z-z_0)^k g_1(z),$$

където $g_1(z)$ е полином от степен $m-k$. Оттук при $\nu\geqq k$ по формулата на Лайбниц получаваме

$$g^{(\nu)}(z_0)=k!\binom{\nu}{k}g_1^{(\nu-k)}(z_0)$$

и очевидно $g^{(\nu)}(z_0)=0$ при $\nu<k$. Но тогава равенството

$$\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\binom{n-m+\nu}{\nu}g^{(\nu)}(z_0)\,f^{(m-\nu)}(z_0)=0$$

се свежда до равенството

$$\sum_{\mu=0}^{m-k}(-1)^{\mu}\binom{n-m+k+\mu}{\mu}g_1^{(\mu)}(z_0)\,f^{(m-k-\mu)}(z_0)=0,$$

което показва, че z_0 е нула на полярния полином

$$\sum_{\mu=0}^{n-k}(-1)^{\mu}\binom{n-m+k+\mu}{\mu}g_1^{(\mu)}(z)f^{(m-k-\mu)}(z),$$

като вече z_0 не е нула на полинома $g_1(z)$, т. е. не е полюс. Следователно при доказателството на теоремата можем да се ограничим на случая, когато z_0 не съвпада с нула на полинома $g(z)$ $(q\leqq m-1)$. Теоремата е очевидно вярна за $f_1(z)$. Предполагаме, че е вярна за полиномите $f_p(z)$,

$1 \leq p < m$. Ще установим, че тя е в сила и за полинома $f_m(z)$. Можем да предположим, че по окръжността (или правата) C, ограничаваща областта K, има нули на полинома $g(z)$. Ако именно няма такива нули по C, с намаляване на окръжността (или преместване на правата) C в случай, че K е вътрешността на C или с увеличение на окръжността C, когато K е външността на C, получаваме област, съдържаща нулите на $g(z)$ и точката z_0, като ограничаващата я окръжност (или права) минава през нула на $g(z)$. Нека λ е такава нула на $g(z)$ и кратността ѝ е p (ако има повече от една, вземаме произволно една от тях). Да въведем комплексното променливо

$$y = \frac{1}{z-\lambda} \tag{10}$$

и да положим $(g(z) = (z-\lambda)^p h(z),\ h(\lambda) \neq 0)$,

$$F(y) = y^n f\left(\lambda + \frac{1}{y}\right),\ y^m g\left(\lambda + \frac{1}{y}\right) = y^{m-p} h\left(\lambda + \frac{1}{y}\right) = H(y).$$

Понеже полярната производна $f_m(z)$ е ковариант, то до множител, степен на y, при прилагане на трансформацията (10) тази производна се свежда на полярната производна

$$\varphi(y) = \sum_{\mu=0}^{m-p} (-1)^\mu \binom{n-m+p+\mu}{\mu} H^{(\mu)}(y)\, F^{(m-\mu)}(y).$$

На окръжността C ще отговаря права L, като на областта K ще отговаря едната полуравнина D, ограничена от правата L. Следователно нулите на полинома $H(y)$ и точката $y_0 = \dfrac{1}{z_0 - \lambda}$ ще лежат в D. Но за $y = y_0$ ще имаме

$$\varphi(y_0) = 0. \tag{11}$$

Да предположим, че нямаме изключителния случай за полярната производна $\varphi(y)$. Тогава $F^{(p)}(y)$ ще има поне една y', лежаща вътре в D, или всичките нули на $F^{(p)}(y)$, както и тези на $H(y)$ и точката y_0 трябва да лежат по правата L. В първия случай по теоремата на Гаус—Люка ще има нули на $F(y)$ по правата L', минаваща през y' и успоредна на L, или от двете ѝ страни, т. е. има поне една нула на $F(y)$, лежаща вътре в полуравнината D. Във втория случай или всичките нули на $F(y)$ ще лежат по правата L, или от двете страни на тази права ще има поне по една нула на $F(y)$. Следователно в кръговата област K ще има вътре поне една нула на $f(z)$ или всичките нули на този полином, както и нулите на $g(z)$ ще лежат по окръжността C.

В изключителния случай ще имаме

$$F^{(p)}(y_0) = 0,\ F^{(p+1)}(y_0) = 0, \ldots,\ F^{(m-1)}(y_0) = 0$$

и от (11) получаваме, че и $F^{(m)}(y_0) = 0$. Но за k-тата производна $f^{(k)}(z)$ получаваме формулата

$$f^{(k)}(z) = k!\, y^{-n+k} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{n-\nu}{k-\nu} \frac{F^{(\nu)}(y)}{\nu!} y^\nu,$$

която ще установим в следващия параграф. Ако предположим, че

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\dots,\ f^{(p-1)}(z_0)=0, \tag{12}$$

от горната формула, като вземем пред вид, че $F^{(k)}(y_0)=0$, $p\leqq\nu\leqq m$, получаваме равенствата

$$f^{(\mu)}(z_0)=0,\ \mu=0,\ 1,\ 2,\dots,m,$$

които противоречат на условията на теоремата за точката z_0. Следователно всичките равенства (12) не могат да бъдат изпълнени. Но равенството $F^{(p)}(y_0)=0$ показва, че z_0 е нула на полярната производна

$$p!\sum_{\nu=0}^{p}\binom{n-\nu}{p-\nu}\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}(\lambda-z)^{\nu}.$$

Но тогава съгласно индуктивното допущане полиномът $f(z)$ ще има поне една нула вътре в кръговата област K или всичките нули на $f(z)$ и точката λ, както и z_0 ще лежат по контура C на K. Обаче вторият случай не може да се яви. Допускаме, че C е окръжност, което не е ограничение, понеже ако C е права, прилагаме предварително хомографна трансформация, която я свежда на окръжност. От равенствата

$$\frac{F^{(p)}(y)}{p!}=\binom{n}{p}f(z)y^{n-p}+\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}\binom{n-\nu}{p-\nu}\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}y^{n-p-\nu},$$

$$\frac{F^{(p+1)}(y)}{(p+1)!}=\binom{n}{p+1}f(z)y^{n-p-1}+\sum_{\nu=1}^{p+1}(-1)^{\nu}\binom{n-\nu}{p+1-\nu}\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}y^{n-p-1-\nu}$$

елиминираме $f(z)$, като от второто, умножено с y, изваждаме първото, умножено с $\frac{n-p}{p+1}$. Така получаваме

$$y\frac{F^{(p+1)}(y)}{(p+1)!}-\frac{n-p}{p+1}\frac{F^{(p)}(y)}{p!}=-\frac{1}{p+1}\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\nu}\binom{n-1-\nu}{p-\nu}\frac{f^{(\nu+1)}(z)}{\nu!}y^{n-1-p-\nu},$$

като използувахме факта, че ($\nu\leqq p$)

$$\binom{n-\nu}{p+1-\nu}-\frac{n-p}{p+1}\binom{n-\nu}{p-\nu}=\frac{\nu}{p+1}\binom{n-\nu}{p+1-\nu}.$$

Понеже $F^{(p)}(y_0)=F^{(p+1)}(y_0)=0$, следва, че p-тата полярна производна

$$p!\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\nu}\binom{n-1-\nu}{p-\nu}\frac{f^{(\nu+1)}(z)}{\nu!}(\lambda-z)^{\nu}$$

на $f'(z)$ се анулира за $z=z_0$. Да допуснем, че имаме изключителния случай

$$f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(p)}(z_0)=0.$$

От формулата (8) следва, че

$$F^{(p)}\,(y_0)=p!\binom{n}{p}f(z_0)\,y_0^{n-p},$$

т. е. трябва и $f(z_0)=0$, което видяхме, че противоречи. Но тогава, понеже точките λ и z_0 лежат по C, полиномът $f'(z)$ ще има поне нула вътре в C и поне една нула вън от C или всичките му нули ще лежат по C. Първият случай не може да се яви, понеже противоречи на теоремата на Гаус—Люка (предполагахме, че нулите на $f(z)$ лежат по C). Вторият случай е само тогава възможен, когато нулите на $f'(z)$ съвпадат с тези на $f(z)$, което е вярно само за полинома $f(z)=c\,(z-\omega)^n$. Но за този полином полярният полином $f_m(z)$ е равен на

$$f_m(z)=\frac{n!\,c}{(n-m)!}\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\frac{g^{(\nu)}(z)}{\nu!}(z-\omega)^{\nu+n-m}=\frac{n!\,c}{(n-m)!}(z-\omega)^{n-m}\,g(\omega)$$

и понеже този полином трябва да се анулира за $z=z_0$, следва, че $z_0=\omega$ или $g(\omega)=0$. Но това противоречи с условията в теоремата.

Последното твърдение в теоремата в случая, когато нулите на полиномите $f(z)$ и $g(z)$ лежат всичките по окръжността C, се вижда непосредствено, като трансформираме окръжността C в реалната ос с подходяща хомографна трансформация. Тогава нулите на трансформираните полиноми на $f(z)$ и $g(z)$ ще са всичките реални и по известно свойство и нулите на трансформираната полярна производна ще бъдат всичките реални.

Теоремата на Лагер е следствие от тази теорема. Именно тогава нулите на полинома $g(z)$ съвпадат с точката λ, която точка и точката z_0 лежат по окръжността C. За областта K може да се вземе затвореният кръг от окръжността C или външната област на тази окръжност, която се причислява към нея.

Предната теорема позволява да се прецизира класичната.

Теорема на Грейс. *Нека $z_1, z_2, \dots, z_n$ са произволни n комплексни числа, за които имаме*

$$a_0S_0+a_1S_1+a_2S_2+\cdots+a_nS_n=0, \tag{13}$$

където $S_0=1, S_1, S_2, \dots, S_n$ са елементарните симетрични функции на горните числа. Тогава във всяка кръгова област K, съдържаща точките $z_1, z_2, \dots, z_n$, има поне една нула на полинома

$$a_0+\binom{n}{1}a_1z+\binom{n}{2}a_2z^2+\cdots+a_nz^n.$$

Тук под кръгова област K се разбира затворена област. Явява се очевидно въпросът за възможното положение на въпросната нула в отворената област K. Както е известно, теоремата на Грейс се установява обикновено посредством теоремата на Лагер. Ние ще покажем, че теоремата ни II позволява да се разреши напълно поставеният въпрос. Да означим с $g(z)$ полинома

$$g(z)=(z_1-z)\,(z_2-z)\dots(z_{n-1}-z)=\sigma_{n-1}-z\,\sigma_{n-2}+z^2\sigma_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_0\,z^{n-1}.$$

Като положим

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a_\nu z^\nu,$$

за $(n-1)$-вия полярен полином $f_{n-1}(z)$ на $f(z)$, който е от първа степен, ще имаме

$$f_{n-1}(z)=(-1)^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^\mu(n-\mu)g^{(n-1-\mu)}(z)f^{(\mu)}(z).$$

При пресмятане на този полином можем да се ограничаваме само на написаните членове в следващите формули

$$f^{(\mu)}(z)=\frac{n!}{(n-\mu)!}[a_\mu+(n-\mu)a_{\mu+1}z+\cdots],$$

$$g^{(n-1-\mu)}(z)=(-1)^{n-1-\mu}[(n-1-\mu)!\,\sigma_\mu-(n-\mu)!\,\sigma_{\mu-1}z+\cdots].$$

Така получаваме, че

$$f_{n-1}(z)=a_0\sigma_0+a_1(\sigma_1+\sigma_0z)+a_2(\sigma_2+\sigma_1z)+\cdots+$$
$$+a_{n-1}(\sigma_{n-1}+\sigma_{n-2}z)+a_n\sigma_{n-1}z.$$

