БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE DES SCIENCES DE BULGARIE
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VII

МЕТОД ЗА ПРЕСМЯТАНЕ ФУНКЦИЯТА НА ОТНОСИТЕЛНАТА ЧЕСТОТА НА ЕДНО СЛУЧАЙНО СЪБИТИЕ, КОГАТО ТАЗИ ЧЕСТОТА ЗАВИСИ ОТ ЕДИН ПАРАМЕТЪР t С ПРИЛОЖЕНИЕ ЗА ПРЕСМЯТАНЕ ФУНКЦИЯТА НА РАЖДАЕМОСТТА В БЪЛГАРИЯ ПРЕЗ 1955 г, ПРОМЕНЯЩА СЕ ПО ВЪЗРАСТТА НА МАЙКИТЕ

Ем. Симеонов

1. Обичайният начин за намиране кривата на регресията между две случайни променливи X и Y (Y като функция на X или X като функция на Y) се свежда до подбиране на тип функция $f(x, a_0, a_1, \ldots)$, на x и някакъв брой параметри $(a_0, a_1 \ldots)$, които подлежат на определяне. В най-честия случай $f(x, a_0, a_1 \ldots)$ е полином от n-та степен на x, $f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ и $a_i (i=0, 1, \ldots)$ се определят от данните на наблюдението по метода на най-малките квадрати. Кривата, която описва $f(x, a_0, a_1, \ldots)$, се приема за крива на регресията на изучаваното случайно явление.

2. Определянето на константите $a_i (i=0, 1\ldots)$ по метода на най-малките квадрати е оправдано при случаите, когато се разглеждат въпроси за разпределението на наблюдавани значения, представени като честоти за настъпване на някое събитие, и ако промените, които настъпват в честотите, се дължат на случайни фактори. Когато такива данни от наблюдението се представят под формата на някакво разпределение на честоти, които се променят по случаен начин, странични фактори, като време, температура, възраст и пр., не се вземат под внимание, понеже те нямат значение за решение на проблемата. Ако обаче изучаваме такива явления, когато честотите зависят освен от случайни фактори още от параметри, като време, възраст, температура и пр., които са вече не случайни фактори, при анализа на такива явления възникват специални проблеми, засягащи както методите, така и техниката за пресмятане на *колебанията, дължащи се на тези специфични, неслучайни фактори.*

3. Съществуват немалко редове от този вид, за които в зависимост от стойностите на действуващия параметър може да се установи някаква типична зависимост, някаква закономерност при разпределение на честотите, която закономерност може да се представи с някаква функция на действуващия параметър. При досегашната практика кривата на уровена на честотите се избира да бъде от подходящ тип, отговарящ на конфигурацията на данните на наблюдението. „Именно тук елементът на личните съображения има най-голямо значение, понеже не съществува никакво

обективно правило и няма никакви определени образци, с помощта на които може да се избере най-подходяща крива." [4]

Един път кривата избрана, явява се проблемата, която се разглежда при изучаване на корелациите: да се определят константите в избраната функция въз основа на данните на наблюдението. „Прието е да се използува при решението на такива задачи методът на най-малките квадрати, макар и предпоставките, на които този метод логически се основава, да нямат нищо общо с такива редове" [4], понеже последователното разположение на данните на наблюдението е свързано с причини, които нямат случаен характер. „Поради това, ако се ползуваме от метода на най-малките квадрати при определяне на математическата крива, заменяща редицата от наблюдения с установена поредица, то ние изхождаме от практически съображения." [4]

4. Настоящата работа е опит при изучаване на подобни редове да се намери функцията плътност $\varphi=\varphi(\tau)$ на относителната честота на изучаваното (случайно) явление, която функция ще отразява колебанията на честотата по неслучайния параметър τ, като се приложи метод, развит върху принципа на вариациите. Изложението на този метод ще върви паралелно с пресмятанията за функцията φ на раждаемостта в България през 1955 г., променяща се по възрастта τ на майките.

5. Приемаме, че жените в България раждат във възрастовия интервал $a \leq \tau \leq b$. Разделяме интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките $a=\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{m-1}, \tau_m=b$ и $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta\tau = \frac{b-a}{m} (i=0, 1, 2, \ldots m-1)$. Всеки подинтервал $\Delta\tau=\tau_{i+1}-\tau_i$ разделяме още по на k подинтервала $\tau_i=\tau_{i_0}, \tau_{i_1}, \tau_{i_2} \ldots \tau_{i_{k-1}}, \tau_{i_k}=\tau_{i+1}$ така, че $\tau_{i_{j+1}}-\tau_{i_j}=\Delta'\tau=\frac{\tau_{i+1}-\tau_i}{k}=\frac{\Delta\tau}{k}$.

При това разчленение на възрастовия интервал $[a, b]$, през който жените в България раждат, ще имаме:

а) $X_{\tau_{i_j}}$ — среден брой на жените, които за единица време (една календарна година) са били във възрастовия интервал $[\tau_{i_j}, \tau_{i_{j+1}}]$;

б) $X_{\tau_i}=\sum_j X_{\tau_{i_j}}$ — среден брой на жените, които за единица време (една календарна година) са били във възрастовия интервал $[\tau_i, \tau_{i+1}]$;

в) $L=\sum_{i=0}^{m-1} X_{\tau_i}$ — среден брой на жените, които за единица време (една календарна година) са били във възрастовия интервал $[a, b]$;

г) $Y_{\tau_{i_j}}$ — среден брой на жените, които, минавайки за единица време (една календарна година) през възрастовия интервал $[\tau_{i_j}, \tau_{i_{j+1}}]$, са станали майки;

д) $Y_{\tau_i}=\sum_{j=0}^{k-1} Y_{\tau_{i_j}}$ — среден брой на жените, които, минавайки за единица време (една календарна година) през възрастовия интервал $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, са станали майки;

е) $A=\sum_{i=0}^{m-1} Y_{\tau_i}$ — среден брой на жените, които, минавайки за единица време (една календарна година) през възрастовия интервал $[a, b]$, са станали майки;

ж) $p_{\tau_{i_j}}=\varphi_i(\tau_{i_j}+\theta_j.\Delta'\tau)$

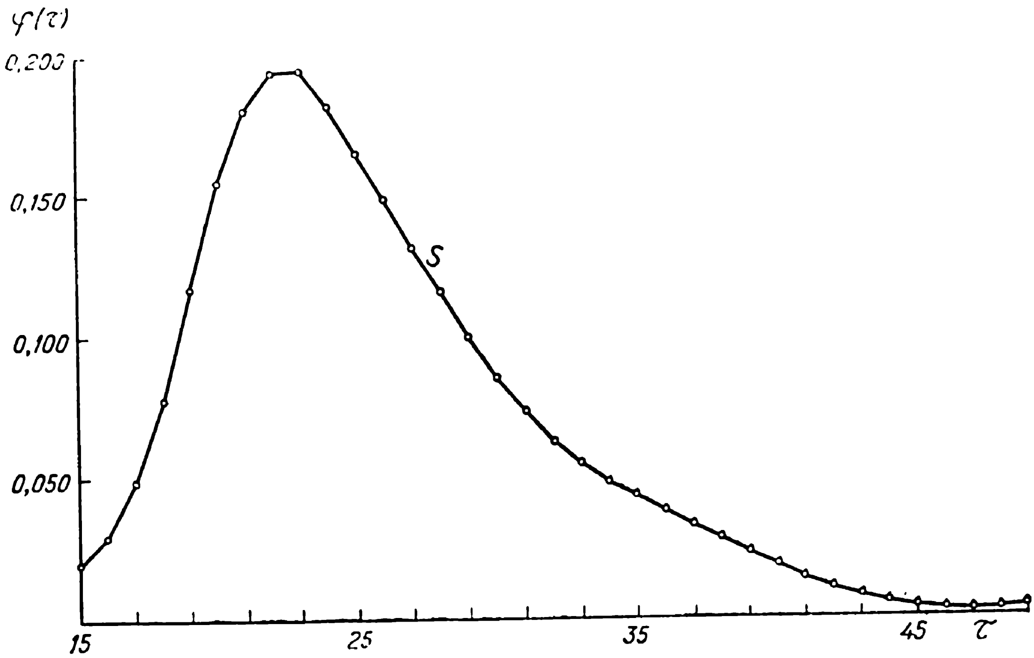
$0\leq\theta_j\leq 1$ — относителна честота на раждаемост във възрастовия интервал $[\tau_{i_j}, \tau_{i_{j+1}}]$;