За $z=z_n$ получаваме оттук, че

$$f_{n-1}(z_n)=a_0S_0+a_1S_1+a_2S_2+\cdots+a_nS_n=0,$$

понеже $S_1=\sigma_1+\sigma_0z$, $S_2=\sigma_2+\sigma_1z,\ldots$ Нека между числата $z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},z_n$, равни на z_n, са $k+1$ на брой. Ако z_n е нула на $f(z)$, то в изключителния случай z_n ще бъде поне $n-1-k$-кратна нула на полинома $f(z)$. Но от $f_{n-1}(z_n)=0$, понеже

$$f(z_n)=f'(z_n)=\cdots=f^{(n-k-2)}(z_n)=0,$$

получаваме, че и $f^{(n-1-k)}(z_n)=0$, т. е. z_n ще бъде поне $n-k$-кратна нула на $f(z)$. Ако следователно $y_1,y_2,\ldots,y_n$ са нулите на $f(z)$, в изключителния случай между числата $z_1,z_2,\ldots,z_n,y_1,y_2,\ldots,y_n$ ще има поне $n+1$ числа, равни помежду си. Ако нямаме този изключителен случай, от теоремата II следва, че полиномът $f(z)$ ще има поне една нула вътре в областта K, т. е. в отворената област K или всичките нули на $f(z)$ и точките $z_1,z_2,\ldots,z_n$ ще лежат по окръжността C, ограничаваща K. Следователно ще имаме следната

Теорема III. *Нека $z_1,z_2,\ldots,z_n$ са произволни n комплексни числа, за които имаме*

$$a_0S_0+a_1S_1+a_2S_2+\cdots+a_nS_n=0,$$

където $S_0=1$, $S_1,S_2,\ldots,S_n$ означават елементарните симетрични функции на въпросните числа и $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ са произволни комплексни числа. Ако точките $z_1,z_2,\ldots,z_n$ лежат в една кръгова област K, полиномът

$$a_0+\binom{n}{1}a_1z+\binom{n}{2}a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

ще има поне една нула вътре в K или всичките му нули и точките $z_1, z_2, \dots, z_n$ *ще лежат по контура на K. При това, ако* $y_1, y_2 \dots, y_n$ *са нулите на* $f(z)$, *предполагаме, че между числата* $z_1, z_2, \dots, z_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ *няма поне* $n+1$ *равни помежду си.*

Предната теорема в една по-малко обща форма е доказана също от Диьодоне [1] по един по-сложен начин. Същият автор споменава една по-раншна работа на унгарския математик Егервари [1], у която е бил установен резултатът на Диьодоне.

Ще отбележим, че теоремата II може обратно да се изведе от теорема III по пътя, който се използува при теоремата на Грейс.

Изключителният случай в предната теорема действително може да се яви. Ако с $\varphi(z)$ означим полинома

$$\varphi(z)=(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)=z^n-S_1z^{n-1}+S_2z^{n-2}-\dots+(-1)^n S_n,$$

n-тата полярна производна на $f(z)$ ще бъде равна на

$$f_n(z)=\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\varphi^{(\mu)}(z)f^{(n-\mu)}(z) \tag{14}$$

и понеже тя е една константа, стойността ѝ е

$$f_n(z)=\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\varphi^{(\mu)}(0)f^{(n-\mu)}(0)=(-1)^n n!\sum_{\mu=0}^{n}a_\mu S_\mu . \tag{15}$$

Нека $k(1 \leq k \leq n)$ от числата $z_1, z_2, \dots, z_n$ са равни на $n+1-k$ числа от числата $y_1, y_2, \dots, y_n$. Ако с ζ означим общата стойност на тези $n+1$ числа, ще имаме

$$\varphi^{(\mu)}(\zeta)=0,\ 0\leq\mu\leq k-1,\ f^{(\nu)}(\zeta)=0,\ 0\leq\nu\leq n-k$$

и следователно (на основание на (14), (15)) ще имаме

$$\sum_{\mu=0}^{n}a_\mu S_\mu=0.$$

Значи предната релация е изпълнена, каквито и да са останалите $n-k$ нули на $\varphi(z)$ и останалите $k-1$ нули на $f(z)$.

Съгласно теоремата на Лагер, ако нулите на един полином от n-та степен $f(z)$ лежат в кръгова област K и нулите на полинома $g(z)$ лежат в допълнителната на K кръгова област K', нулите на полярния полином

$$\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{n-m+\mu}{\mu}g^{(\mu)}(z)f^{(m-\mu)}(z) \tag{16}$$

лежат в K. Тук K' е също затворена област, т. е. е допълнителна на отворената област K. На основание на теорема може да се реши въпросът за разположението на нули на $f(z)$ по контура C на областта K, който е и контур на областта K'.

Теорема IV. *Нека нулите на полинома от n-та степен* $f(z)$ *да лежат в кръгова област K и нулите на полинома* $g(z)$ *от m-та* *степен, $m<n$, да лежат в допълнителната кръгова област K' на отворената област K. При това предполагаме, че не всичките нули на полиномите $f(z)$ и $g(z)$ лежат по контура C на K. Тогава, ако една нула z_0 на полярния полином* (16) *лежи върху C, то z_0 е и нула на полинома $f(z)$, и ако z_0 е k-кратна нула на $g(z)$, то тя е поне $m+1-k$-кратна нула на $f(z)$.*

Действително нека една нула z_0 на (16) лежи върху C. Да предположим, че z_0 е k-кратна нула на $g(z)$ ($k=0$ означава, че z_0 не е нула на $g(z)$) и ако е нула на $f(z)$, кратността ѝ не надминава $m-1-k$. Но тогава, понеже нулите на $g(z)$ лежат в K' и z_0 лежи в същата област по теорема II, ще има една поне нула на полинома $f(z)$, която ще лежи вътре в K', т. е. извън затворената кръгова област K. Но това противоречи на условието на теоремата. Значи z_0 ще бъде поне $m-k$-кратна нула на $f(z)$. Но от равенството

$$\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{n-m+\mu}{\mu}g^{(\mu)}(z_0)\,f^{(m-\mu)}(z_0)=0,$$

понеже $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-k-1)}(z_0)=0$, следва, че и $f^{(m-k)}(z_0)=0$, т. е. z_0 е поне $m+1-k$-кратна нула на $f(z)$.

2. Алгебрически коварианти

В геометрията на нулите на полиномите от основно значение е теоремата на Грейс, отнасяща се за тъй наречените аполярни полиноми, т. е. полиноми

$$a_0+\binom{n}{1}a_1x+\binom{n}{2}a_1x^2+\cdots+a_nx^n,$$

$$b_0+\binom{n}{1}b_1x+\binom{n}{2}b_2x^2+\cdots+b_nx^n,$$

между коефициентите на които съществува връзката

$$a_0b_n-\binom{n}{1}a_1b_{n-1}+\binom{n}{2}a_2b_{n-2}-\cdots+(-1)^na_nb_0=0.$$

Лявата част на това равенство представлява един инвариант за двата полинома, когато върху променливото x се приложи дробна линейна трансформация и тя е единствената билинейна функция на коефициентите на тези полиноми, която притежава въпросното инвариантно свойство. Доказателство на последния факт е дадено например в работата на Диьодоне [1]. Но също така основно значение има и разглежданата в предния параграф полярна производна на полинома $f(x)$

$$\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{n-m+\mu}{\mu}g^{(\mu)}(x)f^{(m-\mu)}(x),$$

където нулите на полинома $g(x)$ се наричат полюси. Тази производна представлява ковариант на двата полинома $g(x)$ и $f(x)$ при дробните линейни трансформации. От интерес е да се проучи въпросът за единственост на тези коварианти, представляващи билинейна форма на полиномите $g(x)$ и $f(x)$ и техните производни. Както ще видим, съществуват по-общи коварианти. Именно ще установим следния нов факт:

Теорема V. *Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са произволни полиноми съответно от степени p и q и m е натурално число, ненадминаващо p и q. Тогава полиномът*

$$(1)\qquad \sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{p-\mu}{m-\mu}\binom{q-m+\mu}{\mu}f_1^{(\mu)}(x)f_2^{(m-\mu)}(x)$$

представлява ковариант на полиномите $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Освен това всеки ковариант на двата полинома $f_1(x)$ и $f_2(x)$, който е билинеен спрямо тези полиноми и производните им, до постоянен множител има горната форма.

Предварително ще изведем една помощна формула. Нека $f(x)$ е полином от степен n и да положим

$$F(y)=y^n f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Въпросната формула е следната:

$$(2)\qquad f^{(k)}(x)=k!\,y^{-n+k}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\binom{n-\nu}{k-\nu}\frac{F^{(\nu)}(y)}{\nu!}y^{\nu},$$

като под $f^{(0)}(x)$ се разбира $f(x)$.

Като диференцираме $f(x)=y^{-n}F(y)$ спрямо y, получаваме

$$f'(x)\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-ny^{-n-1}F(y)+y^{-n}F'(y),$$

или

$$f'(x)=ny^{-n+1}F(y)-y^{-n+2}F'(y)$$

и формулата (2) за $k=1$ е установена. Предполагаме, че тя е вярна за $f^{(k)}(x)$. Ще установим, че е вярна и за $(k+1)$-вата производна на $f(x)$. Като диференцираме (2) спрямо y, получаваме

$$f^{(k+1)}(x)\left(-\frac{1}{y^2}\right)=(-n+k)\,k!\,y^{-n+k-1}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\binom{n-\nu}{k-\nu}\frac{F^{(\nu)}(y)}{\nu!}y^{\nu}+$$

$$+k!\,y^{-n+k}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\binom{n-\nu}{k-\nu}\frac{F^{(\nu+1)}(y)}{\nu!}y^{\nu}+$$

$$+k!\,y^{-n+k}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu}\binom{n-\nu}{k-\nu}\frac{F^{(\nu)}(y)}{\nu!}\nu y^{\nu-1},$$

или

$$f^{(k+1)}(x)\left(-\frac{1}{y^2}\right)=(-1)^k\,k!\,y^{-n+k-1}\frac{F^{(k+1)}(y)}{k!}y^{k+1}+$$

$$+(-n+k)\,k!\,y^{-n+k-1}\binom{n}{k}F(y)+$$

$$+k!\;y^{-n+k-1}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\frac{F^{(\nu)}(y)}{\nu!}\left[(-n+k)\binom{n-\nu}{k-\nu}-\nu\binom{n+1-\nu}{k+1-\nu}+\nu\binom{n-\nu}{k-\nu}\right].$$

Понеже

$$(-n+k)\binom{n-\nu}{k-\nu}-\nu\binom{n+1-\nu}{k+1-\nu}+\nu\binom{n-\nu}{k-\nu}=-(k+1)\binom{n-\nu}{k+1-\nu},$$

предната формула става

$$f^{(k+1)}(x)=(k+1)!\,y^{-n+k+1}\sum_{\nu=0}^{k+1}(-1)^{\nu}\binom{n-\nu}{k+1-\nu}\frac{F^{(\nu)}(y)}{\nu!}y^{\nu},$$

с което доказателството се привършва.

Нека

$$\sum h_{\alpha_{\mu},\,\beta_{\nu}}\,f_1^{(\alpha_{\mu})}(x)\,f_2^{(\beta_{\nu})}(x) \tag{3}$$

е ковариант, билинеен спрямо полиномите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и производните им до ред m. Всяка неизродена дробна линейна трансформация се свежда на елементарните трансформации

$$1)\ y=x+\lambda;\qquad 2)\ y=\lambda x;\qquad 3)\ y=\frac{1}{x}\cdot$$

Първата трансформация не променя очевидно израза (3). При извършване на втората членът $hf_1^{(i_{\mu})}f_2^{(j_{\nu})}$ се умножава с $\lambda^{i_{\mu}+j_{\nu}}$ и следователно $i_{\mu}+j_{\nu}$ трябва да е равно на константа. Понеже фигурира член от формата $f_1 . f_2^{(m)}$, тази константа е равна на m. Търсеният ковариант може да се представи във вида

$$G(x)=\sum_{\mu=0}^{m}a_{\mu}\binom{p-\mu}{m-\mu}\binom{q-m+\mu}{\mu}f_1^{(\mu)}(x)\,f^{(m-\mu)}(x),$$

където за опростяване сме въвели биномни множители, като числата a_{μ} подлежат на определяне. За опростяване да въведем означенията

$$F_1^{(\mu)}(y)=u_{\mu},\quad F_2^{(\nu)}(y)=t_{\nu},$$

където $F_1(y)$ и $F_2(y)$ означават полиномите на y

$$F_1(y)=y^p f_1\left(\frac{1}{y}\right),\qquad F_2(y)=y^q f_2\left(\frac{1}{y}\right)\cdot$$

Като приложим формулата (2) за израза $G(x)$, получаваме

$$G(x)=\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \binom{p-\mu}{m-\mu}\binom{q-m+\mu}{\mu}\mu!\, y^{-p+\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^\nu \frac{u_\nu}{\nu!}\binom{p-\nu}{\mu-\nu} y^\nu.$$

$$. y^{-q+m-\mu}(m-\mu)!\sum_{\tau=0}^{m-\mu}(-1)^\tau \binom{q-\tau}{m-\mu-\tau} y^\tau \frac{t_\tau}{\tau!}.$$

Но с лесно пресмятане получаваме

$$\binom{p-\mu}{m-\mu}\binom{q-m+\mu}{\mu}\mu!\,\frac{1}{\nu!}\binom{p-\nu}{\mu-\nu}(m-\mu)!\,\frac{1}{\tau!}\binom{q-\tau}{m-\mu-\tau}=$$

$$=\frac{1}{(p-m)!\,(q-m)!}\;\frac{(p-\nu)!\,(q-\tau)!}{\nu!\,\tau!\,(\mu-\nu)!\,(m-\mu-\tau)!}$$

и следователно за $G(x)$ ще имаме

$$G(x)=K\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \sum_{\nu=0}^{\mu}\sum_{\tau=0}^{m-\mu}(-1)^{\nu+\tau}\frac{(p-\nu)!\,(q-\tau)!}{\nu!\,\tau!\,(u-\nu)!\,(m-\mu-\tau)!}u_\nu t_\tau, \tag{4}$$

където K означава числото

$$K=\frac{1}{(p-m)!\,(q-m)!}y^{-p-q+m}.$$

Ако $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ е произволна редица, да въведем оператор ∇, дефиниран с

$$\nabla \gamma_n=\gamma_n+\gamma_{n+1}, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

и итерациите

$$\nabla^2 \gamma_n=\nabla(\nabla \gamma_n),\; \nabla^3 \gamma_n=\nabla(\nabla^2 \gamma_n), \ldots$$

Лесно установяваме формулата

$$\nabla^k \gamma_n=\gamma_n+\binom{k}{1}\gamma_{n+1}+\binom{k}{2}\gamma_{n+2}+\cdots+\gamma_{n+k}.$$

За да бъде изразът $G(x)$ ковариант, очевидно трябва коефициентите на $u_\nu t_\tau$ при $\nu+\tau<m$ в израза (4) да бъдат равни на нула. Ще намерим коефициента на $u_\nu t_\tau$ при $\nu \leqq \tau$ и $\nu+\tau \leqq m-1$. Понеже индексите на сумиране във въпросния израз са подчинени на условията

$$0 \leqq \mu \leqq m, \quad 0 \leqq \nu \leqq \mu, \quad 0 \leqq \tau \leqq m-\mu,$$

въпросният коефициент ще е равен на

$$K\frac{(p-\nu)!\,(q-\tau)!}{\nu!\,\tau!}(-y)^{\nu+\tau}\sum_{\mu=\nu}^{m-\tau}\frac{a_\mu}{(\mu-\nu)!\,(m-\mu-\tau)!}$$

Като положим $\mu=\nu+s$, изразът в сумата става

$$\sum_{s=0}^{m-\nu-\tau}\frac{a_{\nu+s}}{s!\,(m-\nu-\tau-s)!}=\frac{1}{(m-\nu-\tau)!}\sum_{s=0}^{m-\nu-\tau}\binom{m-\nu-\tau}{s}a_{\nu+s}=$$

$$=\frac{1}{(m-\nu-\tau)!}\,\Gamma^{m-\nu-\tau}\,a_\nu.$$

Следователно числата $\Gamma^{m-\nu-\tau}\,a_\nu$ трябва да бъдат равни на нула. Специално (при $\nu=0$) ще имаме

$$\Gamma\,a_0=0,\quad \Gamma^2 a_0=0,\ldots,\Gamma^m a_0=0.$$

Ако изберем a_0 равно на 1, лесно се вижда от предните равенства, че числата $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ трябва алтернативно да са равни на 1 и -1, т. е.

$$a_\mu=(-1)^\mu,\quad \mu=0,1,2,\ldots,m.$$

Очевидно от това следва, че $\Gamma^k a_h=0$ за всяко k и h, подчинени на условието $k+h\leqq m$, $k\geqq 0$, $h\geqq 0$. Ако с $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ означим редицата $a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_0$, с размяна на ν с τ в израза (4) се вижда непосредствено, че коефициентът на $u_\nu t_\tau$ при $\nu>\tau$ и $\nu+\tau\leqq m-1$ е равен до множител на $\Gamma^{m-\nu-\tau}\beta_\tau$ и следователно е равен на нула. Ако следователно с $G_1(y)$ означим съответствуващия израз (1) за полиномите $F_1(y)$ и $F_2(y)$, ще имаме

$$G(x)=y^{-p-q+m}\,G_1(y).$$

При предните изводи предполагахме, че m не надминава степените p и q на полиномите $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Нека m е цяло число, по-голямо от p. Тогава изразът $G(x)$ ще има формата

$$G(x)=\delta_0 f_1^{(p)}(x)f_2^{(m-p)}(x)+\delta_1 f_1^{(p-1)}(x)\,f_2^{(m+1-p)}(x)+\cdots+\delta_p f_1(x)f_2^{(m)}(x).$$

При прилагане на трансформацията $x=\frac{1}{y}$ коефициентът на $F_1^{(p)}(y)F_2(y)$ ще е равен на $(-1)^p\,\frac{1}{p!}\,y^{p-q}\delta_0$ и понеже трябва да е равен на нула, следва, че $\delta_0=0$. В останалия израз $G(x)$ коефициентът до множител, отличен от нула, на $F_1{}^{(p-1)}(y)\,F_2(y)$ е равен на δ_1 и следователно $\delta_1=0$. Продължавайки така, като разглеждаме коефициентите на $F_1^{(\lambda)}(y)F_2(y)$, $0\leqq\lambda\leqq p-2$, виждаме, че всичките числа $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ трябва да са равни на нула, което показва, че ковариант от разглеждания вид не съществува. Така теоремата е установена напълно.

Напълно аналогично могат да се намерят коварианти за повече от два полинома, които са линейни спрямо полиномите и производните им поотделно. Така например нека $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ са три полинома съответно от степени n_1, n_2 и n_3. По следвания път лесно установяваме, че ковариантът, съдържащ до първата производна, ще е равен на

$$J=\alpha f_1'(x)f_2(x)f_3(x)+\beta f_2'(x)f_1(x)f_3(x)+\gamma f_3'(x)f_1(x)f_2(x),$$

където α, β и γ са произволни числа, но свързани с релацията

$$n_1\alpha+n_2\beta+n_3\gamma=0.$$

Ако J_1 е трансформираният израз J при прилагане на заместването $x=\frac{1}{y}$, имаме

$$J=y^{-n_1-n_2-n_3+2}\,J_1.$$

Ковариантът J може да се представи и така:

$$\mu f_1(x)\,[n_3 f_2'(x) f_3(x)-n_2 f_3'(x) f_2(x)]+\nu f_2(x)\,[n_3 f_1'(x) f_3(x)-n_1 f_3'(x) f_1(x)],$$

където μ и ν са произволни числа.

Ковариантът от същите полиноми, съдържащ до втори производни, трябва да има вида

$$J=a_1 f_1''(x) f_2(x) f_3(x)+a_2 f_2''(x) f_1(x) f_3(x)+a_3 f_3''(x) f_1(x) f_2(x)+$$
$$+a_4 f_1'(x) f_2'(x) f_3(x)+a_5 f_1'(x) f_3'(x) f_2(x)+a_6 f_2'(x) f_3'(x) f_2(x),$$

където $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ са константи. За простота при прилагане на трансформацията $x=\frac{1}{y}$ пишем горното равенство във вида

$$\frac{J}{f_1(x) f_2(x) f_3(x)}=a_1\frac{f_1''(x)}{f_1(x)}+a_2\frac{f_2''(x)}{f_2(x)}+a_3\frac{f_3''(x)}{f_3(x)}+a_4\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}$$
$$\cdot\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+a_5\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}\,\frac{f_3'(x)}{f_3(x)}+a_6\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}\cdot\frac{f_3'(x)}{f_3(x)}.$$

Като следваме същия път, намираме, че J се представя така:

$$J=n_2 n_3 \beta_1 f_1''(x) f_2(x) f_3(x)+n_1 n_3 \beta_2 f_2''(x) f_1(x) f_3(x)+n_1 n_2 \beta_3 f_3''(x) f_1(x) f_2(x)+$$
$$+n_1 \gamma_1 f_1(x) f_2'(x) f_3'(x)+n_2 \gamma_2 f_2(x) f_1'(x) f_3'(x)+n_3 \gamma_3 f_3(x) f_1'(x) f_2'(x),$$

където $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ са произволни параметри и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ са определени с равенствата

$$\gamma_1=-(n_1-1)\beta_1+(n_2-1)\beta_2+(n_3-1)\beta_3,$$
$$\gamma_2=-(n_2-1)\beta_2+(n_1-1)\beta_1+(n_3-1)\beta_3,$$
$$\gamma_3=-(n_3-1)\beta_3+(n_1-1)\beta_1+(n_2-1)\beta_2.$$

При това, ако J_1 е трансформираният израз при прилагане на заместването $x=\frac{1}{y}$, имаме

$$J=y^{-n_1-n_2-n_3+4}\,J_1.$$

Общата проблема за алгебрически коварианти може да се формулира така: Дадени са m полиноми $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$. Ще трябва да се намерят полиномите на предните полиноми и на техни производни, които при прилагане на произволна дробна линейна субституция на променливото до множител, независещ от въпросните полиноми, остават същи и за трансформираните полиноми.