з) $p_{\tau_i}=\sum_j \varphi_i(\tau_{i_j}+\theta_j.\Delta'\tau)\Delta'\tau$

$0\leq\theta_j\leq 1$ — среден брой деца, родени от една майка, минаваща през възрастовия интервал $[\tau_i, \tau_{i+1}]$;

и) $p=\sum_{i=0}^{m-1} p_{\tau_i}+1$ — среден брой деца, които ражда една жена, минаваща през възрастовия интервал $[a, b]$.

Функцията $\varphi_i(\tau)$[1], както обикновено се приема, е непрекъсната в интервала $\tau_i-\Delta'\tau\leqq\tau\leqq\tau_{i+1}$ и допуска производни от кой да е ред. Тази функция ще наричаме *плътност на относителната честота на раждаемостта*, а кривата s, която $\varphi_i(\tau)$ $(i=0, 1, 2,\ldots m-1)$ описват, ще наричаме *крива на относителната честота на раждаемостта*.



Крива на раждаемостта в България през 1955 г.

[1] На всеки подинтервал (τ_i, τ_{i+1}) отговаря функция $\varphi_i(\tau)$, дефинирана в границите $\tau_i-\Delta'\tau\leq\tau\leq\tau_{i+1}$. Защо именно в тези граници трябва да се дефинира φ_i, ще се види по-долу.

6. Функцията $\varphi_i(\tau)$ трябва да отговаря на условието

(1) $$Y_{\tau_i} = \sum_{j=0}^{k-1} X_{\tau_{i_j}} p_{\tau_{i_j}} = \sum_j X_{\tau_{i_j}} \varphi_i(\tau_{i_j} + \theta_j \Delta'\tau)\, \Delta'\tau, \qquad 0 \le \theta_j \le 1.$$

Оттук следва

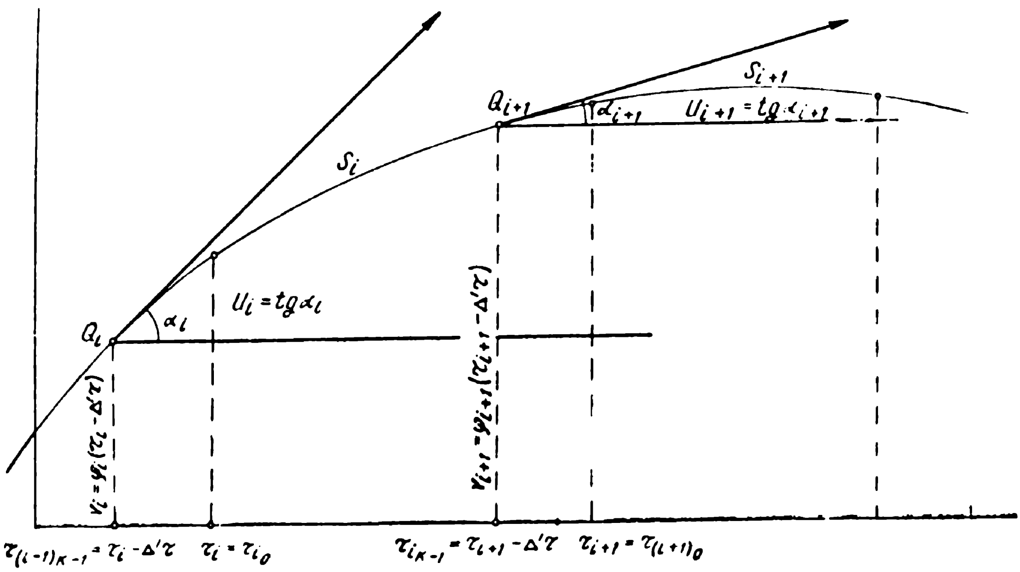
(1′) $$A = \sum_{i=0}^{m-1} Y_{\tau_i} = \sum_i \sum_j X_{\tau_{i_j}} \varphi_i(\tau_{i_j} + \theta_j \Delta'\tau)\, \Delta'\tau, \qquad 0 \le \theta_j \le 1.$$

Това са условията, които свързват φ с данните на наблюдението.[1]

7. Нека имаме един кой да е подинтервал (τ_i, τ_{i+1}). Ще представим функцията $\varphi_i(\tau)$ като линейна комбинация от три функции $\psi_{1i}, \psi_{2i}, \psi_{3i}$ [1].

(2) $$\varphi_i = u_i \psi_{1i} + v_i \varphi_{2i} + Y_{\tau_i} \psi_{3i},$$

където ψ_{si} $(s = 1, 2, 3)$ са непрекъснати функции на τ_i в интервала $\tau_i - \Delta'\tau \le \tau \le \tau_{i+1}$ и вследствие (1) зависят по някакъв начин още от данните на наблюдението $\left(X_{\tau_{i_j}}, Y_{\tau_{i_j}}\right)$ $(j = 0, 1, 2 \dots k-1)$, а u_i и v_i са съответно ъгловият коефициент на тангентата към кривата s и стойностите на φ_i в точката Q_i с координати $Q_i\,[\tau_i - \Delta'\tau,\ \varphi_i(\tau_i - \Delta'\tau) = v_i]$. Следователно за $\tau = \tau_i - \Delta'\tau$ трябва да имаме



Фиг. 1

(3) $$\begin{aligned} \varphi_i'(\tau_i - \Delta'\tau) &= u_i \psi'_{1i}(\tau_i - \Delta'\tau) + v_i \psi'_{2i}(\tau_i - \Delta'\tau) + Y_{\tau_i} \psi'_{3i}(\tau_i - \Delta'\tau) = u_i, \\ \varphi_i(\tau_i - \Delta'\tau) &= u_i \psi'_{1i}(\tau_i - \Delta'\tau) + v_i \psi'_{2i}(\tau_i - \Delta'\tau) + Y_{\tau_i} \psi'_{3i}(\tau_i - \Delta'\tau) = v_i \end{aligned}$$

От (3) следва, че функциите ψ_{si} $(s = 1, 2, 3)$ и първата им производна за $\tau = \tau_i - \Delta'\tau$ трябва да вземат стойности

---

[1] Във формулите по-долу не винаги ще е отбелязано, че φ_i, както и ψ_{si} зависят и от данните на наблюдението. Това обаче винаги ще се подразбира.