За един полином $f(x)$ съответните коварианти са полиноми на $f(x)$ и на негови производни

$$(5)\qquad R\left(f, f', \frac{f''}{2!}, \frac{f'''}{3!}, \ldots, \frac{f^{(k)}}{k!}\right),$$

където за удобство сме въвели факториели. Ако въведем означенията

$$f(x)=x_0,\quad f'(x)=x_1,\quad \frac{f''(x)}{2!}=x_2,\ldots,\ \frac{f^{(k)}(x)}{k!}=x_k,$$

горната функция става

$$(6)\qquad R(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Полиномът (5) ще бъде ковариант, ако при прилагане на произволна недегенерована дробна линейна трансформация върху x до множител, независим от $f(x)$, не се изменя. Очевидно (5) не се изменя при трансформацията $x=y+h$. С прилагане на трансформацията $y=\lambda x$ се вижда, че функцията (6) трябва да бъде изобарна, т. е. всеки неин член да има едно и също тегло. Ако означим с (n—степен на $f(x)$)

$$F(y)=y^n f\left(\frac{1}{y}\right),\quad F(y)=y_0,\quad F'(y)=y_1,\quad \frac{F''(y)}{2!}=y_2,\ldots,\ \frac{F^{(k)}(y)}{k!}=y_k,$$

то с трансформацията $y=\frac{1}{x}$, като се използува формулата (2), виждаме, че трябва да съществува равенство от вида

$$R(x_0, x_1, \ldots, x_k)=\varphi(y)\ R(y_0, y_1, \ldots, y_k),$$

като променливите $x_0, x_1, \ldots, x_k$ и $y_0, y_1, \ldots, y_k$ са свързани с релациите

$$x_\mu=y^{-n+\mu}\sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^\nu\binom{n-\nu}{\mu-\nu}y_\nu y^\nu,\quad \nu=0, 1, 2, \ldots, k.$$

От това условие междувпрочем следва, че функцията (6) трябва да бъде и хомогенна. Ще разгледаме някои характерни частни случаи, имащи значение за нулите на полиномите. Нека n е степента на полинома $f(x)$. Непосредствено се вижда, че ковариантът от степен 2 и съдържащ до втора производна е този на Хесе

$$(7)\qquad (n-1)f'^2(x)-nf(x)f''(x).$$

Ще дадем едно явно представяне на (7), като използуваме полинома на променливото t

$$(8)\qquad f(x+t)=f(x)+tf'(x)+t^2\frac{f''(x)}{2!}+\cdots+t^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

Ако въведем представянето

$$f(x+t)=f(x)(1+a_1 t)(1+a_2 t)\ldots(1+a_n t),\quad f(x)\neq 0,$$

и с $S_0=1, S_1, S_2, \ldots$ означим елементарните симетрични функции на $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ще имаме

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=S_1,\quad \frac{f''(x)}{2!f(x)}=S_2,\quad \frac{f^{(n)}(x)}{n!f(x)}=S_n.$$

Нулите на полинома (8) са числата $-\frac{1}{a_\mu}$, $\mu=1, 2, \ldots, n$. Ако $f(x)\neq 0$,

$$(n-1)\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2-n\frac{f''(x)}{f(x)}=(n-1)\ S_1{}^2-2\,n\,S_2=(n-1)\,\Sigma a_1{}^2-2\,\Sigma a_1\,a_2$$

и следователно

$$(n-1)\,f'^2(x)-nf(x)f''(x)=f^2(x)\sum_{\mu<\nu}^{1\ldots n}(a_\mu-a_\nu)^2.$$

Да намерим ковариантa от трета степен и трети ред (т. е. съдържащ до трети производни). Той ще има вида

$$I=\alpha f'^3(x)+\beta f'(x)f''(x)f(x)+\gamma f'''(x)f^2(x).$$

Като въведем за простота означенията

$$y\frac{F'(y)}{F(y)}=\varphi_1,\ y^2\frac{F''(y)}{F(y)}=\varphi_2,\ y^3\frac{F'''(y)}{F(y)}=\varphi_3,$$

ще имаме

$$\frac{I}{y^3f^3(x)}=\alpha\,(n-\varphi_1)^3+\beta(n-\varphi_1)[n(n-1)-2(n-1)\,\varphi_1+\varphi_2]+$$
$$+\gamma\,[n\,(n-1)\,(n-2)-3\,(n-1)\,(n-2)\,\varphi_1+3\,(n-2)\varphi_2-\varphi_3].$$

Като приравним с нула свободния член и коефициентите на φ_1, $\varphi_1{}^2$ и φ_2, получаваме уравненията

$$\alpha\,n^3+\beta\,n^2\,(n-1)+\gamma n(n-1)\,(n-2)=0,$$
$$-3\,\alpha\,n^2-3\,\beta\,n\,(n-1)-3\,\gamma\,(n-1)\,(n-2)=0,$$
$$3\,\alpha n+\beta\,(2\,n-2)=0,$$
$$\beta\,n+3\,\gamma\,(n-2)=0.$$

Първите две уравнения са идентични и се удовлетворяват от значенията на β и γ, получени от третото и четвъртото уравнение. Така получаваме, че $I=\lambda\,I'$, където λ е произволно число и I' е ковариантът

$$I'=2\,(n-1)(n-2)f'^3(x)-3\,n\,(n-2)\,f'(x)\,f''(x)f(x)+n^2f'''(x)\,f^2(x).$$

Ако I_t е трансформираният израз за I, имаме

$$I=y^{-3\,n+6}I_t.$$

Като използуваме елементарните симетрични функции за I', получаваме

$$\frac{I'}{f^3(x)}=2\,L,\quad L=(n-1)\,(n-2)\,S_1^3-3\,n\,(n-2)\,S_1S_2+3\,n^2\,S_3.$$

Но имаме

$$S_1^3=\sum a_1^3+3\sum a_1^2\,a_2+6\sum a_1\,a_2\,a_3,$$
$$S_1\,S_2=\sum a_1^2a_2+3\sum a_1\,a_2\,a_3$$

и с прости пресмятания получаваме равенството

$$L=(n-1)\,(n-2)\sum a_1^3-3\,(n-2)\sum a_1^2a_2+12\sum a_1\,a_2\,a_3,$$

Не е трудно да се види, че горният израз представлява симетричната функция

$$L=\Sigma(a_1-a_2)^2(a_1-a_3).$$

Действително тази функция е следната:

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2-2a_1a_2)[(n-2)(a_1+a_2)-2a_3-2a_4-\ldots-2a_n]+\\&+(a_1^2+a_3^2-2a_1a_3)[(n-2)(a_1+a_3)-2a_2-2a_4-\qquad-2a_n]+\\&+\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\\&+(a_1^2+a_n^2-2a_1a_n)[(n-2)(a_1+a_n)-2a_2-2a_3-\qquad-2a_{n-1}]+\\&+(a_2^2+a_3^2-2a_2a_3)[(n-2)(a_2+a_3)-2a_1-2a_4-\ldots-2a_n]+\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;+\\&+(a_{n-1}^2+a_n^2-2a_{n-1}a_n)[(n-2)(a_{n-1}+a_n)-2a_1-2a_2-\qquad-2a_{n-2}].\end{aligned}$$

Очевидно a_1^3 ще се яви $(n-1)(n-2)$ пъти. В същата развита сума множителят на $a_1^2a_2$ ще бъде $n-2-4(n-2)=-3(n-2)$ и $a_1a_2a_3$ ще се яви 12 пъти. Така установихме формулата

$$I'=2f^3(x)\,\Sigma(a_1-a_2)^2(a_1-a_3).$$

Ще намерим и общата форма на ковариантите от четвърта степен и четвърти ред. Те ще имат формата

$$\begin{aligned}I=\alpha f'^4(x)+\beta f^{\cdot}(x)f'^2(x)f^2(x)+\\+\delta f^{\mathrm{III}}(x)f'(x)f^2(x)+\varepsilon f^{\mathrm{IV}}(x)f^3(x).\end{aligned}$$

Като си служим с предните означения, допълнени с $y^4\frac{F^{\mathrm{IV}}(y)}{F(y)}=\varphi_4$, и използуваме формулите (2), получаваме

$$\begin{aligned}\frac{I}{y^4f^4(x)}=\alpha(n^4-4n^3\varphi_1+6n^2\varphi_1^2-4n\varphi_1^3+\varphi_1^4)+\\+\beta[n^3(n-1)-4n^2(n-1)\varphi_1+5n(n-1)\varphi_1^2+n^2\varphi_2-2n\varphi_1\varphi_2-\\-2(n-1)\varphi_1^3+\varphi_1^2\varphi_2]+\\+\gamma[n^2(n-1)^2+4(n-1)^2\varphi_1^2+\varphi_2^2-4n(n-1)^2\varphi_1+2n(n-1)\varphi_2-4(n-1)\varphi_1\varphi_2]+\\+\delta[n^2(n-1)(n-2)-4n(n-1)(n-2)\varphi_1+3n(n-2)\varphi_2-n\varphi_3+\\+3(n-1)(n-2)\varphi_1^2-3(n-2)\varphi_1\varphi_2+\varphi_1\varphi_3]+\varepsilon[n(n-1)(n-2)(n-3)-\\-4(n-1)(n-2)(n-3)\varphi_1+6(n-2)(n-3)\varphi_2-4(n-3)\varphi_3+\varphi_4].\end{aligned}$$

Свободният член вдясно и коефициентите на φ_1, φ_1^2, φ_1^3, φ_3, φ_1, φ_2 трябва да бъдат равни на нула. Така получаваме уравненията (първите две идентични с уравнението)

$$(9)\quad n^3\alpha+n^2(n-1)\beta+n(n-1)^2\gamma+n(n-1)(n-2)\delta+(n-1)(n-2)(n-3)\varepsilon=0,$$

$$(10)\quad 6n^2\alpha+5n(n-1)\beta+4(n-1)^2\gamma+3(n-1)(n-2)\delta=0,$$

$$(11)\quad 2n\alpha+(n-1)\beta=0,$$

$$(12)\quad n\delta+4(n-3)\varepsilon=0,$$

$$(13)\quad 2n\beta+4(n-1)\gamma+3(n-2)\delta=0,$$

$$(14)\quad n^2\beta+2n(n-1)\gamma+3n(n-2)\delta+6(n-2)(n-3)\varepsilon=0.$$

Ако положим $\alpha=n-1$, от (11) получаваме за β стойността $\beta=-2n$. Уравнението (13) става

$$(15)\quad 4(n-1)\gamma+3(n-2)\delta=-2n\beta=4n^2.$$

Уравнението (10) не се различава от предното, понеже

$$4(n-1)^2\gamma+3(n-1)(n-2)\delta=-6n^2\alpha-5n(n-1)\beta=4n^2(n-1).$$

Като положим $\delta=4\mu(n-1)(n-3)$, от (12) получаваме $\varepsilon=-n(n-1)\mu$ и от (15) за γ ще имаме

$$\gamma=\frac{n^2}{n-1}-3(n-2)(n-3)\mu.$$

Уравнението (14) при предните стойности на α, β, γ, δ, ε се удовлетворява понеже

$$n^2\beta+2n(n-1)\gamma+3n(n-2)\delta+6(n-2)(n-3)\varepsilon=\frac{3}{2}(n-2)[n\delta+4(n-3)\varepsilon]=0$$

Със заместване се вижда, че и уравнението (9) се удовлетворява. Така за ковариантa I получихме израза

$$I=(n-1)f'^4(x)-2nf''(x)f'^2(x)f(x)+\left[\frac{n^2}{n-1}-\mu(n-2)(n-3)\right]f''^2(x)f^2(x)+$$
$$+4\mu(n-1)(n-3)f^{\mathrm{III}}(x)f'(x)f^2(x)-\mu n(n-1)f^{\mathrm{IV}}(x)f^3(x),$$

където μ е произволен параметър. Ако I' е трансформираният на I при заместването $y=\frac{1}{x}$, от предните равенства следва, че

$$I=y^{-4n+8}\,I'.$$

Но ковариантът

$$(n-1)^2f'^4(x)-2n(n-1)f'^2(x)f''(x)f(x)+n^2f''^2(x)f^2(x)$$

представлява квадратът на хесиана

$$H=(n-1)f'^2(x)-nf(x)f''(x),$$

а ковариантът

$$n(n-1)f^{\mathrm{IV}}(x)f^3(x)-4(n-1)(n-3)f^{\mathrm{III}}(x)f'(x)f^2(x)+$$
$$3(n-2)(n-3)f''^2(x)f^2(x)$$

е произведение на ковариантa от степен две и ред 4

$$L = n(n-1) f^{\mathrm{IV}}(x) f(x) - 4(n-1)(n-3) f'''(x) f'(x) +$$

$$(16) \qquad + 3(n-2)(n-3) f''^2(x)$$

с $f^2(x)$. Следователно общата форма на ковариантите от степен и ред 4 ще бъде

$$a H^2 + b L f^2(x),$$

където a и b са произволни числа.