$$(3') \qquad \begin{aligned} &\psi'_{1i}(\tau_i-\Delta'\tau)=1 \qquad \psi'_{2i}(\tau_i-\Delta'\tau)=0 \qquad \psi'_{3i}(\tau_i-\Delta'\tau)=0, \\ &\psi_{1i}(\tau_i-\Delta'\tau)=0 \qquad \psi_{2i}(\tau_i-\Delta'\tau)=1 \qquad \psi_{3i}(\tau_i-\Delta'\tau)=0. \end{aligned}$$

Освен това от (1) и (2) имаме

$$(4) \qquad \begin{aligned} u_i \sum_j X_{\tau_{i_j}} \psi_{1i}(\tau_{i_j}+\theta_j \Delta'\tau)+v_i \sum_j X_{\tau_{i_j}} \psi_{2i}(\tau_{i_j}+\theta_j \Delta'\tau)+ \\ + Y_{\tau_i} \sum_j X_{\tau_{i_j}} \psi_{3i}(\tau_{i_j}+\theta_j \Delta'\tau)=Y_{\tau_i}, \end{aligned}$$

откъдето получаваме връзките

$$(4') \qquad \begin{aligned} \sum_j X_{\tau_{i_j}} \psi_{1i}(\tau_{i_j}+\theta_j \Delta'\tau)=0, \qquad \sum_j X_{\tau_{i_j}} \psi_{2i}(\tau_{i_j}+\theta_j \Delta'\tau)=0, \\ \sum_j X_{\tau_{i_j}} \psi_{3i}(\tau_{i_j}+\theta_j \Delta'\tau)=1, \end{aligned}$$

които определят по какъв начин ψ_{si} $(s=1, 2, 3)$ зависят от данните на наблюдението $\left(X_{\tau_{i_j}}, Y_{\tau_{i_j}}\right)$.

Ако подберем функциите ψ_{si} $(s=1, 2, 3)$ $(i=0, 1, 2 \ldots m-1)$ да удовлетворяват условия (3′) и (4′), функцията плътност φ_i ще зависи още от параметрите u_i v_i по такъв начин, че описаната от φ_i крива S_i от S в подинтервала $\tau_i-\Delta'\tau \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ ще минава през точката $Q_i[\tau_i-\Delta'\tau, v_i]$ и ще има в тази точка тангента с ъглов коефициент, равен на u_i, където u_i и v_i могат да бъдат избрани съвсем произволно; освен това от (4) следва, че Y_{τ_i} — броят на жените, които са станали майки, минавайки през възрастовия интервал $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, за време от една календарна година — запазва постоянен броя си също независимо какви стойности даваме на $[u_i, v_i]$.

8. Нека разгледаме два съседни подинтервала $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ и $[\tau_{i+1}, \tau_{i+2}]$. Функциите плътност за тези подинтервали ще бъдат съответно

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\varphi_i=u_i\psi_{1i}+v_i\psi_{2i}+Y_{\tau_i}\psi_{3i}, \\ &\varphi_{i+1}=u_{i+1}\psi_{1,\,i+1}+v_{i+1}\psi_{2,\,i+1}+Y_{\tau_{i+1}}\psi_{3,\,i+1} \end{aligned}$$

при условие, че ψ_{si} и $\psi_{s,\,i+1}$ $(s=1, 2, 3)$ удовлетворяват зависимости (3′) и (4′), и u_i, v_i и u_{i+1}, v_{i+1} са съответно ъгловите коефициенти на тангентите и стойностите на φ_i и φ_{i+1} в точките Q_i и Q_{i+1}. Понеже φ_{i+1} е дефинирана в подинтервала $\tau_{i+1}-\Delta'\tau \leq \tau \leq \tau_{i+2}$, можем да я подчиним на допълнителните условия: минавайки през точката $Q_{i+1}\left(\tau_{i_{k-1}}=\tau_{i+1}-\Delta'\tau,\ v_{i+1}\right)$, в тази точка Q_{i+1}, в която се срещат, двата сегмента S_i и S_{i+1} да имат обща тангента. Това може да стане, стига да подберем подходящи значения за u_{i+1} и v_{i+1}.

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\varphi'_i\left(\tau_{i_{k-1}}\right)=u_i\psi'_{1i}\left(\tau_{i_{k-1}}\right)+v_i\psi'_{2i}\left(\tau_{i_{k-1}}\right)+Y_{\tau_i}\psi'_{3i}\left(\tau_{i_{k-1}}\right)=u_{i+1}, \\ &\varphi_i\left(\tau_{i_{k-1}}\right)=u_i\psi_{1i}\left(\tau_{i_{k-1}}\right)+v_i\psi_{2i}\left(\tau_{i_{k-1}}\right)+Y_{\tau_i}\psi_{3i}\left(\tau_{i_{k-1}}\right)=v_{i+1}. \end{aligned}$$

С (6) се установява една линейна зависимост между (u_i, v_i) и (u_{i+1}, v_{i+1}), която позволява всички (u_i, v_i) да бъдат изразени чрез произволно избрани начални (u, v).

От (3′), (4′) и (6) следва, че всеки два съседни сегмента S_i, S_{i+1} от кривата S, които се описват от φ_i и φ_{i+1} в подинтервалите $(\tau_i - \Delta'\tau, \tau_{i+1} - \Delta'\tau)$ и $(\tau_{i+1} - \Delta'\tau, \tau_{i+2} - \Delta'\tau)$ $(i = 0, 1, 2 \ldots m-1)$, имат обща точка и обща тангента за $\tau = \tau_{i_{k-1}} = \tau_{i+1} - \Delta'\tau$. По този начин функцията плътност φ се представя като функция, зависеща от τ, данните на наблюдението и още от двата произволни параметъра (u, v), които подлежат на определяне.

Стойностите на (u, v) ще се определят, като се използуват методите на вариационното смятане.

9. В настоящата работа се разглеждат промените в относителните честоти, които настъпват с промените на параметъра τ. Понеже тези промени се описват от φ, скоростта $v(\tau)$, с която стават тези промени по τ, ще бъде равна на

$$v(\tau) = \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = \varphi'(\tau).$$

Ако напишем

$$U = \frac{1}{2}\int_a^b [v(\tau/u, v)]^2\, d\tau = \frac{1}{2}\int_a^b [\varphi'(\tau/u, v)]^2\, d\tau, \tag{7}$$

ще казваме, че стойността на интеграла U дава съвкупната жива сила на относителната честота в интервала $[a, b]$. Приемаме като принцип, че търсената крива $\varphi_0(\tau/u_0\, v_0)$, принадлежаща на съвкупността от криви $\varphi(\tau/u, v)$ ((u, v) произволни), която отразява развитието на разглеждания процес по параметъра τ (отразява развитието на раждаемостта по възрастта τ на майките), е кривата, за която е изпълнено условието

$$\delta U = 0^1. \tag{8}$$

10. Един безкрайно малък елемент ds от кривата S на относителната честота на разглеждания процес се дава с израза

$$ds = \sqrt{1 + [\varphi'(\tau)]^2}\, d\tau. \tag{9}$$

Ако функцията φ е такава, че за всяка стойност на τ от интервала (a, b) да имаме

$$|\varphi'(\tau)| < 1,$$

ще казваме, че разглежданият процес е р е г у л я р е н. При такъв случай изразът (9) за ds може да се развие в безкраен ред по степените на $[\varphi'(\tau)]^2$, сходящ за всички стойности на τ в интервала $(a \leqq \tau \leqq b)$.

$$ds = \left\{1 + \frac{1}{2}\, [\varphi'(\tau)]^2 + \qquad \right\} d\tau. \tag{10}$$

Ако се спрем на първите два члена от развитието на (10), като първо приближение за ds ще получим израза

[1] В разглеждания случай, където φ и φ' са линейни спрямо (u, v), за функцията $\varphi_0(\tau/u_0, v_0)$, която удовлетворява условие (8), интегралът U взема минимална стойност. Не е разгледан случай, когато φ зависи от u и v нелинейно.

$$ds = \{1 + 1/2\,[\varphi'(\tau)]\}\,d\tau,$$

откъдето за дължина на кривата S получаваме

$$S = (b-a) + 1/2\int_a^b [\varphi'(\tau)]^2\,d\tau = (b-a) + U. \qquad (11)$$

От (8) и (11) следва, че ако за $\varphi_0(\tau/u_0, v_0)$ интегралът U взема минималната си стойност, дължината S на кривата на относителната честота, по която се развива един регулярен процес, е минимална.

11. Скоростта на раждаемостта в подинтервала (τ_i, τ_{i+1}) и съвкупната жива сила на относителната честота за същия интервал са

$$v_i(\tau_{i_j} + \theta'_j\,\Delta'\tau/uv) = \frac{\varphi_i(\tau_{i_j} + \varphi'_j\,\Delta'\tau/uv) - \varphi_i(\tau_{i_j}/uv)}{\Delta'\tau} = \varphi'_i(\tau_{i_j} + \theta'_j\,\Delta'\tau/uv),$$

$$U_i = 1/2\sum_j [\varphi'_i(\tau_{i_j} + \theta'_i\,\Delta'\tau/uv)]^2\,\Delta'\tau$$

$$0 \leqq \theta'_j \leqq 1 \quad (i = 0, 1, 2 \ldots m-1).$$

Съвкупната жива сила за целия интервал (a, b) е равна на

$$U = \Sigma U_i = 1/2\sum_i\sum_j [\varphi'_i(\tau_{i_j} + \theta'_j\,\Delta'\tau/uv)]^2\,\Delta'\tau \qquad (12)$$

$$0 \leqq \theta'_j \leqq 1 \quad (j = 0, 1, 2 \ldots k-1)\ (i = 0, 1, 2 \ldots m-1).$$

Като деривираме U от (12) по u и v, получаваме уравненията

$$\sum_i\sum_j \varphi'_i(\tau_{i_j} + \theta'_j\,\Delta'\tau/uv)\,\frac{\partial\varphi'_i(\tau_{i_j} + \theta'_j\,\Delta'\tau/uv)}{\partial u} = 0,$$

$$\sum_i\sum_j \varphi'_i(\tau_{i_j} + \theta'_j\,\Delta'\tau/uv)\,\frac{\partial\varphi'_i(\tau_{i_j} + \theta'_j\,\Delta'\tau/uv)}{\partial v} = 0 \qquad (13)$$

$$(0 \leqq \theta'_j \leqq 1)\ (j = 0, 1, 2 \ldots k-1)\ (i = 0, 1, 2 \ldots m-1),$$

от които се определят стойностите на u и v.[1]

12. Пресмятанията за намиране кривата на раждаемостта φ са извършени върху данните от наблюденията през 1955 г., публикувани в изданията на ЦСУ:

$l_x = X_{\tau_{i_j}}$ среден брой жени на x навършени години, живели през 1955 г.;

Y_{τ_i} — брой на родените деца през 1955 г. от майки на 5 последователни възрасти.[2]

Ще считаме, че условията, при които се е развивало населението през

[1] В зависимост от стойностите, които ще дадем на θ_j и θ'_j, ще допуснем по-голяма или по-малка грешка в крайния резултат. За простота ще работим при $\theta_j = \theta'_j = 0$, считайки, че средната допусната грешка практически ще бъде нищожна.

[2] Разглеждат се само живородените деца. Броят на майките е увеличен нечувствително, понеже раждането на близнаци не е взето под внимание.

1955 г., са били практически постоянни и главно влияние върху раждаемостта е оказвала възрастта на майките.

13. Приема се, че жените в България раждат във възрастовия интервал от 15 до 50 години. В такъв случай ще имаме $a=15$, $b=50$. Подинтервалите $\Delta\tau$ ще изберем да съдържат 5 последователни възрастови години поради това, че Y_{τ_i} представлява броят на родени деца от майки на 5 последователни възрастови години. Броят m на подинтервалите $\Delta\tau$ ще бъде $m=\dfrac{50-15}{5}=7$ $(i=0, 1, 2 \ldots 5, 6)$. Подинтервалите $\Delta'\tau$ ще изберем да съдържат една възрастова година, понеже с l_x е даден броят на жените във възрастовия интервал x навършени и $x+1$ ненавършени години: $\tau_{i_{j+1}}-\tau_{i_j}=1$ $k=5$ $(j=0, 1, \ldots 4)$.

14. С Y_{τ_0} бележим броя на родените деца от майки на възрасти 15, 16, 17, 18 и 19 години; средната възраст на подинтервала е $\xi_0=17$. С Y_{τ_1} бележим броя на родените деца от майки на възраст 20, 21, 22, 23 и 24 години със средна възраст на подинтервала $\xi_1=22$ и т. н. За i-тия подинтервал $(i=0, 1, 2 \ldots 5, 6)$ имаме $\xi_i=17+5i$ и Y_{τ_i} е броят на живородените деца от майки на възрасти $\xi_i+\tau$ $(\tau=-2, -1, 0, 1, 2)$. При построяване на функциите φ_i $(i=0, 1, 2 \ldots 5, 6)$ за i-тия подинтервал за удобство ще пренасяме началото на координатната система в точката с абсциса ξ_i; тогава i-тият сегмент S_i на S ще се опише от φ_i, когато τ се мени от -2 до $+2$.

15. За всяка от функциите ψ_{si} $(s=1, 2, 3)$ условия (3′) и (4′) дават по три връзки, следователно за ψ_{si} $(s=1, 2, 3)$ можем да вземем полиноми от втора степен:

$$
\begin{aligned}
&\psi_{1i}=a_{1i}+a_{2i}\tau+a_{3i}\tau^2,\\
(14)\qquad &\psi_{2i}=b_{1i}+b_{2i}\tau+b_{3i}\tau^2,\\
&\psi_{3i}=c_{1i}+c_{2i}\tau+c_{3i}\tau^2.
\end{aligned}
$$

В такъв случай условията (3′) и (4′) се дават с уравненията

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
&a_{2i}-6a_{3i}=1, \qquad b_{2i}-6b_{3i}=0, \qquad c_{2i}-6c_{3i}=0,\\
&a_{1i}-3a_{2i}+9a_{3i}=0, \qquad b_{1i}-3b_{2i}+9b_{3i}=1, \qquad c_{1i}-3c_{2i}+9c_{3i}=0\\
&M_{0i}a_{1i}+M_{1i}a_{2i}+M_{2i}a_{3i}=0, \qquad M_{0i}b_{1i}+M_{1i}b_{2i}+M_{2i}b_{3i}=0,\\
&M_{0i}c_{1i}+M_{1i}c_{2i}+M_{2i}c_{3i}=1,
\end{aligned}
$$

където $M_{\mu,i}=\sum\limits_{\tau=-2}^{+2}\tau^{\mu}\, l_{\xi_i+\tau}$, $\mu=0, 1, 2$.