Ще намерим едно представяне на L, аналогично на това на H. Като използуваме елементарните симетрични функции за L, получаваме

$$L = 12 f^2(x) L_1, \quad L_1 = (n-2)(n-3) S_2^2 - 2(n-1)(n-3) S_1 S_3 + 2n(n-1) S_4.$$

Но имаме

$$S_2^2 = \sum a_1^2 a_2^2 + 2\sum a_1^2 a_2 a_3 + 6 \sum a_1 a_2 a_3 a_4,$$

$$S_1 S_3 = \sum a_1^2 a_2 a_3 + 4\sum a_1 a_2 a_3 a_4$$

и със заместване за L_1 ще имаме

$$L_1 = (n-2)(n-3) \sum a_1^2 a_2^2 - 2(n-3) \sum a_1^2 a_2 a_3 + 12 \sum a_1 a_2 a_3 a_4.$$

Не е трудно да се види, че

$$L_1 = \Sigma (a_1 - a_2)^2 (a_3 - a_4)^2.$$

Така вдясно $a_1^2 a_2^2$ фигурира в членовете

$$(a_1 - a_k)^2 (a_2 - a_3)^3, \quad k \neq s, \ k \neq 1, 2; \quad s \neq 1, 2$$

и следователно се среща $(n-2)(n-3)$ пъти. Подобно $a_1^2 a_2 a_3$ фигурира само в членовете $(a_2 - a_3)^2 (a_1 - a_k)^2$ $k \neq 2, 3$ и следователно в дясната част ще има коефициент равен на $-2(n-3)$ и непосредствено се вижда, че коефициентът на $a_1 a_2 a_3 a_4$ в тази част е равен на 12.

Следователно за коварианта L съществува представянето

$$(17) \qquad L = 12 f^2(x) \Sigma (a_1 - a_2)^2 (a_3 - a_4)^2.$$

Получените представяния на алгебричните коварианти са характерни. Те изразяват общи свойства на тези коварианти, които ще изследваме в следващи работи.

3. Върху някои свойства на алгебрически коварианти във връзка с нулите на полиномите

В предния параграф установихме, че за два полинома $f_1(x)$ и $f_2(x)$ от степени съответно p и q полиномът

$$g_m(x) = \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{\mu} \binom{p-\mu}{m-\mu} \binom{q-m+\mu}{\mu} f_1^{(\mu)}(x) f_2^{(m-\mu)}(x)$$

(1)

$$f_1(x)=\sum_{\nu=0}^{p} a_\nu x^\nu,\quad f_2(x)=\sum_{\nu=0}^{q} b_\nu x^\nu,$$

при m p, $m \leqq q$ представлява един техен ковариант. На пръв поглед полиномът (1) е от степен, ненадвишаваща $p+q-m$. *Ще установим, че степента на този полином не надвишава числото* $p+q-2m$. Да означим за простота с h_μ числото

$$h_\mu=(-1)^\mu \binom{p-\mu}{m-\mu}\binom{q-m+\mu}{\mu}$$

и с (ν, μ) означаваме числото $\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)$, ако $\nu \geqq \mu$, и нула, ако $\nu < \mu$. Тогава коефициентът t_k на $x^{p+q-m-k}$ при $0 \leqq k \leqq m$ в полинома $g_m(x)$, както лесно се вижда, е равен на

$$t_k=\sum_{\mu=0}^{m} h_\mu \sum_{s=0}^{k}(p-s, \mu)(q-k+s,\ m-\mu)\, a_{p-s}\, b_{q-k+s}.$$

Ако въведем числата

$$\alpha=\max(0,\ m-q-s+k),\quad \beta=\min(m,\ p-s),$$

коефициентът на $a_{p-s}\, b_{q-k+s}$ в t_k може да се пише така:

$$\sum_{\mu=\alpha}^{\beta} h_\mu (p-s, \mu)(q-k+s,\ m-\mu)$$

или

$$(2)\qquad (-1)^\alpha \frac{(p-s)!(q-k+s)!}{(p-m)!(q-m)!(\beta-\alpha)!}\sum_{\nu=0}^{\beta-\alpha}(-1)^\nu T_\nu \binom{\beta-\alpha}{\nu},$$

където T_ν означава числото

$$T_\nu=\frac{\nu!(p-\alpha-\nu)!(q-m+\alpha+\nu)!(\beta-\alpha-\nu)!}{(m-\alpha-\nu)!(\alpha+\nu)!(p-s-\alpha-\nu)!(q-k+s-m+\alpha+\nu)!}.$$

По-нататък ще използуваме простия факт, че за всеки полином

$$Q(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n$$

имаме

$$(3)\qquad \sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu Q(\mu)\binom{n}{\mu}=(-1)^n n!\, c_n.$$

Проверката на горното е непосредствена, като пишем полинома $Q(x)$ във формата

$$Q(x)=d_0+d_0x+d_2x(x-1)+\ldots+d_nx(x-1)\ldots(x-n+1),\quad d_n=c_n.$$

Ще установим, че за $0 \leqq k < m$ числата (2) са равни на нула. Ще трябва да разгледаме 4 случая:

1. Нека

$$m \leqq p-s,\quad m-q-s+k \leqq 0.$$

Тогава $\alpha=0$ и $\beta=m$ и T_ν става

$$T_\nu=\frac{(p-\nu)!}{(p-s-\nu)!}\;\frac{(q-m+\nu)!}{(q-k+s-m+\nu)!}.$$

Оттук е ясно, че T_ν представлява полином на ν от степен $s+k-s=k<m$ и следователно по (3) ще бъде равен на нула.

2. Нека сега

$$m\leqq p-s,\quad m-q-s+k>0.$$

Тогава $\alpha=m-q-s+k$, $\beta=m$. За T_ν имаме

$$T_\nu=\frac{(p+q-m-k+s-\nu)!}{(p+q-m-k-\nu)!}\;\frac{(k-s+\nu)!}{(m-q-s+k+\nu)!}.$$

Оттук се вижда, че T_ν е полином на ν от степен $s+q-m<s+q-k=\beta-\alpha$ и следователно коефициентът (2) е равен на нула.

3. Нека $m>p-s$, $m-q-s+k\leqq 0$. Тогава $\alpha=0$, $\beta=p-s$ и за T_ν имаме

$$T_\nu=\frac{(p-\nu)!}{(m-\nu)!}\;\frac{(q-m+\nu)!}{(q-k+s-m+\nu)!}.$$

Последният израз е полином на ν от степен $p-m+k-s<p-s=\beta-\alpha$ и имаме същото заключение.

4. Остава случаят, когато $m>p-s$, $m-q-s+k>0$, тогава

$$\alpha=m-q-s+k,\quad \beta=p-s$$

и T_ν има вида

$$T_\nu=\frac{(k-s+\nu)!}{(m-q+k-s+\nu)!}\;\frac{(p+q-m-k+s-\nu)!}{(q+s-k-\nu)!}.$$

Този израз е полином на ν от степен $q-m+p-m<p+q-m-k=\beta-\alpha$ и следва същото заключение.

На основание на (2) можем подобно да намерим коефициента на x^{p+q-2m} в $g_m(x)$. Така при $p\geqq 2m$, $q\geqq 2m$ той е равен на

$$(-1)^m m!\sum_{s=0}^{m}(-1)^s a_{p-s}b_{q-m+s}$$

и в общия случай е отличен от нула, като естествено при специални стойности той може да стане равен на нула. Следователно полиномът $g_m(x)$ е най-много от $p+q-2m$-та степен.

Ще установим сега една теорема за нулите на полинома $g_m(x)$.

Теорема VI. *Нека нулите на полинома от p-та степен $f_1(x)$ да лежат в една кръгова област K_1 и нулите на полинома от q-та степен да лежат в кръгова област K_2, която няма общи точки с K_1. Нека m е цяло положително число, ненадминаващо числата p и q. Тогава полиномът*

$$g_m(x)=\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^\mu\binom{p-\mu}{m-\mu}\binom{q-m+\mu}{\mu}f_1^{(\mu)}(x)f_2^{(m-\mu)}(x)\tag{4}$$

има точно $p-m$ нули в K_1 и $q-m$ нули в K_2 (вън от K_1 и K_2 няма нули на (4)).

Нека ζ една коя да е нула на полинома $g_m(x)$. Тогава равенството

$$\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{p-\mu}{m-\mu}\binom{q-m+\mu}{\mu}f_1^{(\mu)}(\zeta)f_2^{(m-\mu)}(\zeta)=0$$

представлява линейна връзка между елементарните симетрични функции на нулите $x_1, x_2, \ldots, x_p$ на полинома $f_1(x)$ и нулите $y_1, y_2, \ldots, y_q$ на полинома $f_2(x)$. Съгласно теоремата на Грейс във формата й, дадена от Уолш, ще има точка ω_1 от кръговата област K_1 и точка ω от кръговата област K_2, така че горната релация ще остава в сила, ако заместим полиномите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ съответно с $(x-\omega_1)^p$ и $(x-\omega_2)^q$. Но за тези полиноми полиномът $g_m(x)$ става равен на

$$\frac{p!\,q!}{(p-m)!\,(q-m)!\,m!}(x-\omega_1)^{p-m}(x-\omega_2)^{q-m}\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{m}{\mu}$$

$$(x-\omega_2)^{\mu}(x-\omega_1)^{m-\mu}= \tag{5}$$

$$=\frac{p!\,q!}{(p-m)!\,(q-m)!\,m!}(x-\omega_1)^{p-m}(x-\omega_2)^{q-m}(\omega_1-\omega_1)^{m}$$

и следователно

$$(\zeta-\omega_1)^{p-m}(\zeta-\omega_2)^{q-m}(\omega_1-\omega_2)^{m}=0.$$

Множителят $(\omega_1-\omega_2)^m$ е отличен от нула. Следователно ζ трябва да бъде равно на ω_1 (при $p>m$) и на ω_2 (при $q>m$). Така установихме, че нулите на полинома (4) трябва да лежат в K_1 и K_2. За да докажем, че (4) има точно $p-m$ нули в K_1 и $q-m$ нули в K_2, ще си послужим със свойството на непрекъснатост на нулите при вариране на коефициентите, което впрочем се използува често при подобен род въпроси. Именно меним непрекъснато нулите $x_1, x_2, \ldots, x_p$ на $f_1(x)$, докато се слеят с една точка a_1 от областта K_1, без да излизат извън нея, и нулите $y_1, y_2, \ldots, y_q$ на $f_2(x)$, докато се слеят с точка a_2 и K_2, без да излизат също извън тази област. Съгласно предния резултат нулите на (4), които лежат в K_1, не могат да излязат вън от тази област, както и нулите на (4), лежащи в K_2, ще остават все в нея. Но за граничните полиноми $f_1(x)=(x-a_1)^p$ и $f_2(x)=(x-a_2)^q$ полиномът (4) има формата (5) и доказателството се привършва.

При m, равно на едно от числото p или q, например $m=p$, полиномът (4) се свежда на аполярния полином на $f_2(x)$ и получаваме известната теорема за нулите на тези полиноми.

Едно непосредствено следствие от теорема VI е следното.

Теорема VII. *Нека нулите на полинома от p-та степен $f_1(x)$ да лежат в затворена кръгова област K и нулите на полинома от q-та степен $f_2(x)$ да лежат извън K. Нека цялото положително число m не надминава p и q. Тогава полиномът* (4) *има точно $p-m$ нули в K и $q-m$ нули извън K.*

Понеже нулите на $f_1(x)$ лежат в затворената област K, а тези на $f_2(x)$ извън K, като използуваме близка концентрична окръжност на тази, която ограничава K, или на близка успоредна права, ако K е полуравнина, можем да предположим, че нулите на $f_2(x)$ лежат в кръгова област K', нямаща общи точки с K. Тогава прилагаме предната теорема за областите K и K'.

Едно непосредствено следствие от предната теорема е следното:

Теорема VIII. *Нека нулите на полинома от p-та степен* $f_1(x)$ *лежат в една кръгова област* K *и* $f_2(x)$ *е полином от степен* q. *Ако полиномът* $g_m(x)$ *има повече от* $p-m$ *нули в* K, *полиномът* $f_2(x)$ *има поне една нула в* K.