Системите уравнения (15) имат една и съща детерминанта

(16)
$$\Delta(i)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 9 \\ M_{0i} & M_{1i} & M_{2i} \end{vmatrix}=-\{9M_{0i}+6M_{1i}+M_{2i}\}.$$

Ако пишем
$$a^{(i)}_{\mu,\nu}=\frac{(-1)^{\mu+\nu}\Delta^{(i)}_{\mu,\nu}}{\Delta^{(i)}};\ \mu,\nu=1,2,3,$$

където $\Delta^{(i)}_{\mu,\nu}$ е поддетерминанта на елемента, в който се пресичат μ-тият ред и ν-тият стълб на $\Delta(i)$, за ψ_{si} $(s=1, 2, 3)$ имаме изразите

(17)
$$\psi_{1,i}=a^{(i)}_{11}+a^{(i)}_{12}\tau+a^{(i)}_{13}\tau^2,$$
$$\psi_{2,i}=a^{(i)}_{21}+a^{(i)}_{22}\tau+a^{(i)}_{23}\tau^2,$$
$$\psi_{3,i}=a^{(i)}_{31}+a^{(i)}_{32}\tau+a^{(i)}_{33}\tau^2.$$

Окончателният израз за φ_i[1] е

(18)
$$\varphi_i=\lambda_{1i}+\lambda_{2i}\tau+\lambda_{3i}\tau^2,$$

където

(19)
$$\lambda_{1i}=u_i a^{(i)}_{11}+v_i a^{(i)}_{21}+Y_{\tau_i} a^{(i)}_{31},$$
$$\lambda_{2i}=u_i a^{(i)}_{12}+v_i a^{(i)}_{22}+Y_{\tau_i} a^{(i)}_{32},$$
$$\lambda_{3i}=u_i a^{(i)}_{13}+v_i a^{(i)}_{23}+Y_{\tau_i} a^{(i)}_{33}.$$

Понеже за значения на $\tau=+2$ $\varphi'_i(2)$ и $\varphi_i(2)$ вземат стойности, съответно равни на u_{i+1} и v_{i+1}, от (6), (17) получаваме рекурентната зависимост между $u_i v_i$ и u_{i+1} v_{i+1}:

(20)
$$u_{i+1}=(a^{(i)}_{12}+4a^{(i)}_{13})u_i+(a^{(i)}_{22}+4a^{(i)}_{23})v_i+(a^{(i)}_{32}+4a^{(i)}_{33})Y_{\tau_i}$$
$$v_{i+1}=(a^{(i)}_{11}+2a^{(i)}_{12}+4a^{(i)}_{13})u_i+(a^{(i)}_{21}+2a^{(i)}_{22}+4a^{(i)}_{23})v_i+(a^{(i)}_{31}+2a^{(i)}_{32}+4a^{(i)}_{33})Y_{\tau_i}.$$
$$(i=1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Връзките (20) дават възможност всички u_i v_i $(i=2, 3, 4, 5, 6)$, а също така и $\varphi_i(\tau)$ и $\varphi'_i(\tau)$ да бъдат изразени линейно само чрез u_1 v_1.

16. За началния сегмент на S, който има индекс $i=0$, функциите ψ_{s0} $(s=1, 2, 3)$ трябва да удовлетворяват условия (3′) и (4′) за $\tau=2$ и системите уравнения по a_{s0}, b_{s0} и c_{s0} $(s=1, 2, 3)$ са

(21)
$$a_{20}+4a_{30}=1,\qquad b_{20}+4b_{30}=0,\qquad c_{20}+4c_{30}=0,$$
$$a_{10}+2a_{20}+4a_{30}=0,\qquad b_{10}+2b_{20}+4b_{30}=1,\qquad c_{10}+2c_{20}+4c_{30}=0,$$

[1] φ е дефинирана в интервала $a=\tau_0\leq\tau\leq b$. Понеже $\tau_0-\Delta'\tau$ излиза вън от този интервал, $\varphi(\tau_0-\Delta'\tau)$ остава недефинирана. Начални u и v ще бъдат u_1 и v_1; с тези параметри ще бъде представен и нулевият сектор.

$$(21)\qquad M_{00}a_{10}+M_{10}a_{20}+M_{20}a_{30}=0,\qquad M_{00}b_{10}+M_{10}b_{20}+M_{20}b_{30}=0,$$
$$M_{00}c_{10}+M_{10}c_{20}+M_{20}c_{30}=1.$$

Детерминантата $\varDelta(0)$ и λ_{st} $(s=1, 2, 3)$ са

$$(22)\qquad \varDelta(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ M_{00} & M_{10} & M_{20} \end{vmatrix}=-4M_{00}+4M_{10}+M_{20}.$$

$$\lambda_{10}=u_1\, a_{11}^{(0)}+v_1\, a_{21}^{(0)}+Y_{\tau_0}\, a_{31}^{(0)},$$
$$\lambda_{20}=u_1\, a_{12}^{(0)}+v_1\, a_{22}^{(0)}+Y_{\tau_0}\, a_{32}^{(0)},$$
$$\lambda_{30}=u_1\, a_{13}^{(0)}+v_1\, a_{23}^{(0)}+Y_{\tau_0}\, a_{33}^{(0)}.$$

17. Интегралът U се пресмята като сума от интегралите U_i

$$U=\sum_{i=0}^{6} U_i,$$

където U_i е съвкупната жива сила на i-тия сегмент. Понеже за вариацията на U имаме

$$(23)\qquad \delta U=\delta(\Sigma U_i)=\Sigma\delta U_i,$$

уравненията, от които се пресмятат u_1 v_1, са

$$(24)\qquad \frac{\partial U}{\partial u_1}=\sum_i\frac{\partial U_i}{\partial u_1}=0\qquad \frac{\partial U}{\partial v_1}=\sum_i\frac{\partial U_i}{\partial v_1}=0.$$

18. Кривата на относителната честота на ражданията $\varphi=\varphi(\tau)$ от третия сегмент до края се променя почти линейно. За икономия на работа стойностите на интегралите U_i за всеки от сегментите с индекс $i=3, 4, 5$ и 6 са пресметнати, като че ли за всеки един от тези сегменти скоростите на промените на раждаемостта са постоянни и равни за сегментите с индекси $i=3, 4, 5, 6$ съответно на $v_3=[\varphi_3(2)-\varphi_3(-2)]:4$, $v_4=[\varphi_4(2)-\varphi_3(2)]:5$, $v_5=[\varphi_5(2)-\varphi_4(2)]:5$, $v_6=[\varphi_6(2)-\varphi_5(2)]:5$.

Интегралите U_3, U_4, U_5 и U_6 са

$$U_3=v_3^2:4,\quad U_4=v_4^2:5,\quad U_5=v_5^2:5,\quad U_6=v_6^2:6.$$

Наблюдение 1955

Възраст на майките	i	Родени момчета и момичета	x	$l^*_x = X_{\tau_{i_j}}$	x	l_x	x	l_x	x	l_x
			15	55910	25	64297	35	55555	45	50528
			16	55458	26	64766	36	40957	46	48216
до 20	0	17252	17	56950	27	65753	37	29075	47	47674
20–24	1	59146	18	59688	28	67425	38	29631	48	48662
25–29	2	43309	19	61877	29	69099	39	44173	49	47842
30–34	3	21252								
35–39	4	6657	20	65312	30	68666	40	56192		
40–44	5	2690	21	67312	31	66805	41	47655		
45 и пов.	6	472	22	66858	32	65398	42	46595		
			23	65040	33	64638	43	52464		
Всичко		150778	24	64294	34	62432	44	50748		

l^*_x — среден брой жени, които са живели през 1955 г.

С е г м е н т $i=0$

$M_{00}=289883$
$M_{10}=16164$
$M_{20}=586294$
$Y_{\tau_0}=17252$

$\Delta[0]=-1681170.$

$\lambda_{10}= -0{,}659024\ u_1+0{,}310283\ v_1+0{,}041048$
$\lambda_{20}= -0{,}340976\ u_1+0{,}689717\ v_1+0{,}041048$
$\lambda_{30}= 0{,}335244\ u_1-0{,}172429\ v_1+0{,}010262$

$\varphi_0(-2)= 1{,}363904\ u_1-1{,}758867\ v_1+0{,}164192$
$\varphi_0(-1)= 0{,}017196\ u_1-0{,}551863\ v_1+0{,}092358$
$\varphi_0(0) = -0{,}659024\ u_1+0{,}310283\ v_1+0{,}041048$
$\varphi_0(1) = -0{,}664756\ u_1+0{,}827571\ v_1+0{,}010262$
$\varphi_0(2) = 0{,}000000\ u_1+1{,}000000\ v_1+0{,}000000$

С е г м е н т $i=1$

$M_{01}= 328816$
$M_{11}=-4308$
$M_{21}= 650776$
$Y_{\tau_1}= 59146$

$\Delta[1]=-3584272.$

$\lambda_{11}= 0{,}533876\ u_1+0{,}174353\ v_1+0{,}148516$
$\lambda_{21}= -0{,}644083\ u_1-0{,}550431\ v_1+0{,}099009$
$\lambda_{31}= -0{,}274014\ u_1-0{,}091739\ v_1+0{,}016502$

$\varphi_1(-2)= 0{,}725986\ u_1+0{,}908259\ v_1+0{,}016506$
$\varphi_1(-1)= 0{,}903945\ u_1+0{,}633045\ v_1+0{,}066009$
$\varphi_1(0) = 0{,}533876\ u_1+0{,}174353\ v_1+0{,}148516$
$\varphi_1(1) = -0{,}384221\ u_1-0{,}467817\ v_1+0{,}264027$
$\varphi_1(2) = -1{,}850346\ u_1-1{,}293465\ v_1+0{,}412542$

Сегмент $i=2$

$M_{02}=331340$
$M_{12}=\ 12263$
$M_{22}=665775$ $\qquad \Delta[2]=-3721413.$
$Y_{r_2}=\ 43309$

$$\begin{aligned}
\lambda_{12}&=\ \ 0{,}566369\ u_2+0{,}198675\ v_2+0{,}104740\\
\lambda_{22}&=-0{,}622421\ u_2-0{,}534216\ v_2+0{,}069827\\
\lambda_{32}&=-0{,}270403\ u_2-0{,}089036\ v_2+0{,}011638
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(-2)&=\ \ 0{,}729599\ u_2+0{,}910963\ v_2+0{,}011638\\
\varphi_2(-1)&=\ \ 0{,}918387\ u_2+0{,}643855\ v_2+0{,}046827\\
\varphi_2(0)\ &=\ \ 0{,}566369\ u_2+0{,}198675\ v_2+0{,}104740\\
\varphi_2(1)\ &=-0{,}326455\ u_2-0{,}424577\ v_2+0{,}186205\\
\varphi_2(2)\ &=-1{,}760085\ u_2-1{,}225901\ v_2+0{,}290946
\end{aligned}$$

Сегмент $i=3$

$M_{03}=\ 327939$
$M_{13}=-\ 14635$
$M_{23}=\ 655835$ $\qquad \Delta[3]=-3519476.$
$Y_{r_3}=\ 21252$

$$\begin{aligned}
\lambda_{13}&=\ \ 0{,}521609\ u_3+0{,}161396\ v_3+0{,}054346\\
\lambda_{23}&=-0{,}652261\ u_3-0{,}559070\ v_3+0{,}036230\\
\lambda_{33}&=-0{,}275377\ u_3-0{,}093178\ v_3+0{,}006038
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3(-2)&=\ \ 0{,}724623\ u_3+0{,}906823\ v_3+0{,}006038\\
\varphi_3(-1)&=\ \ 0{,}898493\ u_3+0{,}627287\ v_3+0{,}024154\\
\varphi_3(0)\ &=\ \ 0{,}521609\ u_3+0{,}161395\ v_3+0{,}054346\\
\varphi_3(1)\ &=-0{,}406029\ u_3-0{,}490853\ v_3+0{,}096614\\
\varphi_3(2)\ &=-1{,}884421\ u_3-1{,}329457\ v_3+0{,}150958
\end{aligned}$$

Сегмент $i=4$

$M_{04}=199391$
$M_{14}=-34090$
$M_{24}=469500$ $\qquad \Delta[4]=-2059479.$
$Y_{r_4}=\ 6657$

$$\begin{aligned}
\lambda_{14}&=\ \ 0{,}534936\ u_4+0{,}128654\ v_4+0{,}029091\\
\lambda_{24}&=-0{,}643376\ u_4-0{,}580897\ v_4+0{,}019394\\
\lambda_{34}&=-0{,}273896\ u_4-0{,}096816\ v_4+0{,}003232
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_4(-2)&=\ \ 0{,}726104\ u_4+0{,}903184\ v_4+0{,}003232\\
\varphi_4(-1)&=\ \ 0{,}904416\ u_4+0{,}612735\ v_4+0{,}012929\\
\varphi_4(0)\ &=\ \ 0{,}534936\ u_4+0{,}128654\ v_4+0{,}029091\\
\varphi_4(1)\ &=-0{,}382336\ u_4-0{,}549059\ v_4+0{,}051717\\
\varphi_4(2)\ &=-1{,}847400\ u_4-1{,}420404\ v_4+0{,}080807
\end{aligned}$$

Сегмент $i=5$

$M_{05}=\ 253654$
$M_{15}=-\ 6079$
$M_{25}=\ 527879$ $\qquad \Delta[5]=-2774291.$
$Y_{r_5}=\ 2690$

$$\begin{aligned}
\lambda_{15}&=\ \ 0{,}551105\ u_5+0{,}177128\ v_5+0{,}008727\\
\lambda_{25}&=-0{,}632597\ u_5-0{,}548581\ v_5+0{,}005818\\
\lambda_{35}&=-0{,}272099\ u_5-0{,}091430\ v_5+0{,}000970
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_5(-2)&=\ \ 0{,}727903\ u_5+0{,}908570\ v_5+0{,}000971\\
\varphi_5(-1)&=\ \ 0{,}911603\ u_5+0{,}634279\ v_5+0{,}003879\\
\varphi_5(0)\ &=\ \ 0{,}551105\ u_5+0{,}177128\ v_5+0{,}008727\\
\varphi_5(1)\ &=-0{,}353591\ u_5-0{,}462883\ v_5+0{,}015515\\
\varphi_5(2)\ &=-1{,}802485\ u_5-1{,}285754\ v_5+0{,}024243
\end{aligned}$$