Аналогични теореми могат да се установят и за цели рационални функции на няколко полинома и техните производни, които спрямо всеки полином и производните му са линейни.

Ще разгледаме сега полиноми, които имат само реални нули. За такива полиноми Лагер установява, че ковариантът на Хесе

$$H(x)=(n-1)f'^2(x)-nf(x)f''(x)$$

е неотрицателен за всяко реално x. Тук n е степента на полинома $f(x)$ и $H(x)$, както лесно се вижда, е от степен $2n-3$. Доказателството на Лагер е непряко и не дава възможност за намиране на случаите, когато $H(x)$ се анулира. В предния параграф видяхме, че ако $f(x)\neq 0$ и положим

$$f(x+t)=f(x)(1+a_1t)(1+a_2t)\dots(1+a_nt),$$

$H(x)$ има формата

$$H(x)=f^2(x)\,\Sigma(a_1-a_2)^2. \tag{6}$$

Ако $x_1, x_2, \dots, x_n$ са нулите на полинома $f(x)$, лесно се вижда, че

$$a_\mu=\frac{1}{x-x_\mu},\quad \mu=1, 2, \dots, n,$$

и следователно равенството (6) става

$$H(x)=f^2(x)\sum_{\mu<\nu}^{1\dots n}\left(\frac{1}{x-x_\mu}-\frac{1}{x-x_\nu}\right)^2 \tag{7}$$

Впрочем това равенство следва направо и от тъждеството

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{x-x_\mu}$$

по аналогичен начин. Нека x е произволно реално число, но $f(x)\neq 0$. От (7) следва тогава, че $H(x)$ е само тогава нула, когато нулите $x_1, x_2, \dots, x_n$ на $f(x)$ съвпадат, т. е. полиномът $f(x)$ има формата

$$f(x)=c\,(x+\omega)^n.$$

За този полином ковариантът $H(x)$, както непосредствено се вижда, е тъждествено равен на нула. Ако $f(x)=0$, но $f'(x)\neq 0$, $H(x)=(n-1)f'^2(x)$ и е следователно положителен. В този случай $H(x)=0$ само когато и

$f'(x)=0$, т. е. x е многократна нула на $f(x)$. Така установихме следното предложение:

а. *Ковариантът $H(x)$ за всяко реално x е неотрицателен и е равен на нула само тогава, когато x е многократна нула на $f(x)$ или когато полиномът $f(x)$ има формата $c(x+\omega)^n$, в който случай $H(x)$ е идентично равен на нула.*

Да разгледаме кованианта

$$G(x)=n(n-1)f^{\mathrm{IV}}(x)f(x)-4(n-1)(n-3)f^{\mathrm{III}}(x)f'(x)+3(n-2)(n-3)f^{\mathrm{II}^2}(x),$$

където n е степента на полинома $f(x)$. Едно директно пресмятане на $G(x)$ показва, че полиномът $G(x)$ е от степен $2n-6$. Ако $f(x)\neq 0$, установихме формулата

$$(8)\qquad G(x)=12f^2(x)\Sigma(a_1-a_2)^2(a_3-a_4)^2=12f^2(x)\Sigma\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)^2 \cdot\left(\frac{1}{x-x_3}-\frac{1}{x-x_4}\right)^2$$

Оттук веднага следва, че при $f(x)\neq 0$ и x реално $G(x)\geqq 0$. Да изследваме при тези предположения кога $G(x)$ приема стойност, равна на нула. Нека предположим, че $f(x)\neq 0$. Тогава множителите на $(a_1-a_2)^2$, $a_1\neq a_2$, които са числата $(a_\mu-a_\nu)^2$, $\mu\neq\nu$, $\mu,\nu\geqq 2$, трябва да бъдат равни на нула и следователно трябва да имаме $a_3=a_4= \quad =a_n=a$. Нека $a_1\neq a_3$. Понеже $(a_1-a_3)^2(a_2-a_4)^2$ трябва да е нула, следва, че $a_2=a_4=a$. Следователно полиномът $f(x)$ трябва да има поне една $(n-1)$-кратна нула, т. е. да има формата

$$f(x)=c(x+\omega)^{n-1}(x+\delta),$$

където ω и δ са произволни реални числа. Едно директно пресмятане ни показва, че в този случай ковариантът $G(x)$ е равен тъждествено на нула. Ако $f(x)=f'(x)=0$, $G(x)$ приема стойността

$$G(x)=3(n-2)(n-3)f''^2(x)$$

и е равен на нули само тогава, когато x е най-малко трикратна нула на полинома $f(x)$. Остава да се изследва случаят, когато $f(x)=0$,но $f'(x)\neq 0$, т. е. x е проста нула. Нека тази нула бъде x_1 и да изследваме тъждеството (8), когато x клони към x_1. Вдясно членовете, които не съдържат x_1, умножени с $f(x)$, ще клонят към нула. Остава да се разгледа частта, съдържаща x_1, т. е. сумата

$$\sum\left[\frac{f(x)}{x-x_1}-\frac{f(x)}{x-x_\mu}\right]^2\left(\frac{1}{x-x_\nu}-\frac{1}{x-x_\tau}\right)^2,\quad \nu<\tau,$$

където μ, ν,τ са различни числа от редицата $2, 3, \dots, n$. Границата на тази сума при $x\to x_1$ е равна на

$$f^2(x_1)\sum\left(\frac{1}{x_1-x_\nu}-\frac{1}{x_1-x_\tau}\right)^2$$

Последната сума е положителна и е равна на нула само тогава, когато нулите $x_1, x_2, \dots, x_n$ съвпадат, който случай вече разгледахме. Така установихме предложението:

β. Ако $f(x)$ е полином от степен n със само реални нули, ковариантът

$$n(n-1)f^{\mathrm{IV}}(x)f(x)-4(n-1)(n-3)f'''(x)f'(x)+3(n-2)(n-3)f''^2(x)$$

е винаги неотрицателен за всяко реално x и е равен на нула само тогава, когато x е поне трикратна нула на $f(x)$ или полиномът $f(x)$ има формата $c(x+\omega)^{n-1}(x+\delta)$, където ω и δ са произволни реални числа.

Естествено в предните разглеждания се предполага, че полиномът е реален, т. е. коефициентът пред най-високата степен на x е реално число. В горното предложение ковариантът при $n=2$ и $n=3$ е равен тъждествено на нула и следователно в него се предполага, че $n \geqq 4$.

Ще направим в края някои общи бележки за ковариантите, споменатите свойства на които ще бъдат предмет на отделна работа. В § 2 установихме, че ако $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са два произволни полинома съответно от степени p и q и m е натурално число, ненадминаващо p и q, полиномът

$$(9)\qquad \sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{p-\mu}{m-\mu}\left(\begin{matrix}q-m+\mu\\ \mu\end{matrix}\right. \quad f_1^{(\mu)}(x)f_2{}^{(m-\mu)}(x)$$

е ковариант при хомографна трансформация. Привидно този полином е от степен $p+q-m$, но в § 3 установихме, че неговата степен не надминава $p+q-2m$. Последното свойство е характерно за този ковариант, т. е. ако полиномът

$$\sum_{\mu=0}^{m} a_{\mu} f_1^{(\mu)}(x) f_2^{(m-\mu)}(x),$$

където $a_0, a_1, \dots, a_m$ са константи, е от степен $\leqq p+q-2m$, този полином съвпада до постоянен множител с полинома (9). Абсолютно същото свойство е в сила и за ковариантите $H(x)$, I' и $G(x)$.

Нека $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ са k полиноми на x и

$$(10)\qquad F(f_1, f_1', \dots, f_1^{(\lambda_1)}, f_2, f_2', \dots, f_2^{(\lambda_2)}, \dots, f_k, f_k', \dots, f_k^{(\lambda_k)})$$

е цяла рационална функция на полиномите и някои техни производни, като естествено редът на диференциране не надминава степента на съответния полином. Предполагаме, че функцията (10) е ковариант при хомографните трансформации. Можем да установим следните свойства на функцията

$$(11)\quad F(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \quad\ , x_{\lambda_1}^{(1)}, x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots, x_{\lambda_2}^{(2)}, \dots, x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \quad\ , x_{\lambda_k}^{(k)})$$

на променливите $x_{\nu}^{(s)}$, $\nu=1, 2, \dots, \lambda_s$, $s=1, 2, \dots, k$:

1. Спрямо всичките променливи функцията (11) трябва да бъде хомогенна.

2. Функцията (11) трябва да бъде изобарна, т. е. всеки неин член трябва да има едно и също тегло.

Ще отбележим, че основни коварианти от дадена степен и тегло се характеризират с това само, че степента им спрямо променливото x не надминава определено число, зависещо от степента и теглото им. Предните разглеждания указват, че всеки ковариант представлява цяла рационална функция на основни коварианти. На този въпрос ще се спрем в друга работа.

4. Теореми за реалните нули на полиномите

По една теорема на Лагер, прецизирана от Полиа, ако $f(x)$ е полином с реални коефициенти, на които степента е n, и β е произволно реално число, лежащо извън затворения интервал $[0, n]$, полиномът

$$-xf'(x)+\beta f(x) \tag{1}$$

има поне толкова реални нули, колкото полиномът $f(x)$. В частност, ако всичките нули на $f(x)$ са реални, полиномът (1) ще има също само реални нули. В този случай всяка многократна нула на (1) е и такава на полинома $f(x)$. Нека a е произволно реално число и да разгледаме полинома

$$F(x)=(a-x)f'(x)+\beta f(x). \tag{2}$$

Ако положим

$$x-a=z,\ f(a+z)=\varphi(z),$$

следва, че

$$F(a+z)=-z\varphi'(z)+\beta\varphi(z)=F_1(z).$$

Предното равенство показва, че горното твърдение е в сила и за нулите на полинома $F(x)$, определен с равенството (2). На основание на това свойство ще установим следната теорема:

Теорема IX. *Нека $g_p(x)$ е полином от степен p, имащ само реални нули, и $f(x)$ е полином от степен n, имащ реални коефициенти. Нека освен това β е произволно реално число, лежащо извън затворения интервал $[0, n+p-1]$. Тогава полиномът*

$$f_p(x)=\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{p-\nu}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}g_p{}^{(p-\nu)}(x)f^{(\nu)}(x) \tag{3}$$

има поне толкова реални нули, колкото полиномът $f(x)$. Ако $f(x)$ има само реални нули, всяка многократна нула на $f_p(x)$ е и такава на полинома $f(x)$.