Сегмент $i=6$

$$M_{06} = 242922$$
$$M_{16} = -4926$$
$$M_{26} = 490358 \qquad \varDelta[6] = -2647100$$
$$Y_{\tau_6} = 472$$

$$\lambda_{16} = 0{,}538982\ u_6 + 0{,}174078\ v_6 + 0{,}001605$$
$$\lambda_{26} = -0{,}640678\ u_6 - 0{,}550615\ v_6 + 0{,}001070$$
$$\lambda_{36} = -0{,}237446\ u_6 - 0{,}091769\ v_6 + 0{,}000178$$

$$\varphi_6(-2) = 0{,}726554\ u_6 + 0{,}908232\ v_6 + 0{,}000177$$
$$\varphi_6(-1) = 0{,}906214\ u_6 + 0{,}632924\ v_6 + 0{,}000713$$
$$\varphi_6(0) = 0{,}538982\ u_6 + 0{,}174078\ v_6 + 0{,}001605$$
$$\varphi_6(1) = -0{,}375142\ u_6 - 0{,}468306\ v_6 + 0{,}002853$$
$$\varphi_6(2) = -1{,}836158\ u_6 - 1{,}294228\ v_6 + 0{,}004457$$

Представяне на u_{i+1} v_{i+1} чрез u_i v_i

$$u_2 = -1{,}740139\ u_1 - 0{,}917387\ v_1 + 0{,}165017$$
$$v_2 = -1{,}850346\ u_1 - 1{,}293465\ v_1 + 0{,}412542$$

$$u_3 = -1{,}704033\ u_2 - 0{,}890360\ v_2 + 0{,}116379$$
$$v_3 = -1{,}760085\ u_2 - 1{,}225901\ v_2 + 0{,}290946$$

$$u_4 = -1{,}753769\ u_3 - 0{,}931782\ v_3 + 0{,}060382$$
$$v_4 = -1{,}884421\ u_3 - 1{,}329457\ v_3 + 0{,}150958$$

$$u_5 = -1{,}738960\ u_4 - 0{,}968161\ v_4 + 0{,}032322$$
$$v_5 = -1{,}847400\ u_4 - 1{,}420404\ v_4 + 0{,}080807$$

$$u_6 = -1{,}720993\ u_5 - 0{,}914301\ v_5 + 0{,}009698$$
$$v_6 = -1{,}802485\ u_5 - 1{,}285754\ v_5 + 0{,}024243$$

$$u_7 = -1{,}734462\ u_6 - 0{,}917691\ v_6 + 0{,}001782$$
$$v_7 = -1{,}836158\ u_6 - 1{,}294228\ v_6 + 0{,}004457$$

Представяне на u_i v_i чрез u_1 v_1:

$$u_3 = 4{,}612728\ u_1 + 2{,}714907\ v_1 - 0{,}532126$$
$$v_3 = 5{,}331134\ u_1 + 3{,}200339\ v_1 - 0{,}505234$$

$$u_4 = -13{,}057114\ u_1 - 7{,}743338\ v_1 + 1{,}464376$$
$$v_4 = -15{,}779835\ u_1 - 9{,}370741\ v_1 + 1{,}825394$$

$$u_5 = 37{,}983220\ u_1 + 22{,}537741\ v_1 - 4{,}281444$$
$$v_5 = 46{,}535453\ u_1 + 27{,}615281\ v_1 - 5{,}217278$$

$$u_6 = -107{,}916267\ u_1 - 64{,}035973\ v_1 + 12{,}148195$$
$$v_6 = -128{,}297329\ u_1 - 76{,}130398\ v_1 + 14{,}449618$$

$$u_7 = 304{,}913968\ u_1 + 180{,}932143\ v_1 - 34{,}329085$$
$$v_7 = 364{,}197313\ u_1 + 216{,}110257\ v_1 - 41{,}002648$$

Изрази за скоростите $v_i(\tau_{i_j})=\varphi_i(\tau_{i_{j+1}})-\varphi_i(\tau_{i_j})=\varphi_i'(\tau_{i_j})$:

$i=0$

$$\varphi_0'(-3)= 1{,}363904\ u_1-1{,}758867\ v_1+0{,}164129$$
$$\varphi_0'(-2)=-1{,}346708\ u_1+1{,}206999\ v_1-0{,}071834$$
$$\varphi_0'(-1)=-0{,}676220\ u_1+0{,}862146\ v_1-0{,}051310$$
$$\varphi_0'(0)\ =-0{,}005732\ u_1+0{,}517288\ v_1-0{,}030785$$
$$\varphi_0'(1)\ = 0{,}664756\ u_1+0{,}172429\ v_1-0{,}010262$$
$$\varphi_0'(2)\ = 0{,}725986\ u_1-0{,}091741\ v_1+0{,}016506$$

$i=1$

$$\varphi_1'(-2)= 0{,}177959\ u_1-0{,}275214\ v_1+0{,}049503$$
$$\varphi_1'(-1)=-0{,}370069\ u_1-0{,}458692\ v_1+0{,}082507$$
$$\varphi_1'(0)\ =-0{,}918097\ u_1-0{,}642170\ v_1+0{,}115511$$
$$\varphi_1'(1)\ =-1{,}466125\ u_1-0{,}825648\ v_1+0{,}148515$$
$$\varphi_1'(2)\ = 1{,}850346\ u_1+1{,}293465\ v_1+0{,}729599\ u_2+0{,}910963\ v_2-0{,}400904=$$
$$=-1{,}104855\ u_1-0{,}554159\ v_1+0{,}095302,$$

$i=2$

$$\varphi_2'(-2)= 0{,}188788\ u_2-0{,}267108\ v_2+0{,}034913$$
$$\varphi_2'(-1)=-0{,}352018\ u_2-0{,}445180\ v_2+0{,}058189$$
$$\varphi_2'(0)\ =-0{,}892824\ u_2-0{,}623252\ v_2+0{,}081465$$
$$\varphi_2'(1)\ =-1{,}433630\ u_2-0{,}801324\ v_2+0{,}104741$$
$$\varphi_2'(2)\ = 1{,}070085\ u_2+1{,}225901\ v_2+0{,}724623\ u_3+0{,}906823\ v_3-0{,}284908=$$
$$=-1{,}070783\ u_2-0{,}530349\ v_2+0{,}063260,$$

$$\varphi_3(2)-\varphi_3(-2)=-\ 23{,}956718\ u_1-\ 14{,}240166\ v_1+\ 2{,}663105$$
$$\varphi_4(2)-\varphi_3(2)\ =\ 62{,}315288\ u_1+\ 36{,}986022\ v_1-\ 7{,}042672$$
$$\varphi_5(2)-\varphi_4(2)\ =-174{,}832782\ u_1-103{,}745679\ v_1+19{,}666896$$
$$\varphi_6(2)-\varphi_5(2)\ =\ 492{,}494642\ u_1+292{,}240655\ v_1-55{,}452266$$

$$\frac{\partial[U_0+U_1]}{\partial u_1}= 9{,}481869\ u_1- 2{,}029944\ v_1- 0{,}090095$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial u_1} = 33{,}335903\ u_1+ 19{,}822170\ v_1- 3{,}930590$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial u_1} = 143{,}481084\ u_1+ 85{,}286910\ v_1- 15{,}949814$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial u_1} = 776{,}639024\ u_1+ 460{,}958923\ v_1- 87{,}773227$$

$$\frac{\partial U_5}{\partial u_1} = 6113{,}300262\ u_1+ 3627{,}629171\ v_1- 687{,}683628$$

$$\frac{\partial U_6}{\partial u_1} =48510{,}194283\ u_1+28785{,}391224\ v_1-5461{,}988778$$

$$\sum_i \frac{\partial U_i}{\partial u_1} =55586{,}432425\ u_1+32977{,}058454\ v_1-6257{,}416132=0$$

$$\frac{\partial[U_0+U_1]}{\partial v_1}=- 2{,}029944\ u_1+ 7{,}289018\ v_1- 0{,}740219$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial v_1} = 19{,}822168\ u_1+ 11{,}795038\ v_1- 2{,}339870$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial v_1} = 85{,}286910\ u_1+ 50{,}695582\ v_1- 9{,}480764$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial v_1} = 460{,}958923\ u_1+ 273{,}593165\ v_1- 52{,}096084$$

$$\frac{\partial U_5}{\partial v_1} = 3627{,}629171\ u_1+ 2152{,}633203\ v_1- 408{,}071096$$

$$\frac{\partial U_6}{\partial v_1} = 28785{,}391224\ u_1+17080{,}919795\ v_1-3241{,}081307$$

$$\sum_i \frac{\partial U_i}{\partial v_1} = 32977{,}058454\ u_1+19576{,}925801\ v_1-3713{,}809340=0$$

i	u_{i+1}	v_{i+1}
0	0,043658	0,116162
1	−0,017519	0,181492
2	−0,015362	0,099290
3	−0,005193	0,047905
4	−0,005028	0,022356
5	−0,002089	0,004562
6	0,001219	0,002388

$\varphi_0(-2)=0{,}019424$	$\varphi_1(-2)=0{,}153706$	$\varphi_2(-2)=0{,}164189$
$\varphi_0(-1)=0{,}029003$	$\varphi_1(-1)=0{,}179009$	$\varphi_2(-1)=0{,}147316$
$\varphi_0(0)=0{,}048319$	$\varphi_1(0)=0{,}192077$	$\varphi_2(0)=0{,}130876$
$\varphi_0(1)=0{,}077372$	$\varphi_1(1)=0{,}192910$	$\varphi_2(1)=0{,}114867$
$\varphi_0(2)\quad 0{,}116162$	$\varphi_1(2)=0{,}181492$	$\varphi_2(2)=0{,}099290$
$\varphi_3(-2)=0{,}084945$	$\varphi_4(-2)=0{,}042728$	$\varphi_5(-2)=0{,}017624$
$\varphi_3(-1)=0{,}072635$	$\varphi_4(-1)=0{,}037585$	$\varphi_5(-1)=0{,}013475$
$\varphi_3(0)=0{,}062358$	$\varphi_4(0)=0{,}032476$	$\varphi_5(0)=0{,}009916$
$\varphi_3(1)\quad 0{,}054115$	$\varphi_4(1)=0{,}027400$	$\varphi_5(1)=0{,}006945$
$\varphi_3(2)=0{,}047905$	$\varphi_4(2)=0{,}022356$	$\varphi_5(2)=0{,}004562$
	$\varphi_6(-2)=0{,}002743$	
	$\varphi_6(-1)=0{,}001707$	
	$\varphi_6(0)=0{,}001273$	
	$\varphi_6(1)=0{,}001500$	
	$\varphi_6(2)=0{,}002388$	

Постъпила на 15. IX. 1962 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вариационные принципы механики, Сборник статей, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1959.
2. Лаврентьев М. А. и Л. А. Люстерник, Курс вариационного исчисления, Москва — Ленинград, 1950.
3. Hald A., Statistical Theory with Engineering Applications, New York, London, 1952.
4. Mills Frederick C., Statistical Methods, Zrd ed., New York, .
5. Смирнов Н. В. и И. В. Дунин-Барковский, Краткий курс математической статистики для технических приложений, Москва, 1959.
6. Van der Waerden B. L., Mathematische Statistik, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1957.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРА τ

Э. Симеонов

(*Резюме*)

В настоящей работе предлагается метод, при помощи которого на основании данных наблюдения определяется кривая S относительной частоты данного случайного процесса с параметром τ.

Этот метод построен на принципе вариаций. Его изложение развивается параллельно с вычислением функции $\varphi(\tau)$ рождаемости в Болгарии в 1955 г., изменяющейся в соответствии с возрастом τ матерей.

Предположим, что существует непрерывная функция $\varphi(\tau/u, v)$, в соответствии с возрастом матерей τ и зависящая от параметров (u, v), которая описывает кривую S относительной частоты рождаемости.

Выражение

$$v(\tau/u, v) = \frac{d\varphi(\tau/u, v)}{d\tau} = \varphi'(\tau/u, v)$$

показывает скорость развивающейся рождаемости по τ.

Допустим, что интеграл

$$U = \frac{1}{2}\int_a^b [\varphi'(\tau/u, v)]^2 d\tau$$

дает совокупную живую силу относительной частоты в возрастном интервале $a \leqq \tau \leqq b$, в котором рожают женщины.

Принимаем как принцип, что искомая кривая $\varphi_0(\tau/u_0, v_0)$, принадлежащая совокупности кривых $\varphi(\tau/u, v)$ ((u, v) произвольны), которая отражает развитие рассматриваемого процесса по параметру τ, есть та кривая, для которой выполнено условие

$$\delta U = 0$$

Показано также, что, если для $\varphi_0(\tau/u_0, v_0)$ интеграл U принимает минимальное значение, то и длина S кривой относительной частоты тоже минимальна в том случае, когда $|\varphi'(\tau)| < 1$ для любой точки интервала $a \leqq \tau \leqq b$.

Превел В. Ребров

UNE MÈTHODE À CALCULER LA FONCTION DE FRÈQUENCE D'UN PROCESSUS ALÉATOIR, QUI DÉPEND D' UN PARAMÈTRE τ

E. Siméonoff

(*Résumé*)

Dans ce travail on donne une méthode à calculer la fonction $\varphi(\tau)$ de la fréquence d'un processus aléatoir, quand la fréquence dépend d'un paramètre τ.

On a exposé la méthode en calculant la fonction $\varphi(\tau)$ de la fertilité des femmes en Bulgarie, en adoptant les données statistiques de 1955.

On suppose que la fertilité est une fonction continue de l'âge τ des femmes et qu'elle dépend encore de deux paramètres (u, v), dont u représente la valeur de $\varphi'(\tau)$ et v représente la valeur de la fonction $\varphi(\tau)$ pour $\tau = \tau_0$, ainsi que $\varphi = \varphi(\tau/u, v)$.

L'expression

$$v(\tau/u, v) = \frac{d\varphi(\tau/u, v)}{d\tau} = \varphi'(\tau/u, v)$$

nous donne la vitesse avec laquelle se développe la fertilité par rapport à l'âge τ des femmes.

Alors l'expression

$$U = \frac{1}{2}\int_a^b [\varphi'(\tau/u, v)]^2\, d\tau$$

nous donne la force vive totale de la fertilité à l'intervalle $a \leq \tau \leq b$, dans lequel les femmes accouchent.

La fonction cherchée $\varphi_0(\tau/u_0, v_0)$ qui nous donne la fréquence d'accouchements des femmes à l'âge de τ et qui appartient à la famille des fonctions $\varphi(\tau/u, v)$ [(u, v) quelconques] est celle qui satisfait à la condition

$$\delta U = 0$$

Cette condition nous permet à déterminer les valeurs (u_0, v_0) de (u, v).

Si nous avons la condition supplémentaire que $\varphi'(\tau) < 1$ pour toutes les valeurs de τ dans l'intervalle $a \leq \tau \leq b$, la longueur S de la courbe, décrite par la fonction $y = \varphi(\tau)$, prend son minimum quand $\varphi(\tau/u, v) \equiv \varphi_0(\tau/u_0, v_0)$.