Доказателството следваме по индуктивен път. Предполагаме, че теоремата е установена за полинома $f_p(x)$. Предполагаме, че β лежи извън затворения интервал $[0, n+p]$ и нека $f_{p+1}(x)$ е полиномът

$$f_{p+1}(x)=(a_{p+1}-x)f'_p(x)+(\beta-p)f_p(x),$$

като a_{p+1} е произволно реално число. По предложението $f_{p+1}(x)$ ще има поне толкова реални нули, колкото полиномът $f_p(x)$ и ако $f_p(x)$ има само реални нули, всяка многократна нула на $f_{p+1}(x)$ е и такава нула на полинома $f_p(x)$. За $f'_p(x)$ получаваме

$$f'_p(x)=\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{p-\nu}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}g_p^{(p+1-\nu)}(x)f^{(\nu)}(x)+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{p-\nu}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}g_p^{(p-\nu)}(x)\,f^{(\nu+1)}(x)=$$

$$=g_p(x)f^{(p+1)}(x)+\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{p+1-\nu}\left[\binom{\beta+1-\nu}{p+1-\nu}-\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\right]g_p^{(p+1-\nu)}(x)f^{(\nu)}(x)$$

и понеже

$$\binom{\beta+1-\nu}{p+1-\nu}-\binom{\beta-\nu}{p-\nu}=\binom{\beta-\nu}{p+1-\nu},$$

следва, че

$$f'_p(x)=\sum_{\nu=1}^{p+1}(-1)^{p+1-\nu}\binom{\beta-\nu}{p+1-\nu}g_p^{(p+1-\nu)}(x)f^{(\nu)}(x).$$

За полинома $f_{p+1}(x)$ получаваме така израза

$$f_{p+1}(x)=\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{p+1-\nu}\Bigg[(a_{p+1}-x)\binom{\beta-\nu}{p+1-\nu}g_p^{(p+1-\nu)}(x)-$$

$$-(\beta-p)\binom{\beta-\nu}{p-\nu}g_p^{(p-\nu)}\Bigg]f^{(\nu)}(x)+$$

$$+(a_{p+1}-x)g_p(x)f^{(p+1)}(x)+(-1)^p(\beta-p)\binom{\beta}{p}g_p^{(p)}(x)f(x).$$

Като вземем пред вид формулата

$$(\beta-p)\binom{\beta-\nu}{p-\nu}=(p+1-\nu)\binom{\beta-\nu}{p+1-\nu},$$

предният израз добива формата

$$f_{p+1}(x)=\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{p+1-\nu}\binom{\beta-\nu}{p+1-\nu}[(a_{p+1}-x)g_p^{(p+1-\nu)}(x)-$$

$$-(p+1-\nu)g_p^{(p-\nu)}(x)]f^{(\nu)}(x)+$$

$$+(a_{p+1}-x)g_p(x)f^{(p+1)}(x)+(-1)^p(\beta-p)\binom{\beta}{p}g_p^{(p)}(x)f(x).$$

Като положим

$$g_{p+1}(x)=(a_{p+1}-x)g_p(x),$$

понеже

$$(a_{p+1}-x)g_p^{(p+1-\nu)}(x)-(p+1-\nu)g_p^{(p-\nu)}(x)=g_{p+1}^{(p+1-\nu)}(x),$$

за $f_{p+1}(x)$ получаваме окончателно

$$f_{p+1}(x)=\sum_{\nu=0}^{p+1}(-1)^{p+1-\nu}\binom{\beta-\nu}{p+1-\nu}g_{p+1}^{(p+1-\nu)}(x)f^{(\nu)}(x),$$

с което доказателството се привършва. В частност, ако $f(x)$ има само реални нули, $f_p(x)$ ще има също само реални нули и всяка многократна нула на $f_p(x)$ е такава на полинома $f_{p-1}(x)$, следователно многократна нула на $f_{p-2}(x)$ и т. н. до полинома $f(x)$.

Да разгледаме някои частни случаи. Ако $g_p(x)=x^p$, за полинома $f_p(x)$ намираме

$$f_p(x)=p!\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{p-\nu}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{x^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x).$$

Следователно ще имаме предложението

1. *Нека $f(x)$ е полином от степен n с реални коефициенти, p е произволно естествено число и β е произволно реално число, лежащо извън интервала $[0, n+p-1]$. Тогава полиномът*

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^\nu\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{x^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x) \tag{4}$$

има поне толкова реални нули, колкото полиномът $f(x)$. Ако $f(x)$ има само реални нули, всяка многократна нула на (4) е и такава нула на $f(x)$.

Нека a е реално число, отлично от нула, и да положим

$$f(x)=(x-a)^n.$$

Полиномът

$$\sum_{\nu=0}^{q}(-1)^\nu\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{x^\nu}{\nu!}n(n-1)\ldots(n-\nu+1)(x-a)^{n-\nu}, \qquad q=\min(n,p)$$

ще има само реални нули. При това единствена многократна нула на този полином е $x=a$, и то в случая, когато $n>p$. Ако положим

$$\frac{x}{x-a}=-z$$

то получаваме следното предложение:

2. *Ако β е произволно реално число, лежащо вън от интервала $[0, n+p-1]$, полиномът*

$$\sum_{\nu=0}^{q}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\binom{n}{\nu}z^\nu, \qquad q=\min(n,p)$$

има само реални нули, които са и прости.

Ще отбележим, че в предните резултати в случая, когато полиномът $f(x)$ има само реални нули, можем да предположим, че β може да взема граничните стойности 0 и $n+v-1$ на затворения интервал $[0, n+p-1]$. Действително примерно за полинома (3) при $\beta<0$ той ще има само реални нули. Ако β клони към нула, на основание на непрекъснатостта на нулите му като функции на β граничният полином при $\beta=0$ ще има също само реални нули. Същото разсъждение е и при клонене на β към $n+p-1$, като се ограничаваме на нулите, които остават крайни. Ще отбележим, че при $\beta=n+p-1$ полиномът (3) се свежда на p-тия аполярен полином на $f(x)$, реалността на нулите на който следва и отпреди.

Едно от следствията на теоремата на Грейс е следното:

Нека полиномите

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\qquad+a_nx^n$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$$

имат само реални нули, като нулите на поне единия от тях са с еднакъв знак. Тогава и нулите на полинома

$$a_0b_0+\frac{a_1b_1}{\binom{n}{1}}x+\frac{a_3b_2}{\binom{n}{2}}x^2+\quad..+\frac{a_nb_n}{\binom{n}{n}}x^n$$

са реални.

Видяхме, че ако β е реално число, лежащо извън интервала $[0, 2n-1]$, полиномът

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\binom{n}{\nu}z^\nu$$

има само реални нули. При $\beta>n$ коефициентите на този полином са положителни и при $\beta<0$ те са с алтернативни знаци. Следователно нулите на този полином са с еднакъв знак. Като приложим цитираното следствие от теоремата на Грейс, получаваме предложението:

3. *Ако полиномът*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

има само реални нули и β е произволно реално число, лежащо извън интервала $[0, 2n-1]$, то и полиномът

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}a_\nu x^\nu$$

има само реални нули.

Нека $f(x)$ е цяла функция, която е граница на полиноми $f_n(x)$, имащи само реални нули. Известно е по теоремата на Лагер и Полиа, че $f(x)$ има вида

$$f(x)=Ax^m e^{-\gamma x^2+\delta x}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\delta_\nu x)e^{-\delta_\nu x}\ (m\geqq 0 \text{ и цяло}), \tag{5}$$

където γ, δ, δ_n $(n=1, 2, \ldots)$ са реални числа, $\gamma\geqq 0$ и редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\delta_n^2$ е сходящ. Нека β е произволно отрицателно число. Тогава полиномите

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^\nu\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{x^\nu}{\nu!}f_n^{(\nu)}(x)$$

ще имат само реални нули. Като преминем към граница (при $n\to\infty$), получаваме, че полиномът

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\nu}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{x^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(x)$$

има само реални нули. При $f(x)=e^{x}$ получаваме, че полиномът

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\nu}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{x^{\nu}}{\nu!}$$

или все едно полиномът

$$\sum_{\nu=0}^{p}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{x^{\nu}}{\nu!}$$

има само реални нули. При $f(x)=e^{-x^2}$ получаваме, че полиномът

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\nu}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{x^{\nu}}{\nu!}H_{\nu}(x)$$

има само реални нули. Тук $H_{\nu}(x)$ означава ν-тия Ермитов полином. Ако m е цяло число, по-голямо от 1, по една известна теорема на Полиа цялата функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^{2m}+ixt}dt=2\int_{0}^{\infty} e^{-t^{2m}}\cos x t\, d t$$

има само реални нули. То е от типа (5) и по предложението следва, че полиномът

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^{2m}+ixt}\sum_{\nu=0}^{p}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{(-itx)^{\nu}}{\nu!}dt$$

има само реални нули. Предполагаме, че β е отрицателно число и p е произволно цяло положително число.

Казваме по Полиа, че една функция $f(x)$ е от типа II*, ако е граница на полиноми, имащи не повече от 2τ имагинерни нули, като τ е някое фиксирано число. Естествено предполага се, че въпросната редица от полиноми клони към $f(x)$ равномерно във всяка крайна област или поне във фиксиран кръг $|x|\leq\varrho$, $\varrho>0$. От последното предположение следва впрочем равномерната сходимост във всяка крайна област. Установява се, че функцията $f(x)$ е цяла и произведение на функция от типа (5) с полином, имащ най-много 2τ имагинерни нули. Нека $\{f_{\mu}(x)\}$ е редицата от полиноми, които клонят към $f(x)$, и n_{μ} е степента на $f_{\mu}(x)$. Полиномът $f_{\mu}(x)$ има поне $n_{\mu}-2\tau$ реални нули и следователно полиномът

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\nu}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{x^{\nu}}{\nu!}f_{\mu}^{(\nu)}(x)$$

ще има поне $n_{\mu}-2\tau$ реални нули ($\beta<0$). Понеже степента на този полином е n_{μ}, следва, че той ще има най-много 2τ имагинерни нули. Граничният полином (при $\mu \to \infty$) ще има следователно най-много 2τ имагинерни нули. Така получаваме предложението:

4. *Нека $f(x)$ е цяла функция от типа II^*, имаща 2τ имагинерни нули. Ако β е отрицателно число, полиномът*

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\nu}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}\frac{x^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(x)$$

има най-много 2τ имагинерни нули.

Ще установим някои свойства за разпределението на нулите на полинома (3) в равнината на комплексните числа. Предварително ще разгледаме полинома

$$f_1(x)=(a_1-x)f'(x)+\beta f(x),$$

където $f(x)$ е полином от n-та степен и a_1 и β са произволни комплексни числа. Ако $\beta=n$, $f_1(x)$ съвпада с първата полярна производна, за нулите на която е в сила теоремата на Лагер. Предполагаме, че β е отлично от n. Нека K е кръгова област, в която лежат всичките нули на полинома (x). Нека x_0 е нула на $f_1(x)$, т. е.

$$(a_1-x_0)f'(x_0)+\beta f(x_0)=0. \tag{6}$$

Ако точката x_0 не лежи в K, по теоремата на Лагер точката

$$\zeta=x_0-n\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

трябва да лежи в K. Като вземем пред вид равенството (6), за числото x_0 получаваме

$$x_0=a_1+\frac{\beta}{\beta-n}(\zeta-a_1).$$

Но ако точката z описва кръговата област K, точката

$$a_1+\frac{\beta}{\beta-n}(z-a_1)$$

ще опише кръгова област K_1, която се получава от K с паралелно преместване на вектор $-a$, подобие с отношение $\left|\frac{\beta}{\beta-n}\right|$, след това завъртване на ъгъл $\varphi=\arg\frac{\beta}{\beta-n}$ и паралелно преместване на вектор a. Ако C е окръжността, ограничаваща областта K, окръжността C_1, ограничаваща областта K_1, ще има за център точката $a_1+\frac{\beta}{\beta-n}(z_0-a_1)$ и радиус, равен на $r\left|\frac{\beta}{\beta-n}\right|$, като z_0 и r са съответно центърът и радиусът на C. Ако K е полуравнина и C е ограничаващата я права, а z' е някоя точка от C, C_1 е права, минаваща през точката $a_1+\frac{\beta}{\beta-n}(z'-a_1)$ и сключваща ъгъл φ с първата. Следователно ще имаме предложението:

Нулите на полинома $f_1(x)$ лежат в K и K_1.

Нека областите K и K_1 нямат обща точка. Като вариране нулите на $f(x)$, но така, че да остават постоянно в K, нулите на полинома $f_1(x)$ не могат да излязат от тези две области. За полинома $f(x)=(x-\omega)^n$, където ω е точка от K, полиномът $f_1(x)$ има $n-1$ нули в K (равни на ω) и една нула в K_1. *Следователно, ако областите K и K_1 нямат общи точки, полиномът $f_1(x)$ има $n-1$ нули в K и една нула в K_1.*

Нека β е произволно реално число, но намиращо се извън затворения интервал $[0, n]$. Тогава числото $\frac{\beta}{\beta-n}$ е положително. Нека нулите на $f(x)$ да лежат в една конвексна област R. Да означим с R_1 подобната конвексна област, получена от R, с център на подобие a_1 и отношение $\frac{\beta}{\beta-n}$. Нека R' е конвексна област, която съдържа двете области R и R_1. На основание на предното лесно се вижда, че ако L е произволна опорна права на R', нулите на $f_1(x)$ лежат от тази страна на L, от която се намира областта R'. Следователно нулите на $f_1(x)$ лежат в областта R'. Оттук следва и предложението:

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нулите на полинома $f(x)$ и $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ са точките

$$a_1+\frac{\beta}{\beta-n}(x_\nu-a_1), \quad \nu=1, 2, \ldots, n.$$

Тогава нулите на полинома $f_1(x)$ лежат в най-малкия изпъкнал многоъгълник, който съдържа $2n$-те точки x_ν, x'_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$.

Ако общо с $x_\nu^{(1)}$, $\nu=1, 2, \quad 2n$, означим предните $2n$ точки, нулите на полинома

$$(a_2-x)f'_1(x)+(\beta-1)f_1(x)$$

ще лежат в най-малкия изпъкнал многоъгълник, който съдържа $2n$-те точки $x_\nu^{(1)}$, $\nu=1, 2, \ldots, 2n$ и точките

$$a_2+\frac{\beta-1}{\beta-1-n}(x_\nu^{(1)}-a_2), \ \nu=1, 2, \ldots, 2n.$$

Изобщо, ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са нулите на полинома $f(x)$ и $a_1, a_2, \ldots, a_p$ са нулите на $g_p(x)$, да образуваме последователно системите от точки

$$\left\{x_\nu^{(k)}\right\}, \quad \nu=1, 2, \ldots, 2^k n, \quad k=0, 1, 2, \ldots, p,$$

като началната система $x_\nu^{(0)}$, $\nu=1, 2, \ldots, n$ представлява точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и всяка следваща $\left\{x_\nu^{(k)}\right\}$ се получава от предидущата $\left\{x_\nu^{(k-1)}\right\}$, като към точките на тази последната прибавим точките

$$a+\frac{\beta-k+1}{\beta-k+1-n}(x_\nu^{(k-1)}-a_k).$$

При това $x_1, x_2, \quad, x_n$ и $a_1, a_2, \ldots, a_p$ са произволни комплексни числа. От предните разглеждания следва теоремата:

Теорема X. *Нека $f(x)$ е произволен полином от n-та степен и $x_1, x_2 \ldots x_n$ са нулите му. Нека $g_p(x)$ е произволен полином от p-та* *степен, на който нулите са числата* $a_1, a_2, \ldots, a_p$, *и* β *да е произволно реално число, лежащо вън от затворения интервал* $[0, n+p-1]$. *Тогава нулите на полинома*

$$f_p(x)=\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{p-\nu}\binom{\beta-\nu}{p-\nu}g_p^{(p-\nu)}(x)f^{(\nu)}(x)$$

лежат в най-малкия изпъкнал многоъгълник, който съдържа всичките точки на системата $\{x_\nu^{(p)}\}$, $\nu=1, 2, 3, \ldots, 2^p n$, *която дефинирахме.*

Оттук следва например , че ако полиномите $f(x)$ и $g_p(x)$ имат само реални нули, и полиномът $f_p(x)$ има само реални нули. Това е следствие и от теоремата IX, но за реални полиноми теоремата IX е значително по-обща от теорема X.

Друго следствие от теорема X е следното:

Ако нулите на полиномите $f(x)$ *и* $g_p(x)$ *лежат в една конвексна област* G *в равнината на комплексните числа и* β *е отрицателно число, то и нулите на полинома* $f_p(x)$ *лежат в* G.

Именно в случая непосредствено се вижда, че всичките точки от системата $\{x_\nu^{(p)}\}$, $\nu=1, 2, 3, \ldots, 2^p n$, лежат в G.

Постъпила на 26. VI. 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

Dieudonné J., Sur le théorème de Grace et les relations algébriques analogues, Bull. de la Soc. math. de France, **60**, 1932, 173—196.

La théorie analytique des polynomes d'une variable (à coefficients quelconques), Memorial des Sc. math., Fasc. XCIII, 1938.

Egervary J., On a maximum-minimum problem and its connection with the roots of equations, Acta lit. ac scient. Univ. Hung. (Szeged), t. **1**, 1922, 38—45.

Grace J. H., The zeros of a Polynomial, Proc. of the Cambridge Philos. Soc., **11**, 1902, 352—357.

Laguerre É., Sur le rôle des émanants dans la théorie des équations numériques, Comptes Rendus des séances de l'Acad. des sc., LXXVIII, 1874; Oeuvres, t. **1**, 48—66. Théorèmes généraux sur les équations algébriques, Nouv. Ann. de Math. 2e série, XIX, 1880; Oeuvres, t. 1, 133—143.

Обрешков Н., Върху корените на алгебричните уравнения, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **22**, 1926, 115—130.

Berwald L., Über die Lage der Nullstellen von Linearkombinationen eines Polynoms und seiner Ableitungen in bezug auf einen Punkt Tôh. Math. Journ. **37**, 1933, 52—68.

О НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КОВАРИАНТАХ И НУЛЯХ МНОГОЧЛЕНОВ

Н. Обрешков

(Резюме)

Если $f(z)$ есть произвольный многочлен n-й степени и $g(z)$ многочлен степени m, $n > m$, то многочлен

$$\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{n-m+\mu}{\mu}g^{(\mu)}(z)f^{(m-\mu)}(z) \tag{1}$$

степени $n-m$ называется полярной производной $f(z)$ в отношении нулей $g(z)$, называемых полюсами. Для многочлена (1) автор устанавливает следующее уточнение классической теоремы Лагерра:

Теорема I. Пусть нули многочлена $g(z)$ лежат в круговой области K, в которой лежит по крайней мере один нуль z_0 полярного многочлена (1). При этом, если z_0 совпадает с каким-либо нулем многочлена $g(z)$, кратность которого k и z_0 есть нуль также и многочлена $f(z)$, то кратность q этого нуля не превышает $m-k-1$. Тогда внутри K имеется хотя бы один нуль $f(z)$, или все нули многочленов $f(z)$ и $g(z)$ лежат на контуре C области K. В последнем случае нули (1) лежат тоже на C.

Во второй части автор устанавливает следующее:

Теорема II. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ суть произвольные многочлены степеней соответственно p, q и пусть m является натуральным числом, не превышающим p и q. Тогда многочлен

$$\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\binom{p-\nu}{m-\nu}\binom{q-m+\nu}{\nu}f_1^{(\nu)}(z)f_2^{(m-\nu)}(z) \tag{2}$$

представляет собой ковариант многочленов $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Кроме того любой ковариант обоих многочленов $f_1(z)$ и $f_2(z)$, являющийся билинейным по отношению к этим многочленам и их производным, имеет указанную выше форму с точностью до постоянного множителя. Преобразования в отношений переменного являются гомографическими.

В той же части рассматриваются и более общие коварианты, представляющие целые рациональные функции нескольких многочленов и их производных. Многочлен (2) имеет степень $\leq p+q-2m$. Для его нулей автор дает следующие результаты:

Теорема III. Пусть нули многочлена p-й степени $f_1(z)$ лежат в круговой области K_1, а нули многочлена q-й степени $f_2(z)$ лежат в круговой области K_2, не имеющей общих точек с K_1. Пусть m целое положительное число, которое не превышает ни p, ни q. В этом случае многочлен (2) имеет точно $p-m$ нулей в K_1 и $q-m$ нулей в K_2 (вне K_1 и K_2 нет нулей (2)). В связи с рассматриваемыми вопросами доказываются некоторые результаты для нулей некоторых классов многочленов, как например:

Теорема IV. Пусть $\varphi(x)$ многочлен степени p, имеющий лишь действительные нули, и пусть $f(x)$ многочлен n-й степени, коэффициенты

которого действительные числа. Пусть a произвольное действительное число, лежащее вне интервала $[0, n+p-1]$. Тогда многочлен

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\nu}\binom{a-\nu}{p-\nu}\varphi^{(p-\nu)}(x)f^{(\nu)}(x) \qquad (3)$$

имеет по крайней мере столько же действительных нулей, сколько и многочлен $f(x)$. Если $f(x)$ имеет лишь действительные нули, то любой многократный нуль (3) является также и нулем многочлена $f(x)$.

Превел В. Ребров

SUR QUELQUES COVARIANTS ALGÉBRIQUES ET LES ZÉROS DES POLYNÔMES

N. Obrechkoff

(Résumé)

Soit $f(z)$ un polynôme de degré n et $g(z)$ un polynôme de degré m, $n > m$; le polynôme

$$(1) \qquad \sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{n-m+\mu}{\mu}g^{(\mu)}(z)f^{(m-\mu)}(z)$$

dont le degré est $n-m$ s'appelle la dérivée polaire de $f(z)$ relativement les zéros du polynôme $g(z)$, nommés pôles. Dans ce travail je démontre d'abord un théorème de la géométrie des zéros des polynômes en précisant un théorème classique de Laguerre.

Théorème 1. Supposons que les zéros de polynome $g(z)$ sont contenus dans un domaine circulaire K, dans lequel se trouve au moins un zéro z_0 du polynôme (1). Si z_0 est zéro aussi du polynôme $g(z)$ de l'ordre k et si z_0 est en même temps zéro du polynôme $f(z)$, l'ordre q de ce zéro ne doit pas surpasser le nombre $m-k-1$. Alors dans le domaine K il y a au moins un zéro de $f(z)$ ou tous les zéros des polynômes $f(z)$ et $g(z)$ sont situés sur la frontière C de K. Dans le dernier cas tous les zéros du polynôme (1) sont aussi situés sur C.

Dans la seconde partie je démontre le théorème suivant:

Théorème 2. Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux polynômes arbitraires, dont les degrés sont p et q et soit m un nombre entier et positif, $m \leqq p$, $m \leqq q$. Le polynôme

$$(2) \qquad \sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\binom{p-\nu}{m-\nu}\binom{q-m+\nu}{\nu}f_1^{(\mu)}(z)f_2^{(m-\nu)}(z)$$

est un covariant des polynômes $f_1(z)$ et $f_2(z)$ et c'est le seul covariant (abstraction faite d'un facteur constant) qui est bilinéaire relativement les polynômes $f_1(z)$ et $f_2(z)$ et leurs dérivées. Les transformations de la variable z sont homographiques.

Dans la même partie sont considérés aussi des covariants qui sont fonctions rationnelles et entières des polynômes d'un nombre arbitraire et de leurs dérivées. Le polynôme (2) est de degré $\leqq p+q-2m$. Pour ses zéros je démontre le résultat suivant:

Théorème 3. Supposons que les zéros du polynôme $f_1(z)$ sont contenus dans un domaine circulaire K_1 et les zéros de polynome $f_2(z)$ sont contenus dans le domaine circulaire K_2, qui n'ont pas des points communs. Soit m un nombre entier et positif qui ne surpasse pas p et q. Le polynôme (2) a $p-m$ zéros dans le domaine K_1 et $q-m$ dans le domaine K_2 (en dehors de K_1 et K_2 il n'y a pas des zéros de (2)).

Le travail contient aussi des théorèmes pour une classe de polynômes réels. Par exemple je démontre le résultat suivant:

Théorème 4. Soit $f(x)$ un polynôme réel de degré n et soit $\varphi(x)$ un polynôme de degré p, dont tous les zéros sont réels. Si a est un nombre réel situé en dehors de l'intervalle $[0, n+p-1]$ le polynôme

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\nu}\binom{a-\nu}{p-\nu}\varphi^{(p-\nu)}(x)f^{(\nu)}(x) \tag{3}$$

a au moins autant de zéros réels que le polynôme $f(x)$. Si $f(x)$ a seulement des zéros réels chaque zéro multiple de (3) est aussi un zéro multiple de $f(x)$.

Traduit par l'auteur